ESPACES METRIQUES

Plan

I : Distance

Le but de ce chapitre est d'étendre des notions introduites dans L2/EVNORMES.PDF sur les espaces vectoriels normés, à des ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels.

1- Définition

On appelle **espace métrique** un ensemble E muni d'une **distance** d, application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) \geq 0$
$\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$
$\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

Un exemple d'espace métrique est donné par un espace vectoriel normé (E, $\|\ \|$), en posant :

$\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = \| y - x \|$

mais la notion plus générale d'espace métrique s'applique à des ensembles qui ne possèdent pas de structure vectorielle. Elle permet de définir sur ces ensembles la notion de **convergence d'une suite**. Il suffit en effet de définir, pour tout suite (x_n) de E et tout a de E :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, a) = 0$$

On définira également plus loin les notions de limite de fonctions ou de fonctions continues. En particulier, vérifions que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathrm{d}(x_n, y_n) = \mathrm{d}(a, b)$. Pour tout n, on a :

$$\mathrm{d}(a, b) \leq \mathrm{d}(a, x_n) + \mathrm{d}(x_n, y_n) + \mathrm{d}(y_n, b)$$

donc $\mathrm{d}(a, b) - \mathrm{d}(x_n, y_n) \leq \mathrm{d}(a, x_n) + \mathrm{d}(y_n, b)$

de même :

$$\mathrm{d}(x_n, y_n) - \mathrm{d}(a, b) \leq \mathrm{d}(a, x_n) + \mathrm{d}(y_n, b)$$

donc $\left|\mathrm{d}(x_n, y_n) - \mathrm{d}(a, b)\right| \leq \mathrm{d}(a, x_n) + \mathrm{d}(y_n, b)$

et comme $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(a, x_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(y_n, b) = 0$, on a bien $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x_n, y_n) = \mathrm{d}(a, b)$.

2- Exemples

❑ Soit E un ensemble. Posons $\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$. On définit ainsi une distance sur E appelée **distance discrète**. E s'appelle **espace discret**.

❑ La **droite achevée** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un espace métrique avec la distance :

$$\mathrm{d}(x, y) = \left|\arctan(y) - \arctan(x)\right|$$

en convenant que $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

❑ Soit p un nombre premier. On appelle ***p*-valuation** d'un rationnel non nul x l'entier (noté $v(x)$) tel que $x = p^{v(x)} \frac{a}{b}$ avec a et b entiers non divisibles par p. On posera par convention $v(0) = +\infty$. Par exemple, si $p = 2$, la valuation de $\frac{24}{5}$ est 3, celle de $\frac{7}{13}$ est 0, celle de $\frac{11}{12}$ est -2. Il n'est pas difficile de vérifier que l'application v satisfait les propriétés suivantes, pour des rationnels x et y quelconques :

(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$

(ii) $v(\frac{1}{x}) = -v(x)$

(iii) $v(\frac{x}{y}) = v(x) - v(y)$

(iv) $v(x + y) \geq \mathrm{Min}\{v(x),v(y)\}$ avec égalité si $v(x) \neq v(y)$

Pour la relation (iv), la moins évidente, écrivons que $x = p^{v(x)} \frac{a}{b}$, $y = p^{v(y)} \frac{c}{d}$, avec a, b, c, d entiers non divisibles par p, et supposons par exemple $v(x) \geq v(y)$. On a :

$$x + y = p^{v(y)}(p^{v(x)-v(y)} \frac{a}{b} + \frac{c}{d}) = p^{v(y)} \frac{p^{v(x)-v(y)} a + bc}{bd}$$

avec bd non divisible par p. Le numérateur est éventuellement divisible par p donc $v(x + y) \geq v(y)$, mais c'est impossible si $v(x) > v(y)$ car sinon, cela signifierait que bc (et donc b ou c) est divisible par p. La valuation v permet de définir une **valeur absolue *p*-adique** φ en posant $\varphi(x) = \frac{1}{2^{v(x)}}$. φ vérifie les propriétés suivantes :

$\varphi \geq 0$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$

$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

$\varphi(x + y) \leq \text{Max}\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

On pose enfin $d(x,y) = \varphi(x - y)$. d est une distance sur $\mathbb{Q}$ appelée **distance *p*-adique**. Pour cette distance, x est d'autant plus petit qu'il est divisible par une puissance élévée de p. Ainsi, $d(0, p) = \frac{1}{2}$, $d(0, p^2) = \frac{1}{4}$ alors que, pour tout entier n non divisible par p, $d(0, n) = 1$. Plus généralement, pour tout rationnel x dont le numérateur ni le dénominateur n'est divisible par p, $d(0, x) = 1$. Ainsi, pour la distance d, p est plus petit que tous ces rationnels. On peut donc interpréter p comme étant un infiniment petit, p^2 un infiniment petit d'ordre supérieur, etc. Plus amusant, $\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$ donc $\sum_{k=0}^{n} p^k - \frac{1}{1-p} = \frac{p^{n+1}}{p-1}$, donc $d(\sum_{k=0}^{n} p^k, \frac{1}{1-p}) = \frac{1}{2^{n+1}}$. En particulier, $\lim_{n\to\infty} d(\sum_{k=0}^{n} p^k, \frac{1}{1-p}) = 0$. Autrement dit, pour la distance p-adique, la série $\sum p^n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1}{1-p}$.

❑ Soient $a < b$ et $E = C^0([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$. Il est possible de définir une distance d sur E telle que, une suite (f_n) de fonctions et une fonction f étant données, on ait $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) \Leftrightarrow (f_n)$ converge vers f uniformément. Il suffit de poser :

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = \| f - g \|_\infty$$

On peut montrer qu'il n'est pas possible de définir une distance d' sur E telle que $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) \Leftrightarrow (f_n)$ converge vers f simplement.

❑ Une partie A d'un espace métrique est lui-même un espace métrique en restreignant d à la partie $A \times A$.

3- Boules, ouverts, fermés

On définit dans un espace métrique (E, d) les mêmes notions vues dans les espaces vectoriels normés, qu'on rappelle rapidement ci-dessous.

On appelle **boule** (ouverte) $B(x, R)$ de centre x de rayon R l'ensemble $\{y \mid d(x, y) < R\}$.

EXEMPLE :

❑ Dans le cas de la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$, une boule centrée en $+\infty$ est un intervalle de la forme $]a, +\infty]$.

Une suite (a_n) de E converge vers une limite l si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, l)$, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, d(a_n, l) < \varepsilon$$

ou de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, a_n \in B(l, \varepsilon)$$

A est une **partie bornée** de E si elle est contenue dans une boule. Le **diamètre** d'une telle partie est le nombre $\text{diam}(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A\times A} d(x, y)$.

Un élément x d'une partie A de E est dit **intérieur** à A s'il existe une boule $B(x, R)$ de rayon strictement positif incluse dans A. Si x est intérieur à A et si (a_n) est une suite convergeant vers x, alors, $\exists N, \forall n \geq N, a_n \in A$. Prendre n assez grand pour que $a_n \in B(x, R)$. On appelle **intérieur** de A noté $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
Une partie U de E est un **ouvert** si, pour tout point x de U, il existe une boule centrée en x incluse dans U. Autrement dit, U est ouvert si et seulement si tout point de U est intérieur à U, ou encore si et seulement si $U = \overset{\circ}{U}$.

PROPRIETES DES OUVERTS

i) *E et ∅ sont ouverts*
ii) *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
iii) *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

<u>Démonstration</u> :
❑ i) évident pour E. En ce qui concerne ∅, il est impossible de trouver un élément x qui contredise la propriété d'être intérieur à ∅, donc ∅ est ouvert !

❑ ii) Soit $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ une réunion d'ouverts et x un élément quelconque de cette réunion. Il existe i tel que x soit élément de O_i, et O_i contient une boule centrée en x. Il en est donc de même de la réunion.

❑ iii) Soit $\bigcap\limits_{i\in I} O_i$ une intersection d'ouverts et x élément quelconque de cette intersection. Pour chaque i, il existe R_i tel que $B(x, R_i) \subset O_i$. Les R_i, **étant en nombre fini**, possèdent un minimum R. On a alors $B(x, R) \subset O_i$ pour tout i, donc $B(x, R) \subset \bigcap\limits_{i\in I} O_i$.

DEFINITION-PROPOSITION
Un point x de E *est dit* **adhérent** *à une partie* A *de* E *s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes* :

(i) $\forall R > 0, B(x, R) \cap A \neq \varnothing$
(ii) *Il existe une suite* (a_n) *d'éléments de* A *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$ (*caractérisation séquentielle des points adhérents*).

Démonstration

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) se montre en prenant $R = \dfrac{1}{n}$ et a_n élément de $B(x, \dfrac{1}{n}) \cap A$.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte du fait que, si (a_n) converge vers x, $a_n \in B(x, R)$ pour n assez grand.

On appelle **adhérence** de A, notée $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

A est un **fermé** si tout point adhérent à A appartient à A, autrement dit si $A = \overline{A}$.

PROPOSITION

Soit F *une partie de* E. *Il y a équivalence entre :*

i) F *est fermé*

ii) F *est le complémentaire d'un ouvert*

Démonstration :

❑ i) $\Rightarrow$ ii) : Supposons que tout point adhérent à F appartient à F. Soit x élément de F^c, (où F^c désigne le complémentaire de F). Alors x n'appartient pas à F, donc x n'est pas adhérent à F, donc :

$$\exists R > 0, B(x,R) \cap F = \varnothing$$

ce qui signifie que $B(x,R) \subset F^c$. Donc x est intérieur à F^c. x étant quelconque dans F^c, cela montre que F^c est ouvert.

❑ ii) $\Rightarrow$ i) : Supposons que $U = F^c$ soit ouvert, et soit x adhérent à F. Alors, pour tout $R > 0$, $B(x, R) \cap F \neq \varnothing$ de sorte que $B(x, R)$ n'est jamais inclus dans U, et donc x n'est pas intérieur à U, donc x n'appartient pas à U. (U étant ouvert, si x était élément de U, il serait intérieur à U). Puisque x n'appartient pas à U, alors x appartient à F. On a montré que tout point adhérent à F est élément de F, donc F est fermé.

PROPRIETES DES FERMES

i) $\varnothing$ *et E sont des fermés.*

ii) *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

iii) *Une réunion finie de fermés est un fermé.*

Démonstration :

❑ Les propriétés i), ii), iii) résultent des propriétés des ouverts par passage au complémentaire.

Une partie A est **dense** dans E si l'adhérence de A est égale à E.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On appelle **frontière** de A, notée Fr(A), l'ensemble des points qui sont adhérents à la fois à A et à A^c.

EXEMPLES :

❑ Une boule ouverte est un ouvert. En effet, soit $B(x_0, R)$ une boule ouverte, et soit $x \in B(x_0, R)$. Alors $d(x, x_0) < R$. Posons $R' = R - d(x_0, x)$. On a $R' > 0$. Au moyen de l'inégalité triangulaire, il n'est pas difficile de montrer que $B(x, R')$ est incluse dans $B(x_0, R)$:

$$y \in B(x, R') \Leftrightarrow d(y, x) < R' \Rightarrow d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < R' + d(x, x_0) = R$$

❑ Soit $B_f(x_0, R) = \{y \mid d(x_0, y) \leq R\}$ la **boule fermée** de centre x_0 et de rayon R. C'est un fermé. Montrons que son complémentaire est ouvert. Soit x tel que $d(x, x_0) > R$. Posons $R' = d(x, x_0) - R$. On a $R' > 0$. Vérifions que $B(x, R') \subset B_f(x_0, R)^c$ ou encore que $B(x, R') \cap B_f(x_0, R) = \emptyset$. Par l'absurde, si on avait un élément $y \in B(x, R') \cap B_f(x_0, R)$, on aurait :

$$d(x, y) < R'$$
$$d(x_0, y) \leq R$$

ce qui est impossible car $d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < R' + R = d(x, x_0)$.

❑ Dans un espace métrique, tout singleton $\{x\}$ est un fermé. En effet, $\{x\}$ est l'intersection des boules fermées $B_f(x, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbf{N}^*$, puisque, si y appartient à cette intersection, alors, pour tout n, $d(x, y) \leq \frac{1}{n}$, donc $d(x, y) = 0$ donc $y = x$. Comme une intersection quelconque de fermés est un fermé, $\{x\}$ est un fermé.
On peut dire aussi que $\{x\} = B_f(x, 0)$.

❑ Soit E un espace muni de la distance discrète. Alors, pour tout x de E, la boule ouverte $B(x, 1)$ est réduite au singleton $\{x\}$. $\{x\}$ est donc ouvert. Toute partie de E est donc ouverte comme réunion des ouverts formés des singletons constitués de ses éléments. Par complémentaire, toute partie de E est fermée. Toute partie de E est donc égale à son adhérence et à son intérieur. La frontière de toute partie A est vide, puisqu'égale à l'intersection de l'adhérence de A et de l'adhérence de son complémentaire, i.e. égale à l'intersection de A et de son complémentaire.

❑ Soit E l'espace vectoriel des fonctions bornées sur un intervalle $I = [a, b]$, muni de la norme :

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

et soit F le sous-espace vectoriel des fonctions continues. On dispose du théorème suivant : si une suite (f_n) de fonctions continues sur I converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue sur I. Ce théorème énonce le fait que, si f est adhérent à F, alors f appartient à F. Autrement dit, F est fermé dans E.

❑ $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

❑ Sur tout intervalle $[a, b]$, l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ pour la convergence uniforme. C'est le **théorème de Weierstrass**, démontré en annexe de ce chapitre ou en exercice du chapitre L2/EVNORME.PDF.

4- Limites et continuité

Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$ une fonction d'un espace métrique dans un autre. Il est possible que f ne soit pas défini sur E tout entier. On notera alors D l'ensemble de définition de f. On définit les notions de limite et de continuité comme pour une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, mais en remplaçant la valeur absolue par les distances de E et F respectivement. Ainsi, pour a adhérent à D et l dans F, la **limite** de f en a est définie par :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in B(a, \alpha) \cap D, f(x) \in B(l, \varepsilon)$$

On prend a adhérent à D pour qu'il y ait effectivement des x dans $B(a, \alpha) \cap D$.

Cette notion présente essentiellement un intérêt si a n'appartient pas à D. En effet, si a appartient à D, comme a appartient à toute boule $B(a, \alpha) \cap D$, on devra avoir $f(a)$ élément de toute boule $B(l, \varepsilon)$, ce qui ne peut se produire que si $l = f(a)$. On dit que f est **continue** en $a \in D$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. On dispose d'une caractérisation séquentielle de la limite, permettant de se ramener à l'étude de suites :

PROPOSITION
Il y a équivalence entre :

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = l$

(ii) $\forall (x_n)$ *suite de* D, $\lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit (x_n) une suite de D telle que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x \to a} f(x) = l$, on a donc :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in D, d(x, a) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), l) < \varepsilon$$

Comme $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, pour cet α, on a :

$$\exists N, \forall n \geq N, d(x_n, a) < \alpha$$

donc $\forall n \geq N, \delta(f(x_n), l) < \varepsilon$

On a montré que : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \delta(f(x_n), l) < \varepsilon$, et donc que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Par l'absurde, si (i) n'est pas réalisé, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in D, d(x, a) < \alpha \text{ et } \delta(f(x), l) \geq \varepsilon$$

Prenons $\alpha = \frac{1}{n}$, pour n entier strictement positif. $\exists x_n \in D, d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), l) \geq \varepsilon$. On a donc $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, mais pas $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$, contrairement à ce que dit l'hypothèse (ii).

f est **continue sur E** si f est continue en tout point a de E, autrement dit :

$$\forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in B(a, \alpha), f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

Notons que, a priori, α dépend de a (et de ε).

$f : E \to F$ est un **homéomorphisme** si f est bijective, continue et si f^{-1} est continue. E et F sont dits **homéomorphes**.

PROPOSITION
Soit $f : E \to F$ *une application. Il y a équivalence entre :*

(i) *f est continue*

(ii) *pour tout ouvert* O *de* F, $f^{-1}(O)$ *est un ouvert de* E

(iii) *pour tout fermé* V *de* F, $f^{-1}(V)$ *est un fermé de* E

Nous supposons ici f définie sur E tout entier.

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons f continue. Soit O ouvert de F et $a \in f^{-1}(\text{O})$. On a donc $f(a) \in \text{O}$, et comme O est ouvert, $\exists\ \varepsilon > 0$, $\text{B}(f(a), \varepsilon) \subset \text{O}$. Comme f est continue en a, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et donc :

$\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in \text{B}(a, \alpha), f(x) \in \text{B}(f(a), \varepsilon)$

donc $\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in \text{B}(a, \alpha), f(x) \in \text{O}$

donc $\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in \text{B}(a, \alpha), x \in f^{-1}(\text{O})$

donc $\exists\ \alpha > 0, \text{B}(a, \alpha) \subset f^{-1}(\text{O})$

ce qui prouve que $f^{-1}(\text{O})$ est ouvert.

❑ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : L'équivalence repose sur le fait que le complémentaire d'un fermé est un ouvert et le fait que, pour toute partie A de F, $f^{-1}(\text{A}^c) = f^{-1}(\text{A})^c$. En effet, les éléments x de ces deux parties vérifient exactement $f(x) \notin \text{A}$. Par exemple, (iii) $\Rightarrow$ (ii) se montre ainsi. Soit O ouvert de F. Alors O^c est un fermé de F donc $f^{-1}(\text{O}^c)$ fermé de E d'après (iii), donc $f^{-1}(\text{O})^c$ fermé de E, donc $f^{-1}(\text{O})$ ouvert de E. On montre de même (ii) $\Rightarrow$ (iii)

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $a \in \text{E}$. Montrons que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. $\text{B}(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert. Donc $f^{-1}(\text{B}(f(a), \varepsilon))$ aussi. Mais $f^{-1}(\text{B}(f(a), \varepsilon))$ possède a. Donc $\exists\ \alpha > 0$, $\text{B}(a, \alpha) \subset f^{-1}(\text{B}(f(a), \varepsilon))$. Cette inclusion est équivalente à :

$\exists\ \alpha > 0, \forall\ x \in \text{B}(a, \alpha), f(x) \in \text{B}(f(a), \varepsilon)$

ce qui prouve la continuité de f en a.

Une fonction $f : (\text{E}, \text{d}) \to (\text{F}, \delta)$ est **uniformément continue** si :

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, \forall\ a, \forall\ x \in \text{B}(a, \alpha), f(x) \in \text{B}(f(a), \varepsilon)$

La différence avec la continuité est que α ne dépend pas de a. On peut écrire la définition précédente sous la forme plus symétrique suivante :

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0, \forall\ (x, y) \in \text{E} \times \text{E}, \text{d}(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Une fonction $f : \text{E} \to \text{F}$ est **lipschitzienne** si :

$\exists\ k, \forall\ (x, y) \in \text{E} \times \text{E}, \delta(f(x), f(y)) \le k\, \text{d}(x, y)$

Toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue. Il suffit, pour chaque ε, de prendre $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$. L'uniforme continuité est une variante affaiblie du caractère lipschitzien.

$f : (\text{E}, \text{d}) \to (\text{F}, \delta)$ est une **isométrie** si : $\forall\ (x, y) \in \text{E} \times \text{E}$, $\delta(f(x), f(y)) = \text{d}(x, y)$. f est alors lipschitzienne de rapport 1 de E sur $f(\text{E})$, bijective de E sur $f(\text{E})$ (car $\delta(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow \text{d}(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$) et sa réciproque $f^{-1} : f(\text{E}) \to \text{E}$ est aussi lipschitzienne de rapport 1.

EXEMPLES :

❑ $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet :

$|x^2 - y^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - y|\,|x + y| < \varepsilon$

or si cette inégalité était vérifiée pour tout x et y tels que $|x - y| < \alpha$ pour un certain α, elle serait vraie pour tout x et y tels que $|x - y| = \dfrac{\alpha}{2}$ et l'on aurait alors $|x + y| < \dfrac{2\varepsilon}{\alpha}$ borné. Mais $|x + y|$ n'est pas borné.

❑ Pour tout $a > 0$, $f(x) = \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$. En effet :

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{|x-y|}{2a}$$

Elle n'est pas lipschitienne sur [0, +∞[puisque $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ n'est pas borné sur cet intervalle, mais il s'en faut de peu. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \geq y \geq 0$, on a :

$$0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \varepsilon + \frac{x-y}{4\varepsilon}$$

car cette inégalité est équivalente à $4\varepsilon^2 - 4\varepsilon(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + x - y \geq 0$, et on a bien :

$$\begin{aligned} 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + x - y &= (2\varepsilon - (\sqrt{x} - \sqrt{y}))^2 + x - y - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \\ &= (2\varepsilon - (\sqrt{x} - \sqrt{y}))^2 + 2\sqrt{xy} - 2y \geq 0 \end{aligned}$$

L'inégalité $0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \varepsilon + \dfrac{x-y}{4\varepsilon}$ permet d'ailleurs de montrer que f est uniformément continue sur [0, +∞[, car si on prend $\alpha = 4\varepsilon^2$, on obtient :

$$0 \leq x - y < \alpha \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq 2\varepsilon$$

II : Espaces complets

Ce paragraphe vise à généraliser aux espaces métriques la situation de $\mathbb{R}$ vis-à-vis de $\mathbb{Q}$. Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge, ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{Q}$.

1- Définition

DEFINITION

On dit qu'une suite (x_n) *d'un espace métrique* (E, d) est *une suite de Cauchy si* :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \geq N, \forall\ p \geq N, d(x_n, x_p) < \varepsilon$$

PROPOSITION

Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration :

❑ Soit l la limite d'une suite convergente (x_n). Alors :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \geq N, d(x_n, l) < \varepsilon$$

On a alors, pour $n \geq N$ et $p \geq N$:

$$d(x_n, x_p) \leq d(x_n, l) + d(l, x_p) < 2\varepsilon$$

On a donc :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \geq N, \forall\ p \geq N, d(x_n, x_p) < 2\varepsilon$$

La conclusion étant vraie pour tout ε, on peut l'appliquer à $\dfrac{\varepsilon}{2}$:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \geq N, \forall\ p \geq N, d(x_n, x_p) < \varepsilon$$

La réciproque n'est pas toujours vraie. Elle a été prouvée dans le chapitre L1/SUITES.PDF en ce qui concerne les suites réelles et complexes, d étant la valeur absolue ou le module, et dans le chapitre L2/EVNORME.PDF en ce qui concerne les suites d'un espace vectoriel normé **de dimension finie** sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme étant quelconque.

DEFINITION

On dit que l'espace métrique (E, d) *est* **complet** *si toute suite de Cauchy de* E *est convergente.*

Ainsi, $(\mathbf{R}, | \ |)$, $(\mathbf{C}, | \ |)$, $(\mathbf{R}^n, \| \ \|)$ et $(\mathbf{C}^n, \| \ \|)$ sont complets. L'intérêt d'un espace complet est qu'on peut établir la convergence d'une suite sans aucune connaissance de sa limite en vérifiant qu'elle est de Cauchy. La propriété d'être complet est intimement liée à la distance. Ainsi, si, dans $\mathbf{R}$, on prend la distance d définie par $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ pour laquelle les ouverts sont identiques à ceux définis par la valeur absolue, alors la suite $(n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy pour d, mais ne converge pas dans $\mathbf{R}$. Elle n'est pas de Cauchy pour la valeur absolue. Elle converge vers $+\infty$ dans la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ dont on montrera plus loin qu'il est complet. Lorsqu'on utilisera des parties de $\mathbf{R}$, on sous-entendra systématiquement que la distance utilisée est la valeur absolue.

2- Propriétés

PROPOSITION

(i) *Si* A *est une partie fermée d'un espace* E *complet, alors* A *est complet.*

(ii) *Si* A *est un espace complet inclus dans un espace métrique* E*, alors* A *est fermé.*

(iii) *Si* (a_n) *est une suite de Cauchy de* E *métrique quelconque et* $f : (E, d) \to (F, \delta)$ *une application uniformément continue, alors* $(f(a_n))$ *est une suite de Cauchy de* F.

(iv) *Soit* A *une partie d'un espace métrique* (E, d), (F, δ) *un espace métrique complet et* $f : A \to F$ *une application uniformément continue. Alors* f *se prolonge de façon unique en une application continue* $\overline{f} : \overline{A} \to F$ *et ce prolongement est lui-même uniformément continu. Si* f *est k-lipschitzienne, alors* $\overline{f}$ *également. Si* f *est une isométrie,* $\overline{f}$ *également.*

(v) Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides d'un espace complet* E*, telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$*. Alors il existe* x *élément de* E *tel que* $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n = \{x\}$.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Soit A une partie fermée d'un espace complet E et soit (x_n) une suite de Cauchy de A. Alors c'est une suite de Cauchy de E, donc elle converge vers un élément l de E. l étant limite d'une suite de A est adhérent à A. A étant fermé, l appartient à A. On a montré que toute suite de Cauchy de A converge dans A, donc A est complet.

❑ (ii) : Soit A complet inclus dans un espace métrique E et soit l adhérent à A. Alors l est limite d'une suite (x_n) de A. La suite étant convergente, elle est de Cauchy. Etant une suite de Cauchy de A complet, elle converge dans A. Donc l est élément de A, et A est fermé.

❑ (iii) : Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue :

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(a_n) étant une suite de Cauchy :

$$\exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, d(a_n, a_p) < \alpha.$$

Donc :

$$\exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \delta(f(a_n), f(a_p)) < \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite $(f(a_n))$ est de Cauchy.

❑ (iv) : Soit x adhérent à A. Si (a_n) est une suite de A convergeant vers x et si on souhaite que le prolongement $\overline{f}$ de f soit continu, il est nécessaire que $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$, ce qui prouve l'unicité de $\overline{f}$. Encore faut-il prouver que la suite $(f(a_n))$ converge pour justifier l'existence de $\overline{f}$. Soit donc (a_n) une suite de A convergeant vers x. Donc (a_n) est de Cauchy. f étant uniformément continue, la suite $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy de F, et F étant complet, cette suite converge vers une limite l. Cette limite ne dépend que de x et pas de la suite (a_n) choisie pour converger vers x. Car si (b_n) est une autre suite convergeant vers x, alors, par le même raisonnement, $(f(b_n))$ convergera vers une limite l', mais la suite $(a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...)$ converge vers x donc $(f(a_0), f(b_0), ..., f(a_n), f(b_n), ...)$ converge également, ce qui impose que $l = l'$. Posons $\overline{f}(x)$ égale à cette limite.

$\overline{f}$ est un prolongement de f à $\overline{A}$ puisque que, si x appartient à A, on peut prendre $a_n = x$ pour tout n, de sorte que $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x)$.

$\overline{f}$ est uniformément continue car soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Soient x et y éléments de $\overline{A}$ tels que $d(x, y) < \alpha$. Soit (x_n) est une suite de $\overline{A}$ convergeant vers x et (y_n) une suite de A convergeant vers y.
Comme $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y) < \alpha$, $\exists$ N, $n \geq N$, $d(x_n, y_n) < \alpha$. On a alors $\delta(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$, et comme $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{f}(x)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \overline{f}(y)$, on a, en passant à la limite $\delta(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \leq \varepsilon$. On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) \leq \varepsilon$$

et $\overline{f}$ est uniformément continue.
Si f est k-lipschitzienne, alors, avec les mêmes notations que ci-dessus :

$$\delta(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) = \lim_{n\to\infty} \delta(f(x_n), f(y_n)) \leq \lim_{n\to\infty} k\, d(x_n, y_n) = k\, d(x, y)$$

ce qui prouve que $\overline{f}$ est k-lipschitzienne.
Si f est une isométrie de E sur f(E), alors :

$$\delta(\overline{f}(x), \overline{f}(y)) = \lim_{n\to\infty} \delta(f(x_n), f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

et $\overline{f}$ est une isométrie de E sur $\overline{f}$(E).

(v) Pour chaque n, on prend un x_n dans F_n. Puisque la suite des F_n est décroissante, on a :

$$\forall p, \forall n \geq p, x_n \in F_p \qquad \text{car } F_n \subset F_p$$

La suite (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\text{diam}(F_N) < \varepsilon$ (un tel N existe car $\lim\limits_{n\to\infty} \text{diam}(F_n) = 0$). Pour $n \geq N$ et $p \geq N$, $x_n \in F_N$ et $x_p \in F_N$ donc $d(x_n, x_p) \leq \text{diam}(F_N) < \varepsilon$. E étant complet, cette suite converge vers une limite x. Pour tout p, $x_n \in F_p$ dès que $n \geq p$, donc x est la limite d'une suite de F_p. F_p étant fermé, $x \in F_p$. Ainsi, $x \in \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} F_p$. Il n'y a pas d'autre élément dans cet intersection, car si x et y y appartienne, alors, pour tout n, $d(x, y) \leq \text{diam}(F_n)$. Comme $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$, on a $d(x, y) = 0$ donc $x = y$.

L'hypothèse $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(F_n)$ est essentielle. La conclusion peut être fausse si elle est omise. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les $F_n = [n, +\infty[$ forment une suite décroissante de fermés non vide d'intersection vide.

EXEMPLES :

❑ Pour tout a, b, $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[b, +\infty[$ sont complets, comme espaces fermés inclus dans l'espace complet $(\mathbb{R}, | \ |)$.

❑ Tout sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace normé E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension quelconque est fermé. En effet, F étant de dimension finie est un espace complet.

❑ Soit (Y, d) un espace métrique complet et X un ensemble quelconque. Soit $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans Y muni de la distance :

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), f(y))$$

Alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est complet. En effet, si (f_n) est une suite de Cauchy pour δ, alors, pour tout x de X, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de Y, donc converge vers un élément qu'on notera $f(x)$. (f_n) converge ainsi simplement vers f. f est borné car :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \delta(f_n, f_p) < \varepsilon$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f_p(x)) < \varepsilon$

donc, en faisant tendre p vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

donc, pour ε donné, f_N étant bornée, si les $f_N(x)$ appartiennent tous à une boule $B(a, R)$, alors les $f(x)$ appartiennent tous à $B(a, R + \varepsilon)$. De plus, l'inégalité précédente entraîne :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \delta(f_n, f) \leq \varepsilon$$

donc (f_n) converge vers f pour la distance δ. δ est la distance de la convergence uniforme. On retrouve la notion de convergence uniforme sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ en prenant $X = I$, $Y = \mathbb{R}$.

❑ Soit (Y, d) un espace métrique complet et X un espace topologique. Soit $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de X dans Y muni de la distance :

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), f(y))$$

Alors $\mathcal{C}(X, Y)$ est complet. En effet, ayant montré précédemment que $\mathcal{B}(X, Y)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{C}(X, Y)$ est une partie fermée de $\mathcal{B}(X, Y)$. Il s'agit de montrer que tout f adhérent de $\mathcal{C}(X, Y)$ est élément de $\mathcal{C}(X, Y)$. Comme cette espace est métrique, on peut utiliser la caractérisation séquentielle des points adhérents. Il s'agit alors de montrer que, si (f_n) est une suite de fonctions continues (bornées) sur X convergeant uniformément vers f, alors f est continue. C'est une généralisation du théorème relatif aux suites de fonctions numériques, vu dans le chapitre L2/SUITESF.PDF. Soit U un ouvert quelconque de Y. Il s'agit de montrer que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X. Soit donc $x \in f^{-1}(U)$ et donc $f(x) \in U$. Comme U est ouvert, $\exists r > 0$, $B(f(x), r) \subset U$. Comme (f_n) converge uniformément vers f, on a :

$$\exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, z \in X, d(f_n(z), f(z)) < \frac{r}{3}$$

donc $\forall\, z \in X$, $d(f_N(z), f(z)) < \frac{r}{3}$ et en particulier $d(f_N(x), f(x)) < \frac{r}{3}$. Comme f_N est continue en x :

$$\exists\, V \text{ voisinage de } x, \forall\, z \in V, d(f_N(z), f_N(x)) < \frac{r}{3}$$

On a alors :

$$\forall\, z \in V, d(f(z), f(x)) \leq d(f(z), f_N(z)) + d(f_N(z), f_N(x)) + d(f_N(x), f(x))$$
$$< \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r$$

donc $\forall\, z \in V$, $f(z) \in B(f(x), r) \subset U$, donc $V \subset f^{-1}(U)$. On a donc montré que $f^{-1}(U)$ est un voisinage de chacun de ses points x, donc que c'est un ouvert. f est donc continue.

❑ Dans l'espace vectoriel des fonctions bornées d'un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, on considère A le sous-espace vectoriel des fonctions en escaliers. L'adhérence de A constitue un sous-espace vectoriel appelé sous-espace vectoriel des **fonctions réglées** sur $[a, b]$. Ce sous-espace vectoriel contient en particulier le sous-espace vectoriel des fonctions continues, car une fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers. L'intégrale est une application de A dans $\mathbb{R}$, lipschitzienne, facilement définie pour une fonction en escalier. Cette intégrale se prolonge donc en une application unique de l'espace des fonctions réglées dans $\mathbb{R}$, également appelée intégrale. De plus, si (f_n) est une suite de fonction en escalier convergeant uniformément vers f, l'intégrale des f_n converge vers l'intégrale de f.
Cette démarche est l'une des voies classiques pour définir ce qu'est l'intégrale de Riemann d'une fonction réglée.

3- Le théorème du point fixe

DEFINITION

Soit (E, d) *un espace métrique. Une application* $f : E \to E$ *est dite* **contractante** *si elle est lipschizienne de rapport* $k < 1$.

Autrement dit :

$$\exists\, k < 1, \forall\, (x, y) \in E^2, d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$$

THEOREME DU POINT FIXE

Soit (E, d) *un espace complet et* f *une application contractante de* E *dans* E. *Alors* f *possède un unique* **point fixe** x *vérifiant* $f(x) = x$, *et toute suite récurrente définie par la relation* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers ce point fixe.*

<u>Démonstration</u> :

❑ L'unicité du point fixe se montre comme suit. Soient x et y deux points fixes. Alors :

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$$

or $k < 1$, donc $d(x, y) = 0$ et $x = y$.

❑ Montrons maintenant l'existence du point fixe. Soit une suite (x_n) définie par la récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. On a :

$$\forall\, n \geq 1, d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k\, d(x_n, x_{n-1})$$
$$\forall\, n \geq 0, d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n\, d(x_1, x_0) \qquad \text{(récurrence facile en utilisant l'inégalité précédente)}$$

$$\forall\, n \geq p,\ \mathrm{d}(x_p, x_n) \leq \sum_{r=p}^{n-1} d(x_r, x_{r+1}) \qquad \text{(par inégalités triangulaires)}$$

$$\leq \sum_{r=p}^{n-1} k^r\, d(x_1, x_0) = k^p\, \frac{1-k^{n-p}}{1-k}\, \mathrm{d}(x_1, x_0) \leq \frac{k^p}{1-k}\, d(x_1, x_0)$$

ce qui permet de prouver que la suite (x_n) est de Cauchy, car $\lim_{p\to\infty} k^p = 0$. Donc elle converge vers un élément x de E car E est complet. En passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $x = f(x)$ donc x est un point fixe de f.
De plus, en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$d(x_p, x) \leq \frac{k^p}{1-k}\, d(x_1, x_0)$$

ce qui permet de majorer l'erreur qu'on commet prenant x_p comme valeur approchée de x.

EXEMPLES :

❑ Le théorème s'applique aux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ C^1, dont la dérivée est majorée en valeur absolue par $k < 1$. Ces fonctions sont en effet contractantes d'après l'inégalité des accroissements finis.
Il ne suffit pas d'avoir : $\forall\, x \in \mathbf{R}$, $|f'(x)| < 1$, ni $\forall\, x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Prendre f définie par $f(x) = x + e^{-x}$. On a $f'(x) = 1 - e^{-x} < 1$ et l'égalité des accroissements finis permet de dire que :

$$\forall\, x \neq y,\ |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Or f n'admet aucun point fixe.

❑ **Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz dans un cas particulier**. On considère un intervalle de la forme $[0, a]$ contenant 0. Soit l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec la condition initiale $y(0) = 0$, où f est une fonction continue définie sur $[0, a] \times \mathbf{R}$ et vérifiant la condition :

$$\exists\, \mathrm{K},\ \forall\, t \in [0, a],\ \forall\, y \in \mathbf{R},\ \forall\, z \in \mathbf{R},\ |\, f(t, y) - f(t, z)\, | \leq \mathrm{K}\, |y - z|$$

Autrement dit, pour tout t fixé, la fonction $y \to f(t, y)$ est K-lipschitzienne, K ne dépendant pas de t.
On note E l'espace $C^0([0, a])$. Une fonction continue $t \to y(t)$ est solution de l'équation différentielle $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ sur $[0, a]$ si et seulement si, pour tout t de $[0, a]$:

$$y(t) = \int_0^t y'(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^t f(s, y(s))\, \mathrm{d}s.$$

On définit l'application Φ de E dans E en associant à toute fonction y de E, la fonction $\Phi(y)$ telle que, pour tout t élément de $[0, a]$, $\Phi(y)(t) = \int_0^t f(s,y(s))\, \mathrm{d}s$. Résoudre l'équation différentielle avec sa condition initiale revient à chercher y telle que $\Phi(y) = y$. Autrement dit, on recherche un point fixe de la fonction Φ. Pour tout y de E, on pose $\| y \| = \underset{t\, \in\, [0,b]}{\mathrm{Max}}\ e^{-2\mathrm{K}t}\, |y(t)|$. Il s'agit d'une norme sur E.
Pour cette norme, on a :

$$\forall\, (y, z) \in \mathrm{E}^2,\ \| \Phi(y) - \Phi(z) \| \leq \frac{1}{2}\, \| y - z \|$$

En effet, pour tout t :

$$\left|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\right| = \left|\int_0^t f(s, y(s))\,ds - \int_0^t f(s, z(s))\,ds\right|$$
$$= \left|\int_0^t f(s, y(s)) - f(s, z(s))\,ds\right|$$
$$\leq \int_0^t \left|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\right|\,ds$$
$$\leq \int_0^t K\left|y(s) - z(s)\right|\,ds \leq \| y - z \| \int_0^t Ke^{2Ks}\,ds$$
$$\leq \frac{1}{2} \| y - z \| e^{2Kt}$$

donc $\forall\, t,\ e^{-2Kt}\left|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)\right| \leq \frac{1}{2} \| y - z \|$

donc $\| \Phi(y) - \Phi(z) \| \leq \frac{1}{2} \| y - z \|$.

Φ est donc contractante. On montre que E est complet (voir en exercice), donc Φ admet un unique point fixe. Ainsi, l'équation différentielle avec sa condition initiale admet une solution unique.
Par exemple, pour $y' = y + 1$, et $y(0) = 0$, définissons la suite de fonctions $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = \Phi(y_n)$. On a :

$$y_{n+1}(t) = \Phi(y_n)(t) = \int_0^t y_n(s) + 1\,ds$$
$$= t + \int_0^t y_n(s)\,ds$$

alors par récurrence : $y_n(t) = t + ...+ \frac{t^n}{n!}$ qui tend vers $e^t - 1$, solution de l'équation différentielle.

4- Complété d'un métrique

PROPOSITION

Soit (E, d) *un espace métrique. Il existe alors un espace unique* (*à isométrie près*) *métrique complet* $(\hat{E}, \delta)$ *tel que :*

(i) *il existe une injection* $j : E \to \hat{E}$

(ii) $j(E)$ *est dense dans* $\hat{E}$

(iii) *Pour tout* x *et* y *de* E, $d(x, y) = \delta(j(x), j(y))$

(iv) *Si* E *est lui-même complet,* $\hat{E} = E$.

Démonstration :

❑ *Définition de l'espace* $\hat{E}$:

Sur l'ensemble des suites de Cauchy sur E, définissons une relation $\mathcal{R}$:

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\ \mathcal{R}\ (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$$

Vérifions qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Elle est évidemment réflexive et symétrique, et la transitivité résulte de l'inégalité triangulaire : $d(a_n, c_n) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, c_n)$.

Définissons $\hat{E}$ comme l'ensemble quotient de l'ensemble des suites de Cauchy par cette relation d'équivalence. Un élément de $\hat{E}$ est une classe d'équivalence $\hat{a}$ dont un représentant est une suite de Cauchy (a_n) de E.

❑ *Définition de la distance* δ :

Si $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont deux éléments de $\hat{E}$, représentés par les suites de Cauchy (a_n) et (b_n), définissons :

$$\delta(\hat{a}, \hat{b}) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$$

Cette limite existe car la suite réelle $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. En effet, pour tout n et tout p :

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a_p) + d(a_p, b_p) + d(b_p, b_n)$$

donc $\quad d(a_n, b_n) - d(a_p, b_p) \leq d(a_n, a_p) + d(b_p, b_n)$

et de même :

$$d(a_p, b_p) - d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a_p) + d(b_p, b_n)$$

donc $\quad \left| d(a_n, b_n) - d(a_p, b_p) \right| \leq d(a_n, a_p) + d(b_p, b_n)$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists$ N, $\forall\, n \geq$ N, $\forall\, p \geq$ N, $d(a_n, a_p) + d(b_p, b_n) < \varepsilon$ car (a_n) et (b_n) sont de Cauchy.

Donc $\exists$ N, $\forall\, n \geq$ N, $\forall\, p \geq$ N, $\left| d(a_n, b_n) - d(a_p, b_p) \right|$. Ainsi, la suite $(d(a_n, b_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, donc elle converge.

Par ailleurs, sa limite ne dépend pas du représentant choisi pour $\hat{a}$ et $\hat{b}$ car si (a_n') et (b_n') sont des suites de Cauchy $\mathcal{R}$-équivalentes à (a_n) et (b_n) et que l'on a, pour tout n :

$$\left| d(a_n, b_n) - d(a_n', b_n') \right| \leq d(a_n, a_n') + d(b_n, b_n')$$

on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n', b_n')$ puisque $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a_n') + d(b_n, b_n') = 0$.

δ est donc bien défini sur $\hat{E}$. Il n'est pas difficile de montrer qu'il s'agit d'une distance. Par exemple :

$$\delta(\hat{a}, \hat{b}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0 \Rightarrow (a_n)\ \mathcal{R}\ (b_n) \Rightarrow \hat{a} = \hat{b}$$

ou encore, si (a_n), (b_n) et (c_n) sont trois suites de Cauchy représentant trois éléments $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ de $\hat{E}$, alors :

$$\forall\, n,\ d(a_n, c_n) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, c_n)$$

donc, en passant à la limite $\delta(\hat{a}, \hat{c}) \leq \delta(\hat{a}, \hat{b}) + \delta(\hat{a}, \hat{c})$

❑ *Injection de* E *dans* $\hat{E}$:

Soit x élément de E. On pose $j(x)$ égal à la classe d'équivalence de la suite de Cauchy constante égale à x. Il s'agit bien d'une injection car, si $j(x) = j(y)$, cela signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, y) = 0$ (il n'y a pas d'indice n puisque les suites sont constantes), donc $d(x, y) = 0$, donc $x = y$.

On a également, pour tout x et y de E :

$$\delta(j(x), j(y)) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

(i) et (iii) sont donc prouvé.

❑ *Densité de* j(E) *dans* $\hat{\mathrm{E}}$:

Soit $\hat{a}$ un élément de $\hat{\mathrm{E}}$ représenté par la suite de Cauchy (a_n). Pour tout n, notons $j(a_n)$ l'image par j de l'élément a_n de E. Vérifions que $\lim\limits_{n\to\infty} j(a_n) = \hat{a}$ dans $\hat{\mathrm{E}}$. Il s'agit de montrer que :

$$\forall\ \varepsilon,\ \exists\ \mathrm{N},\ \forall\ n \geq \mathrm{N},\ \delta(j(a_n), \hat{a}) \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon,\ \exists\ \mathrm{N},\ \forall\ n \geq \mathrm{N},\ \lim_{p\to\infty} \mathrm{d}(a_n, a_p) \leq \varepsilon$$

or cette relation est vérifiée puisque (a_n) est de Cauchy, donc $\exists$ N, $\forall\ n \geq$ N, $\forall\ p \geq$ N, $\mathrm{d}(a_n, a_p) \leq \varepsilon$ et il suffit de faire tendre p vers $+\infty$. (ii) est donc montré.

❑ *Complétude de* $\hat{\mathrm{E}}$:

Soit ($\hat{a}_n$) une suite de Cauchy de $\hat{\mathrm{E}}$. j(E) étant dense dans $\hat{\mathrm{E}}$, pour tout n, il existe x_n élément de E tel que $\delta(j(x_n), \hat{a}_n) \leq \frac{1}{n}$. Vérifions que ($x_n$) est une suite de Cauchy de E :

$$\mathrm{d}(x_n, x_p) = \delta(j(x_n), j(x_p)) \leq \delta(j(x_n), \hat{a}_n) + \delta(\hat{a}_n, \hat{a}_p) + \delta(\hat{a}_p, j(x_p))$$
$$\leq \frac{1}{n} + \delta(\hat{a}_n, \hat{a}_p) + \frac{1}{p}$$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\ \mathrm{N} > \frac{3}{\varepsilon}$, $\forall\ n \geq$ N, $\forall\ p \geq$ N, $\delta(\hat{a}_n, \hat{a}_p) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $\frac{1}{p} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Donc :

$$\forall\ n \geq \mathrm{N},\ \forall\ p \geq \mathrm{N},\ \mathrm{d}(x_n, x_p) \leq \varepsilon$$

Donc (x_n) représente un élément $\hat{x}$ de $\hat{\mathrm{E}}$, et comme :

$$\delta(\hat{x}, \hat{a}_n) \leq \delta(\hat{x}, j(x_n)) + \delta(j(x_n), \hat{a}_n) \leq \delta(\hat{x}, j(x_n)) + \frac{1}{n}$$

et que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(\hat{x}, j(x_n))$, on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(\hat{x}, \hat{a}_n) = 0$ et la suite ($\hat{a}_n$) est convergente.

❑ *Unicité de* $\hat{\mathrm{E}}$:

Soit ($\hat{\hat{\mathrm{E}}}$, Δ) un autre espace métrique répondant à la question et $h : \mathrm{E} \to \hat{\hat{\mathrm{E}}}$ l'injection correspondante. On dispose de l'application $h \circ j^{-1} : j(\mathrm{E}) \subset \hat{\mathrm{E}} \to \hat{\hat{\mathrm{E}}}$, qui est une isométrie de j(E) sur h(E). Etant uniformément continue et $\hat{\hat{\mathrm{E}}}$ étant complet, cette isométrie se prolonge en une isométrie de l'adhérence de j(E) dans $\hat{\mathrm{E}}$. Mais j(E) est dense dans $\hat{\mathrm{E}}$. Donc le prolongement en question est une isométrie H de $\hat{\mathrm{E}}$ dans $\hat{\hat{\mathrm{E}}}$. Etant une isométrie, H($\hat{\mathrm{E}}$) est complet au même titre que $\hat{\mathrm{E}}$. H($\hat{\mathrm{E}}$) est donc fermé dans $\hat{\hat{\mathrm{E}}}$. Mais H($\hat{\mathrm{E}}$) contient H(j(E)) = h(E) qui est dense dans $\hat{\hat{\mathrm{E}}}$. Donc H($\hat{\mathrm{E}}$) = $\hat{\hat{\mathrm{E}}}$. On a ainsi montré que $\hat{\mathrm{E}}$ et $\hat{\hat{\mathrm{E}}}$ sont isométriques, et l'unicité est prouvée.

Si E est complet, on prend $\hat{\hat{\mathrm{E}}}$ = E et h = id. L'unicité précédente montre que $\hat{\mathrm{E}}$ est isométrique de E, prouvant (iv).

EXEMPLES :

❑ Le complété de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{R}$ est complet et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Remarquons que la preuve que $\mathbb{R}$ soit complet repose in fine sur le fait que, dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée admet une borne supérieure, et que nous avons admis dans le cours L1/SUITES.PDF l'existence d'un tel corps totalement ordonné vérifiant la propriété de la borne supérieure.
Inversement, nous pouvons maintenant démontrer cette existence en justifiant que le complété de $\mathbb{Q}$ (continuons à l'appeler $\mathbb{R}$) vérifie effectivement la propriété de la borne supérieure. Pour cela, n'utilisons que le fait que $\mathbb{R}$ est complet et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. La densité de $\mathbb{Q}$ permet de montrer par passage à la limite que $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné (nous passons ces détails). Montrons que toute suite (x_n) croissante majorée est de Cauchy. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, on aurait :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N,\ \exists\, n > p > N,\ x_n - x_p > \varepsilon$$

Prenons N = 0. $\exists\, \varphi(1) > \varphi(0)$, $x_{\varphi(1)} - x_{\varphi(0)} > \varepsilon$.
Prenons $N = \varphi(1)$. $\exists\, \varphi(3) > \varphi(2) > N = \varphi(1)$, $x_{\varphi(3)} - x_{\varphi(2)} > \varepsilon$ et donc a fortiori $x_{\varphi(3)} - x_{\varphi(1)} > \varepsilon$ car la suite est croissante, et donc $x_{\varphi(3)} - x_{\varphi(0)} > 2\varepsilon$
Prenons $N = \varphi(3)$. $\exists\, \varphi(5) > \varphi(4) > N = \varphi(3)$, $x_{\varphi(5)} - x_{\varphi(4)} > \varepsilon$ et donc a fortiori $x_{\varphi(5)} - x_{\varphi(3)} > \varepsilon$ et donc $x_{\varphi(5)} - x_{\varphi(0)} > 3\varepsilon$
En itérant, on construit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $x_{\varphi(2n-1)} - x_{\varphi(0)} > n\varepsilon$ et la suite ne peut être majorée.
Ayant ainsi montré que toute suite croissante majorée est de Cauchy, on utilise le fait que $\mathbb{R}$ est complet pour conclure qu'elle converge. Ayant montré que toute suite croissante majorée converge, on en déduit la propriété des segments emboîtés, celle des coupures de Dedekind, celle de la borne supérieure. Voir REELS.PDF pour plus de détails.

❑ Le complété de $\mathbb{Q}$ pour la distance p-adique forme un corps noté $\mathbb{Q}_p$, appelé corps des nombres p-adiques. On peut montrer (et nous admettrons) que les éléments non nuls x de $\mathbb{Q}_p$ peuvent s'exprimer sous la forme :

$$x = \sum_{n=r}^{+\infty} a_n p^n,\ r \in \mathbb{Z},\ a_n \in \{0, ..., p-1\},\ a_r \neq 0$$

le sens à donner à $\sum\limits_{n=r}^{+\infty} a_n p^n$ étant le suivant : cette somme représente dans $\mathbb{Q}$ la suite de Cauchy $\left(\sum\limits_{k=r}^{+\infty} a_k p^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la distance p-adique. Un exemple de nombre 2-adique s'écrit :

$$x = ...011001010,00001011_b$$

(l'indice b indiquant que la représentation du membre de droite est écrite en binaire), avec un nombre fini de décimales à droite de la virgule et une infinité de décimales à gauche de la virgule. On ne devrait pas être plus surpris par cette notation que par celle du développement d'un nombre réel en base 2, qui possède un nombre fini de décimales à gauches de la virgule, et une infinité de décimales à droite de la virgule. Les opérations se font avec les règles usuelles, mais une retenue peut se propager indéfiniment vers la gauche. On pourra s'amuser à vérifier que :

$$\frac{1}{3} = ...10101010101011_b$$

En effet : $3 = 11_b$ donc :

$$\begin{aligned} 3 \times ...10101010101011_b &= 11_b \times ...10101010101011_b \\ &= \quad ...10101010101011_b \\ &\quad + ...101010101010110_b \\ &= ...0000000000000001_b \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il existe des éléments dans $\mathbf{Q}_2$ qui ne sont pas dans $\mathbf{Q}$, par exemple $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n}$.

III : Espaces compacts

Ce paragraphe vise à généraliser le cas des **segments** (ou intervalles fermés bornés) $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, ou les parties fermées bornées de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, dans lesquels le théorème de Bolzano-Weierstrass s'applique. (voir L2/EVNORME.PDF).

1- Sous-suites

Soit (E, d) un espace métrique.

Une **sous-suite** d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E (ou **suite extraite**) est une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante. Il est montré dans le cours L1/SUITES.PDF que, si une suite réelle ou complexe converge, alors toute sous-suite converge. Cette propriété se généralise sans problème aux espaces métriques. Il suffit dans la démonstration de remplacer les expressions telles que $|x - y|$ par $d(x, y)$.

PROPOSITION-DEFINITION

Soit E *un espace métrique,* (x_n) *une suite de* E. *On dit qu'un élément* l *de* E *est une* **valeur d'adhérence** *de la suite si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée* :

(i) *Il existe une sous-suite de* (x_n) *qui converge vers* l

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall n, \exists p \geq n, d(x_n, l) < \varepsilon$

(iii) *Pour toute boule* $B(l, \varepsilon)$ *de centre* l *et de rayon* $\varepsilon > 0$, *il existe une infinité d'indices* n *tels que* x_n *appartienne à* $B(l, \varepsilon)$.

Démonstration :

❑ (i) ⇒ (ii) : Soit $(x_{\varphi(n)})$ la sous-suite de limite l, où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une fonction strictement croissante. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ quelconque. On a $\lim_{k\to\infty} x_{\varphi(k)} = l$ donc :

$$\exists N, \forall k \geq N, d(x_{\varphi(k)}, l) < \varepsilon$$

On peut prendre $k \geq N$ tel que $p = \varphi(k) \geq n$ et donc :

$$\exists p \geq n, d(x_n, l) < \varepsilon$$

❑ (ii) ⇒ (iii) : Prendre $n = 0$ et $p = \varphi(0)$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, l) < \varepsilon$. Puis prendre $n = \varphi(0) + 1$ et $p = \varphi(1) \geq n$ tel que $d(x_{\varphi(1)}, l) < \varepsilon$. Puis prendre $n = \varphi(1) + 1$ et $p = \varphi(2) \geq n$ tel que $d(x_{\varphi(2)}, l) < \varepsilon$, et ainsi de suite. On construit ainsi une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ dans $B(l, \varepsilon)$. L'ensemble des indices $\{\varphi(n), n \in \mathbf{N}\}$ est infini et répond à la question.

❑ (iii) $\Rightarrow$ (i) : Prendre $x_{\varphi(1)}$ dans B(l, 1), puis, $x_{\varphi(1)}$, ..., $x_{\varphi(n-1)}$ ayant été choisis, prendre $x_{\varphi(n)}$ dans B(l, $\frac{1}{n}$), avec $\varphi(n) > \text{Max}\{\varphi(1), ..., \varphi(n-1)\}$. Cela est possible car il existe une infinité d'indices k tels que x_k appartienne à cette boule.

EXEMPLE :
❑ Dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $x_n = n(1 + (-1)^n)$ admet 0 pour valeur d'adhérence. La sous-suite (x_{2k+1}) converge vers 0, et pour tout voisinage de 0, il existe une infinité d'indices (les impairs $n = 2k + 1$) pour lesquels x_n appartient à ce voisinage.
Dans la droite achevée, la même suite admet deux valeurs d'adhérence, 0 et $+\infty$. La sous-suite (x_{2k}) converge vers $+\infty$.

2- Recouvrements

Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. On dit que c'est un **recouvrement** de E si $E = \bigcup_{i\in I} O_i$. On dit que cette famille admet un **sous-recouvrement fini** s'il existe une partie finie $J \subset I$, telle que $E = \bigcup_{j\in J} O_j$.

EXEMPLE :
❑ Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble de toutes les boules B(x, ε), $x \in E$, constitue un recouvrement de E.

On dit que E vérifie la **propriété de Bolzano-Weierstrass** si toute suite (x_n) admet une sous-suite convergente, ce qu'on peut formuler également en disant que toute suite (x_n) admet une valeur d'adhérence. C'est le cas de tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. En effet, dans le cours L1/SUITES.PDF, on a énoncé le théorème de Bolzano-Weierstrass, selon lequel on peut extraire une sous-suite convergente de toute suite bornée. Ainsi, si (x_n) est une suite de $[a, b]$, la suite est bornée, donc possède une sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$. L'intervalle étant fermé, la limite appartient à $[a, b]$, et la convergence d'effectue dans cet intervalle. Dans L2/EVNORME.PDF, on a montré que le théorème de Bolzano-Weierstrass s'appliquait aussi aux suites bornées d'un espace vectoriel normé **de dimension finie** sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que E est **précompact**, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de E par un nombre fini de boules B(x, ε).

On dit que E vérifie la **propriété de Borel-Lebesgue** si, de tout recouvrement $(O_i)_{i\in I}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

PROPOSITION
Soit E *vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue et* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de fermés non vides. Alors* $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Démonstration :
❑ Par l'absurde, si $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \emptyset$, alors, en passant au complémentaire et en notant $O_n = F_n^{\,c}$. O_n est un ouvert. Les F_n formant une suite décroissante, la suite des O_n est croissante et :

$$E = \Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n\Big)^c = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n^{\,c} = \bigcup_{n=0}^{\infty} O_n$$

On dispose donc d'un recouvrement $(O_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E. E vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un sous-recouvrement fini O_{n_1}, O_{n_2}, ..., O_{n_N}, de sorte que $E = \bigcup_{k=1}^{N} O_{n_k} = O_{n_N}$ en raison de la croissance de la suite (O_n). Donc :

$$\varnothing = E^c = O_{n_N}^{\,c} = F_{n_N}$$

ce qui est contradictoire avec le fait que les F_n sont non vides.

La propriété énoncée est proche de celle portant sur les espaces complets, et selon laquelle toute suite décroissante (F_n) de fermés non vides d'un espace complet E telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$ a une intersection non vide (égale à un singleton). On voit ici qu'on a gardé l'hypothèse d'une suite décroissante de fermés non vides, mais qu'on a supprimé l'hypothèse sur les diamètres. Cela laisse penser qu'il y a une relation entre espace vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue et espace complet, relation précisée par la proposition suivante :

PROPOSITION

Soit E *un espace métrique. Il y a équivalence entre* :

(i) E *vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.*

(ii) E *est précompact et complet.*

(iii) E *vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.*

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que E *est* **compact**.

Démonstration :

❑ (i) ⇒ (ii) : Soit E vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Montrons que E est précompact. Soit donc $\varepsilon > 0$. On prend un élément x_1 dans E. Si $E = B(x_1, \varepsilon)$, on a un recouvrement fini de E par une boule de rayon ε. Sinon, il existe x_2 n'appartenant pas à $B(x_1, \varepsilon)$. Si $E = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, on a un recouvrement fini de E par un nombre fini de boules de rayon ε. Sinon, il existe x_3 n'appartenant pas à $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$. Supposons qu'on ait défini ainsi, x_1, ..., x_n. Si $E = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$, on a un recouvrement fini de E par un nombre fini de boules de rayon ε. Sinon, il existe x_{n+1} n'appartenant pas à $\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$. Montrons que le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations (ce qui prouve que E est précompact). Dans le cas contraire, on disposerait d'une suite (x_n) telle que, pour tout $n > p$, $d(x_n, x_p) \geq \varepsilon$, puisque $x_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} B(x_k, \varepsilon)$ et donc $x_n \notin B(x_p, \varepsilon)$. E vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, (x_n) admet une sous-suite convergente (donc de Cauchy) $(x_{\varphi(n)})$ qui vérifie également $\forall\, n > p$, $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(p)}) \geq \varepsilon$. Mais cela contredit le fait que la suite $(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy.

Montrons maintenant que E est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Il existe une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ puisque E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit l sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\exists\, N,\ \forall\, n \geq N,\ \forall\, p \geq N,\ d(x_n, x_p) < \varepsilon$$

donc $\quad \exists\, N,\ \forall\, n \geq N,\ \forall\, p \geq N,\ d(x_n, x_{\varphi(p)}) < \varepsilon \qquad$ car $\varphi(p) \geq p \geq N$

Si on fait tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$\exists\, N,\ \forall\, n \geq N,\ \forall\, p \geq N,\ d(x_n, l) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite de Cauchy (x_n) converge. E est donc complet.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit (x_n) une suite. E étant précompact, il existe un recouvrement fini par des boules de rayon 1 et l'une de ces boules, notons-la B_1, est telle qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in B_1$ (si chaque boule B est telle que seul un nombre fini d'indices n satisfont $x_n \in B$, il en serait de même de E).

E est également recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$ et il en est de même de B_1. L'une de ces boules de rayon $\frac{1}{2}$, notons-la B_2, est telle qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in B_1 \cap B_2$.

Supposons définis B_1, B_2, ..., B_{k-1} boules de rayon 1, $\frac{1}{2}$, ..., $\frac{1}{k-1}$ telles que $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1}$ possède des x_n pour une infinité d'indices n. E est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{k}$ et il en est de même de $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1}$. L'une de ces boules de rayon $\frac{1}{k}$, notons-la B_k, est telle qu'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k$. On continue indéfiniment.

En raison de l'infinité des indices n tels que $x_n \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k$, on peut définir une fonction strictement croissante φ telle que, pour tout k, $x_{\varphi(k)} \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k$. Pour $n \geq k$, on a :

$$B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k \cap ... \cap B_n \subset B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k$$

donc $\quad \forall\, n \geq k,\ x_{\varphi(n)} \in B_k$

donc $\quad \forall\, n \geq p \geq k,\ d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(p)}) \leq \mathrm{diam}(B_k) \leq \frac{2}{k}$

Cette inégalité permet de montrer que la suite $(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$. En prenant k tel que $\frac{2}{k} < \varepsilon$, on obtient : $\exists\, N\ (= k),\ \forall\, n \geq p \geq N,\ d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(p)}) < \varepsilon$.

Etant de Cauchy et E étant complet, la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ est convergente. On a montré que E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

❑ (i) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Montrons que :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in E,\ \exists\, i \in I,\ B(x, \varepsilon) \subset O_i$$

Par l'absurde, si ce n'est pas vrai, on a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in E,\ \forall\, i \in I,\ B(x, \varepsilon) \not\subset O_i$$

Prenons donc $\varepsilon = \frac{1}{n}$ en notant x_n le x correspondant. On obtient :

$$\forall\, n > 0,\ \forall\, i \in I,\ B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$$

E vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, la suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément l de E. l appartient à l'un des O_i qui est ouvert, donc :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ B(l, \varepsilon) \subset O_i$$

et $\quad \exists\, n,\ \varphi(n) > \frac{2}{\varepsilon}$ et $x_{\varphi(n)} \in B(l, \frac{\varepsilon}{2}) \qquad$ car $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = l$

Vérifions que $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(l, \varepsilon) \subset O_i$. Soit $y \in B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)})$. On a :

$$d(y, l) \leq d(y, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, l) < \frac{1}{\varphi(n)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mais la propriété $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset O_i$ est contradictoire avec la propriété $\forall n > 0$, $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$. On a donc bien :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists i \in I, B(x, \varepsilon) \subset O_i$$

Nous avons montré (dans la démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii)) que si E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, alors il est précompact. Donc, pour le ε ci-dessus, il existe un recouvrement fini de E par des boules $B(y_1, \varepsilon)$, $B(y_2, \varepsilon)$, ..., $B(y_n, \varepsilon)$. Pour chaque y_k, soit i_k l'indice tel que $B(y_k, \varepsilon) \subset O_{i_k}$. On a alors :

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k} \subset E$$

donc on a trouvé un sous-recouvrement fini O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_n}. E vérifie donc la propriété de Borel-Lebesgue.

❑ (iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit (x_n) une suite de E, et pour tout n, soit F_n l'adhérence de l'ensemble $\{x_p \mid p \geq n\}$. La suite (F_n) constitue une suite décroissante de fermés non vides. Donc, E vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue, l'intersection de tous les fermés est non vide. Soit l appartenant à cette intersection. On a donc l adhérent à tous les F_n. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n, \exists p \geq n, d(x_p, l) < \varepsilon$$

l est donc une valeur d'adhérence de la suite (x_n), et E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Au cours de la démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii), puis de (ii) $\Rightarrow$ (i), nous avons montré les deux résultats suivants qui ont leur propre intérêt :

COROLLAIRE

(a) *Dans un espace métrique, si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur d'adhérence.*

(b) *Soit* E *un espace métrique précompact, alors, de toute suite* (x_n) *de* E*, on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Le (a) peut se reformuler comme suit : *Dans un espace métrique, si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors elle-même est convergente.*

EXEMPLES :

❑ Les compacts de $\mathbf{R}^n$, ou plus généralement, d'un espace vectoriel normé de dimension finie, sont les fermés bornés. Par exemple, les boules fermées dans un tel espace sont des compacts. La sphère unité S^n de $\mathbf{R}^{n+1}$ est compacte.

❑ Le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, espace vectoriel de dimension finie, est compact. C'est en effet un fermé, image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to M^T M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (où M^T désigne la transposée de M), et il est borné, les coefficients d'une matrice de $O_n(\mathbf{R})$ étant tous éléments de $[-1, 1]$.

De même, le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbf{R})$ est compact. Il est fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\} \times \{1\}$ par l'application continue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to (M^T M, \det(M)) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$, et est borné au même titre que $O_n(\mathbf{R})$.

❑ La suite de terme général $n(1 + (-1)^n)$ admet 0 comme seule valeur d'adhérence dans $\mathbf{R}$, mais elle n'est pas de Cauchy. Elle n'est pas convergente. Dans la droite achevée, elle admet deux valeurs d'adhérence, qui sont 0 et $+\infty$.
❑ Pour tous réels $a < b$, $[a, b]$ est compact, puisque le théorème de Bolzano-Weierstrass s'y applique.
❑ Pour tout $a < b$, $[a, b] \cap \mathbf{Q}$ est précompact. En effet, si $\varepsilon > 0$, choisissons n tels que $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$, et dans chaque intervalle $[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}]$, choisissons un rationnel q_k. Les boules $B(q_k, \varepsilon)$, $0 \leq k \leq n$, forment alors un recouvrement fini.
Si on dispose d'une suite de rationnels (x_n) dans cet ensemble, cette suite est bornée donc il existe une sous-suite qui converge dans $\mathbf{R}$, mais peut-être pas dans $\mathbf{Q}$. Néanmoins, cette sous-suite sera de Cauchy.
❑ $\mathbf{R}$ est complet, mais pas précompact. $\mathbf{R}$ n'est pas compact.

❑ La droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ est compacte, donc complète. En effet, si $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $\overline{\mathbf{R}}$, alors $+\infty$ appartient à l'un des ouverts et donc il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que $]b, +\infty[$ soit inclus dans cet ouvert. De même, $-\infty$, appartient à l'un des ouverts, donc il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $]-\infty, a[$ soit inclus dans cet ouvert. Par ailleurs, $[a, b]$ est compact, donc est recouvert par un sous-recouvrement fini des O_i. Ce sous-recouvrement, auquel on adjoint les deux ouverts contenant $+\infty$ et $-\infty$ forme un sous-recouvrement fini de $\overline{\mathbf{R}}$.

3- Propriétés

PROPOSITION

(i) *Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée.*

(ii) *Tout fermé inclus dans un compact est compact.*

(iii) *Soit* $f : (E, d) \to (F, \delta)$ *une application continue entre espaces métriques,* E *étant compact. Alors* $f(E)$ *est compact. De plus f est uniformément continue* (**théorème de Heine**). *Si f est bijective continue, f est un homéomorphisme.*

Démonstration :
❑ (i) : Soit A une partie compacte d'un espace métrique E et soit x adhérent à A. Il existe alors une suite (a_n) de A qui converge vers x. A étant compact, il existe une sous-suite qui converge vers un élément l de A. Comme cette sous-suite converge également vers x, c'est que $l = x$, et donc $x \in A$. Donc A est fermée.

❑ (ii) : Soit A une partie fermée d'un compact E et soit (a_n) une suite de A. C'est donc aussi une suite de E, et E étant compact, il existe une sous-suite qui converge vers un élément l de E. l étant limite d'une suite de A est adhérent à A, et A étant fermé, $l \in A$. On a montré que, de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite qui converge. Donc A est compact.

❑ (iii) : Soit (y_n) une suite de $f(E)$. Il existe une suite (x_n) de E telle que : $\forall n, y_n = f(x_n)$. E étant compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément l de E. f étant continue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = f(l)$

et on a extrait de la suite (y_n) une sous-suite qui converge vers un élément de $f(\mathrm{E})$. Donc $f(\mathrm{E})$ est compact.
Montrons maintenant que f est uniformément continue. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, on a :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E},\ \mathrm{d}(x, y) < \alpha \text{ et } \delta(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

Prenons $\alpha = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier n strictement positif. On obtient :

$$\forall\, n,\ \exists\, (x_n, y_n) \in \mathrm{E} \times \mathrm{E},\ \mathrm{d}(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ et } \delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

E étant compact, on extrait une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément l. Comme $\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) < \dfrac{1}{\varphi(n)}$, on a :

$$\mathrm{d}(l, y_{\varphi(n)}) \leq \mathrm{d}(l, x_{\varphi(n)}) + \mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq \mathrm{d}(l, x_{\varphi(n)}) + \frac{1}{\varphi(n)}$$

majorant qui est de limite nulle quand n tend vers l'infini. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = l$. Mais, f étant continue, on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)})$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) = 0$ ce qui est contradictoire avec la condition $\forall\, n,\ \delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Si f est continue bijective et E compact, montrons que f^{-1} est continue. Soit A un fermé de E. Il s'agit de montrer que son image réciproque par f^{-1}, donc son image directe $f(\mathrm{A})$ par f, est fermée. Or A est fermé dans un compact, donc compact lui-même, donc son image $f(\mathrm{A})$ par une application continue est compacte, donc fermée dans F.

EXEMPLES :
❑ Les compacts de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$) sont les fermés bornés. En effet :
Un compact est fermé d'après la propriété (i) ci-dessus. Un compact est également borné, car, par l'absurde, s'il ne l'est pas, il existe une suite (x_n) de ce compact qui tend vers ∞ (au sens $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = +\infty$) et toute suite extraite possède la même propriété. Il est alors impossible qu'une suite extraite converge.
Réciproquement, soit A un fermé borné de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$ ou de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$) et soit (x_n) une suite de A. La suite étant bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'en extraire une sous-suite convergente, la limite étant alors adhérent à A. A étant fermé, la limite est dans A. Donc A est compact.

COROLLAIRE
Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *une application continue, E étant compact. Alors* $f(\mathrm{E})$ *admet un maximum et un minimum.*

Ce théorème généralise le cas d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> :

❑ E étant compact et f continue, $f(\text{E})$ est compact dans $\mathbb{R}$, donc fermée bornée. Etant bornée, $f(\text{E})$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. Etant fermée, la borne supérieure (limite d'une suite de $f(\text{E})$) est dans $f(\text{E})$, donc est un maximum. De même la borne inférieure est un minimum.

Soit A une partie compacte d'un espace métrique E. Le théorème précédent s'applique à A et prouve que $f(\text{A})$ admet un maximum et un minimum.

C'est faux si A est seulement une partie fermée de E. Par exemple, soit A = $[1,+\infty[$, et $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On a $f(\text{I}) =]0, 1]$, bornée, mais sans minimum.

C'est également faux si A est seulement bornée. Soit A = $]0, 1[$, avec le même f, $f(\text{A}) =]1, +\infty[$. $f(\text{A})$ n'est pas bornée.

EXEMPLE :

❑ Démontrons le **théorème de D'Alembert**, qui énonce que tout polynôme P à coefficients complexes non constant admet au moins une racine. Ce théorème est admis dans le chapitre L1/POLYNOME.PDF. Soit donc P un tel polynôme. Comme P n'est pas constant, on a $\lim\limits_{z\to\infty} |\text{P}(z)| = +\infty$, donc, en prenant A = $|\text{P}(0)|$:

$$\exists \text{ R}, \forall z, |z| \geq \text{R} \Rightarrow |\text{P}(z)| > \text{A} = |\text{P}(0)|$$

Par ailleurs, la boule fermée de centre 0 et de rayon R est un fermé borné de $\mathbb{C}$ donc un compact. L'application $z \to |\text{P}(z)|$ y est continue, donc admet un minimum m atteint en un point z_0.

Si $m = |\text{P}(z_0)| = 0$, on a une racine de P. Sinon $m > 0$. Il s'agit en fait d'un minimum global sur $\mathbb{C}$ puisque :

$$|\text{P}(z_0)| \leq |\text{P}(0)| = \text{A} < |\text{P}(z)| \text{ si } |z| \geq \text{R}$$

On a donc, pour tout z de $\mathbb{C}$, $|\text{P}(z_0)| \leq |\text{P}(z)|$. Prenons $z = z_0 + re^{i\theta}$ et, pour θ donné, utilisons la formule de Taylor au voisinage de $r = 0$. Soit $\text{P}^{(k)}(z_0)$ la première dérivée non nulle de P en z_0 (qui existe car P n'est pas constant) :

$$\begin{aligned}\text{P}(z) = \text{P}(z_0 + re^{i\theta}) &= \text{P}(z_0) + \frac{r^k e^{ik\theta}}{k!} \text{P}^{(k)}(z_0) + \text{o}(r^k) \\ &= \text{P}(z_0) \left(1 + \frac{r^k e^{ik\theta}}{k!} \frac{\text{P}^{(k)}(z_0)}{\text{P}(z_0)} + \text{o}(r^k)\right)\end{aligned}$$

Effectuons ce calcul en choisissant θ de façon que $k\theta$ soit égal à $\pi - \arg\left(\dfrac{\text{P}^{(k)}(z_0)}{\text{P}(z_0)}\right)$. On obtient :

$$\text{P}(z) = \text{P}(z_0) \left(1 - \frac{r^k}{k!} \left|\frac{\text{P}^{(k)}(z_0)}{\text{P}(z_0)}\right| + \text{o}(r^k)\right)$$

donc $|\text{P}(z)| = |\text{P}(z_0)| \left|1 - \dfrac{r^k}{k!} \left|\dfrac{\text{P}^{(k)}(z_0)}{\text{P}(z_0)}\right| + \text{o}(r^k)\right|$. Comme $|\text{P}(z_0)|$ est un minimum, on doit avoir, pour tout $r \geq 0$:

$$\left|1 - \frac{r^k}{k!} \left|\frac{\text{P}^{(k)}(z_0)}{\text{P}(z_0)}\right| + \text{o}(r^k)\right| \geq 1$$

Mais $\left|1 - \frac{r^k}{k!}\left|\frac{\mathrm{P}^{(k)}(z_0)}{\mathrm{P}(z_0)}\right| + \mathrm{o}(r^k)\right| \leq \left|1 - \frac{r^k}{k!}\left|\frac{\mathrm{P}^{(k)}(z_0)}{\mathrm{P}(z_0)}\right|\right| + |\mathrm{o}(r^k)|$

$$\leq 1 - \frac{r^k}{k!}\left|\frac{\mathrm{P}^{(k)}(z_0)}{\mathrm{P}(z_0)}\right| + |\mathrm{o}(r^k)| \qquad \text{pour } r \leq k!\left|\frac{\mathrm{P}(z_0)}{\mathrm{P}^{(k)}(z_0)}\right|$$

$$\leq 1 - \frac{1}{2}\frac{r^k}{k!}\left|\frac{\mathrm{P}^{(k)}(z_0)}{\mathrm{P}(z_0)}\right| \qquad \text{pour } r \text{ assez petit}$$

$$< 1$$

ce qui conduit à une contradiction. Ainsi, il est impossible d'avoir $m > 0$.

4- Valeurs d'adhérence

PROPOSITION

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (a_n) *est un fermé de* E.

Démonstration :

❑ On a les équivalences suivantes :

l valeur d'adhérence de (a_n)

$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n, \exists\, p \geq n, \mathrm{d}(a_p, l) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, n, \mathrm{B}(l, \varepsilon) \cap \{a_p \mid p \geq n\} \neq \varnothing$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, n, l \in \overline{\{a_p \mid p \geq n\}}$

$\Leftrightarrow \quad l \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{a_p \mid p \geq n\}}$

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence est l'intersection des fermés $\overline{\{a_p \mid p \geq n\}}$. C'est donc un fermé.

PROPOSITION

Dans un espace compact, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (a_n) *est non vide. Cette suite converge si et seulement si il existe une seule valeur d'adhérence. Dans ce cas, celle-ci est la limite de la suite.*

Démonstration :

❑ Le fait qu'il existe au moins une valeur d'adhérence à la suite (a_n) résulte du fait qu'un compact vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Si la suite converge, il est clair qu'il n'y a qu'une valeur d'adhérence puisque toute sous-suite convergera vers cette valeur.

Réciproquement, soit l l'unique valeur d'adhérence. Par l'absurde, si (a_n) ne converge pas vers l, alors :

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \mathrm{N}, \exists\, n \geq \mathrm{N}, \mathrm{d}(a_n, l) \geq \varepsilon$$

Cela exprime qu'il existe une infinité d'indice n tels que $a_n \in \mathrm{B}(l, \varepsilon)^c$. Ce complémentaire est un fermé (on a pris une inégalité large), inclus dans un compact, donc compact. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite convergente dans ce compact. Sa limite, également élément de ce compact est une valeur d'adhérence de la suite initiale, donc distincte de l, ce qui est contraire à l'unicité de la valeur d'adhérence.

Dans le cas réel, il est pratique de se placer dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, qui est compacte. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (a_n) étant fermé et non vide, il admet un maximum et un minimum dans $\overline{\mathbb{R}}$. On appelle **limite supérieure**, noté *limsup* a_n, la plus grande valeur d'adhérence, et **limite inférieure**, noté *liminf* a_n, la plus petite des valeurs d'adhérence.

EXEMPLES :
On vérifiera que :
❑ Pour $a_n = (-1)^n + \dfrac{\sin(n)}{n}$, *limsup* $a_n = 1$ et *liminf* $a_n = -1$
❑ Pour $a_n = (1 + (-1)^n + \dfrac{\sin(n)}{n})\, n$, *limsup* $a_n = +\infty$ et *liminf* $a_n = 0$. On notera que la suite admet deux valeurs d'adhérence si on se place dans la droite achevée, mais une seule (0) si on se restreint à $\mathbb{R}$. Il est donc essentiel de se placer dans un compact pour conclure qu'une suite admettant une seule valeur d'adhérence converge.

PROPOSITION
Soit (a_n) *une suite réelle. Il y a équivalence entre* :
(i) $l =$ *limsup* a_n
(ii) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que* $a_n \geq l + \varepsilon$, *et il existe une infinité d'indices n tels que* $a_n \geq l - \varepsilon$.
Il y a équivalence entre :
(iii) $l =$ *liminf* a_n
(iv) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que* $a_n \leq l - \varepsilon$, *et il existe une infinité d'indices n tels que* $a_n \leq l + \varepsilon$.
Soit (a_n) *et* (b_n) *deux suites telles que* $\forall\, n,\ a_n \leq b_n$. *On a* :
(v) *limsup* $a_n \leq$ *limsup* b_n
(vi) *liminf* $a_n \leq$ *liminf* b_n

<u>Démonstration</u> :
❑ La démonstration de (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) est analogue à la démonstration de (i) $\Leftrightarrow$ (ii). On ne démontrera que cette dernière.
(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $l =$ *limsup* a_n et soit $\varepsilon > 0$. S'il existait une infinité d'indices n tels que $a_n \geq l + \varepsilon$, on pourrait extraire une sous-suite convergeant vers un élément supérieur ou égal à $l + \varepsilon$ (dans la droite achevée) et cette limite serait une valeur d'adhérence strictement supérieure à l, ce qui est absurde, puisque l est la plus grande valeur d'adhérence. Par ailleurs, il existe une sous-suite de (a_n) convergeant vers l et cette sous-suite donne une infinité d'indices tels que $a_n \geq l - \varepsilon$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) : Prenons $\varepsilon > 0$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $a_n \geq l + \varepsilon$, au delà d'un certain rang N, tous les a_n vérifie $a_n \leq l + \varepsilon$. Puisqu'il y a une infinité d'indice tels que $a_n \geq l - \varepsilon$, ces indices au-delà de N vérifie tous $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$. Il existe donc une infinité d'indices tels que a_n appartienne à $B(l, \varepsilon)$ et l est une valeur d'adhérence. C'est la plus grande car s'il existait une valeur d'adhérence $l' > l$, en prenant $\varepsilon = \dfrac{l' - l}{3}$, on aurait une infinité d'indices n tels que a_n soit dans $B(l', \varepsilon)$, mais, pour ces n, on aurait $a_n \geq l + \varepsilon$.

❑ (v) : Soit $l = limsup\ b_n$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que $b_n \geq l + \varepsilon$, et donc a fortiori, il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $a_n \geq l + \varepsilon$. Donc $\exists$ N, $\forall\ n \geq$ N, $a_n \leq l + \varepsilon$. Les valeurs d'adhérence de (a_n), limites potentielles de sous-suites de (a_n), vérifient la même inégalité, donc $limsup\ a_n \leq l + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout ε, on a $limsup\ a_n \leq l = limsup\ b_n$.
La démonstration de (vi) est analogue.

EXEMPLE D'APPLICATION
❑ (Cauchy) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors son rayon de convergence R (dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$) est tel que :

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = limsup\ |a_n|^{1/n}$$

En effet, soit z tel que $|z| > \mathrm{R}$. Montrons que $\sum a_n z^n$ diverge. On a $\dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{\mathrm{R}} = limsup\ |a_n|^{1/n}$, donc il existe une infinité d'indices n tels que $|a_n|^{1/n} \geq \dfrac{1}{|z|}$ (on applique la proposition précédente avec $l = \dfrac{1}{\mathrm{R}}$ et $\varepsilon = l - \dfrac{1}{|z|}$). Pour cette infinité d'indices, $|a_n z^n| \geq 1$, ce qui signifie que la suite $(a_n z^n)$ ne peut converger vers 0, donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Soit z tel que $|z| < \mathrm{R}$. Montrons que $\sum a_n z^n$ converge. Prenons s tel que $\dfrac{1}{|z|} > s > \dfrac{1}{\mathrm{R}} = limsup\ |a_n|^{1/n}$.

Il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que $|a_n|^{1/n} > s$ (on applique la proposition précédente avec $l = \dfrac{1}{\mathrm{R}}$ et $\varepsilon = s - l$) donc :

$$\exists\ \mathrm{N},\ \forall\ n \geq \mathrm{N},\ |a_n|^{1/n} \leq s$$

donc, pour ces n :

$$|a_n z^n| \leq s^n\ |z^n|$$

Comme $s|z| < 1$, $\sum s^n\ |z^n|$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

❑ Les notions de limite supérieure et inférieure peuvent simplifier les démonstrations utilisant les définitions de limite. Voici un exemple. Soit (u_n) et (v_n) deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ diverge. On pose $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\mathrm{V}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrer que $\mathrm{U}_n = o(\mathrm{V}_n)$.

D'après l'hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists$ N, $\forall\ n \geq$ N, $0 \leq u_n \leq \varepsilon v_n$ donc :

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{n} \varepsilon v_k = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k + \varepsilon(\mathrm{V}_n - \mathrm{V}_\mathrm{N}) \leq \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k + \varepsilon \mathrm{V}_n$$

Donc $\quad 0 \leq \dfrac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} \leq \varepsilon + \dfrac{1}{\mathrm{V}_n} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k$

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{V}_n = +\infty$ alors que $\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k$ est une constante, ne dépendant pas de n. Mais il est incorrect de passer à la limite ici pour en déduire que : $\forall\ \varepsilon > 0,\ 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} \leq \varepsilon$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} = 0$ car on ignore encore si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n}$ existe. Le passage à la limite est donc impossible. La notion de limite supérieure et inférieure permet de pallier cette difficulté. On a en effet :

$$0 \leq \mathit{liminf} \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} \leq \mathit{limsup} \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} \leq \mathit{limsup}\ (\varepsilon + \frac{1}{\mathrm{V}_n} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k)$$

Or la suite $(\varepsilon + \dfrac{1}{\mathrm{V}_n} \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k)$ tend vers ε donc $\mathit{limsup}\ (\varepsilon + \dfrac{1}{\mathrm{V}_n} \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k) = \mathit{lim}\ (\ \varepsilon + \dfrac{1}{\mathrm{V}_n} \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k\ ) = \varepsilon$, donc :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ 0 \leq \mathit{liminf} \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} \leq \mathit{limsup} \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} \leq \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout ε > 0, on a :

$$0 = \mathit{liminf} \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n} = \mathit{limsup} \frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n}$$

donc la suite $(\dfrac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{V}_n})$ tend vers 0.

Annexe : Le théorème de Weierstrass

1- Continuité uniforme vs continuité

La continuité uniforme d'une fonction est à la continuité ce que la convergence uniforme d'une suite de fonctions est à la convergence simple. On illustrera cette analogie par l'exemple des polynômes de Bernstein sur [0, 1]. Pour tout x élément de [0, 1] et tout couple d'entiers (k, n) tel que $0 \leq k \leq n$, on pose :

$$\mathrm{P}_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k\ (1-x)^{n-k}$$

A toute fonction f continue sur [0, 1] à valeurs réelles ou complexes, on associe la suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{B}_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ dites **polynômes de Bernstein**, et définies pour $n > 0$ de la façon suivante :

$$\mathrm{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\ \mathrm{P}_{n,k}(x)$$

Le lecteur vérifiera que :

pour $f : x \to 1$, $\quad \mathrm{B}_n(f) = 1$
pour $f : x \to x$, $\quad \mathrm{B}_n(f)(x) = x$ pour tout x
pour $f : x \to x^2$, $\quad \mathrm{B}_n(f)(x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}$

Pour chacune de ces fonctions, et pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{B}_n(f)(x) = f(x)$ (convergence simple de la suite des fonctions polynomiales $\mathrm{B}_n(f)$ vers la fonction f). On va montrer cette propriété pour toute f continue. Remarquons que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1$$

donc $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\, \mathrm{P}_{n,k}(x)$

donc $\quad \left| \mathrm{B}_n(f)(x) - f(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \mathrm{P}_{n,k}(x)$

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f en x s'énonce :

$$\exists\, \delta > 0,\ \forall\, y,\ \left| y - x \right| < \delta \Rightarrow \left| f(y) - f(x) \right| < \varepsilon$$

δ dépend a priori de x. Considérons d'une part les k tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta$ et d'autre part les k tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta$. Notons D l'ensemble des k tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta$. On a :

$$\sum_{k \in \mathrm{D}} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \mathrm{P}_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k \in \mathrm{D}} \mathrm{P}_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{n,k}(x) = \varepsilon$$

Reste à majorer $\sum_{k \notin \mathrm{D}} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \mathrm{P}_{n,k}(x)$. f étant continue sur $[0, 1]$, f est bornée par un nombre M. On a donc :

$$\sum_{k \notin \mathrm{D}} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| \mathrm{P}_{n,k}(x) \leq 2\mathrm{M} \sum_{k \notin \mathrm{D}} \mathrm{P}_{n,k}(x)$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (nx - k)^2\, \mathrm{P}_{n,k}(x) &= n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_{n,k}(x) - 2n^2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \mathrm{P}_{n,k}(x) + n^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \mathrm{P}_{n,k}(x) \\
&= n^2x^2 - 2n^2x\, \mathrm{B}_n(t \to t)(x) + n^2\, \mathrm{B}_n(t \to t^2)(x) \\
&= n^2x^2 - 2n^2x^2 + n^2 \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right) \\
&\qquad \text{car } \mathrm{B}_n(t \to t)(x) = x \text{ et } \mathrm{B}_n(t \to t^2)(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \\
&= nx(1-x) \leq \frac{n}{4} \qquad \text{car } x \in [0, 1] \Rightarrow x(1-x) \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \notin \mathrm{D}} \mathrm{P}_{n,k}(x) &\leq \sum_{k \notin \mathrm{D}} \left(\frac{x - k/n}{\delta} \right)^2 \mathrm{P}_{n,k}(x) \qquad \text{puisque } \left| x - \frac{k}{n} \right| > \delta \text{ si } k \notin \mathrm{D} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x - k/n}{\delta} \right)^2 \mathrm{P}_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2\delta} \sum_{k=0}^{n} (nx - k)^2\, \mathrm{P}_{n,k}(x) \\
&\leq \frac{1}{4n\delta^2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k \notin D} \left| f(\frac{k}{n}) - f(x) \right| P_{n,k}(x) \leq 2M \frac{1}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}$$

En regroupant les majorants des deux sommes partielles, on a :

$$\left| B_n(f)(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} < 2\varepsilon \text{ pour } n \geq \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$$

On a ainsi montré, en utilisant la continuité de f, que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [0, 1], \exists N, \forall n \geq N, \left| B_n(f)(x) - f(x) \right| < 2\varepsilon$$

et donc que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) = f(x)$$

Ainsi, la suite $B_n(f)$ converge simplement vers f sur [0, 1].

Mais nous avons montré que, f étant continue sur le compact [0, 1], f est en fait uniformément continue. Cela signifie que δ ne dépend pas de x. Le nombre $N = \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$ ne dépend donc pas de x, et l'on a en fait :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in [0, 1], \left| B_n(f)(x) - f(x) \right| < 2\varepsilon$$

donc $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \sup_{x\in[0,1]} \left| B_n(f)(x) - f(x) \right| < 2\varepsilon$

et donc :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| B_n(f)(x) - f(x) \right| = 0$$

Ainsi, si la continuité simple permet de montrer que la suite des polynômes de Berntein converge simplement vers la fonction f, la continuité uniforme de f permet de montrer que cette suite converge uniformément vers f.

2- Le théorème de Weierstrass

Le résultat montré ci-dessus est un cas particulier du **théorème de Weierstrass**, auquel on peut se ramener pour traiter le cas général.

THEOREME

Pour toute fonction continue f sur [a, b], *il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f* sur [a, b].

Démonstration

❑ On se ramène à l'intervalle [0, 1] par le changement de variable :

$$t \in [0, 1] \to x = a + t(b - a) \in [a, b]$$

On a alors :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = f(a + t(b - a)) = g(t)$$

définissant ainsi une fonction continue g sur [0, 1]. On a donc, d'après le 1) :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| B_n(g)(t) - g(t) \right| = 0$$

et donc :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \left| B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - f(x) \right| = 0$$

Les $B_n(g)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ constituent une suite de polynômes convergeant uniformément vers f.

EXEMPLE :

On se propose de déterminer une suite de polynômes P_n convergeant uniformément vers la fonction $x \to |x|$ sur $[-1, 1]$.

❑ On peut appliquer la méthode précédente en posant :

$$f(x) = |x|,\ a = -1,\ b = 1$$

$$g(t) = |2t - 1|$$

$$\forall\, t \in [0, 1],\ B_n(g)(t) = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$P_n(x) = B_n(g)\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| \binom{n}{k} \frac{(1+x)^k (1-x)^{n-k}}{2^n}$$

3- Une application

PROPOSITION

Soit φ *une fonction continue sur* $[0, 1]$ *et telle que, pour tout* n, $\int_0^1 \varphi(t)\, t^n\, dt = 0$. *Alors* $\varphi = 0$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Si $\forall\, n$, $\int_0^1 \varphi(t)\, t^n\, dt = 0$, alors en prenant des combinaisons linéaires quelconques de ces égalités, on obtient :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 \varphi(t)\, P(t)\, dt = 0$$

Or, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers φ (par exemple les polynômes de Bernstein associés à φ). On a donc :

$$\forall\, n,\ \int_0^1 \varphi(t)\, P_n(t)\, dt = 0$$

et $$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)| = 0$$

Comme φ est bornée sur $[0, 1]$ comme fonction continue sur un compact, il existe M tel que :

$$\forall\, t \in [0, 1],\ |\varphi(t)| \leq M$$

donc $\forall\, t \in [0, 1]\ |\varphi(t)^2 - \varphi(t)P_n(t)| \leq M\, |\varphi(t) - P_n(t)| \leq M \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)|$

donc $\sup_{t\in[0,1]} \left|\varphi(t)^2 - \varphi(t)P_n(t)\right| \leq M \sup_{t\in[0,1]} \left|\varphi(t) - P_n(t)\right| \to 0$ quand n tend vers $+\infty$

On a donc montré que (φP_n) convergeait uniformément vers φ^2 sur le segment [0, 1]. On peut donc écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi(t)\, P_n(t)\, dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \varphi(t)\, P_n(t)\, dt = \int_0^1 \varphi^2(t)\, dt$$

donc $0 = \int_0^1 \varphi^2(t)\, dt$

φ^2 étant positive continue d'intégrale nulle, elle est identiquement nulle, donc $\varphi = 0$.

Cette proposition a une interprétation intéressante si on munit l'espace vectoriel $C^0([0, 1])$ des fonctions continues sur [0, 1] à valeurs dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire suivant :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\, dt$$

Soit F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. La proposition énoncée s'écrit alors :

$$\forall\, \varphi,\ \varphi \perp F \Rightarrow \varphi = 0$$

ou encore :

$$F^\perp = \{0\}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel strict de $C^0([0, 1])$, mais son orthogonal est nul. C'est un exemple de sous-espace vectoriel pour lequel $(F^\perp)^\perp \neq F$, puisque $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = C^0([0, 1])$.

La proposition est valide également sur tout segment $[a, b]$, mais fausse sur $[0, +\infty[$. En effet, soit :

$$\varphi(t) = \exp(-\sqrt[4]{t})\sin(\sqrt[4]{t})$$

Alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_0^\infty \varphi(t)\, t^n\, dt = 0$$

Pour le vérifier, on effectuera le changement de variable $u = \sqrt[4]{t}$, et on utilisera le fait que sin est la partie imaginaire d'une exponentielle complexe. On sera amené à calculer l'intégrale :

$$\int_0^\infty \exp(-u + iu)\, u^n\, du$$

par récurrence en intégrant par parties. Cet exemple est dû à Stieljes. Ce dernier a également prouvé que si on ajoutait l'hypothèse supplémentaire que :

$$\exists\, A,\ \exists\, B,\ \forall\, t,\ \left|\varphi(t)\right| \leq A\exp(-B\sqrt{t})$$

alors la proposition $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_0^\infty \varphi(t)\, t^n\, dt = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ redevenait vraie.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Soit (E, d) un espace métrique. Pour toute partie A de E et tout x élément de E, on pose :

$$d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$$

a) Montrer que l'application $x \in E \to d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

b) Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$

Exo.2) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^n$.

Exo.3) Soit E un espace complet, α un élément de $]0, \frac{1}{2}[$ et f une fonction de E dans E telle que :

$$\forall\ (x, y) \in E \times E,\ d(f(x), f(y)) \le \alpha\ (d(f(x), x) + d(f(y), y))$$

a) Montrer que : $\forall\ x,\ d(f(f(x)), f(x)) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} d(f(x), x)$

b) x_0 étant élément de E, on définit la suite $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.

c) En déduire qu'il existe un unique point fixe de f.

Exo.4) Soit $K > 0$, $b > 0$, E l'espace $C^0([0, b])$. Pour tout f dans E, on pose $\| f \| = \sup\limits_{t\ \in\ [0,b]} e^{-2Kt} \left| f(t) \right|$. Montrer que E est complet pour cette norme.

Exo.5) Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 1515, sous -espace vectoriel de l'espace $C^0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $N : P \in E \to N(P) = \sum\limits_{i=0}^{1515} \left| P(i) \right|$ définit une norme sur E.

b) Soit C un compact de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction continue f, on pose $N_C(f) = \sup\limits_{x\in C} \left| f(x) \right|$. On dit qu'une suite (f_n) de fonctions converge uniformément sur tout compact vers une fonction f, si, pour tout compact C, $\lim\limits_{n\to\infty} N_C(f_n - f)$. Montrer que, pour tout C de cardinal infini, la restriction de N_C à E est une norme sur E.

c) Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales.Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\exists\ \|\ \|$ norme sur E, $\exists\ P \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_n - P \| = 0$.

(ii) $\forall\ \|\ \|$ norme sur E, $\exists\ P \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| P_n - P \| = 0$.

(iii) $\forall$ C compact, $\exists\ f \in C^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to\infty} N_C(P_n - f)$

(iv) $\exists\ f \in C^0(\mathbb{R})$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$

Exo.6) Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$ une fonction continue, E étant compact. Montrer que :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M,\ \forall\ (x, y) \in E \times E,\ \delta(f(x), f(y)) \le \varepsilon + M\ d(x, y)$$

En ce sens, toute fonction continue sur un compact est "presque" lipschitzienne.

Exo.7) Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

i) Pour toute suite (x_n) convergeant vers un réel x, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$

ii) (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f.

Exo.8) Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. n désigne un entier, x un réel.

a) Montrer que, si, pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(na) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Montrer que, si, pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a + n) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) Montrer que, si f est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exo.9) Un espace métrique E est dit **séparable** s'il existe une partie dénombrable A dense. Si tel est le cas, montrer que l'ensemble des boules ouvertes $B(a, \frac{1}{n})$, $a \in A$, $n \in \mathbb{N}^*$ constitue une base **dénombrable** d'ouverts.
Par exemple $\mathbb{R}$ est séparable. En effet, $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$.

Exo.10) Soit $f : E \to E$ une isométrie, E étant un espace compact. Montrer que f est surjective. (On pourra raisonner par l'absurde en considérant une suite définie par $y_0 \notin f(E)$ et $\forall\ n$, $y_{n+1} = f(u_n)$). Donner un exemple où la conclusion est fausse, avec E non compact.

Exo.11) Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer l'équivalence entre (**théorème de Riesz**) :

(i) E est de dimension finie.

(ii) La boule unité fermée de E est compacte.

Exo.12) a) Donner l'exemple de deux espaces métriques E et F homéomorphes, tels que E soit complet mais pas F.

b) Montrer que, si f est un homéomorphisme de E sur F avec E complet, et si f^{-1} est uniformément continue, alors F est complet.

Exo.13) a) Soit E un espace métrique et C une partie de E. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un précompact P tel que $\forall\ x \in C$, $d(x, P) < \varepsilon$. Montrer que C est précompact.

b) Soit E un espace métrique et A une partie de E. Montrer que :

$$A \text{ précompact} \Leftrightarrow \overline{A} \text{ précompact.}$$

c) Soit E un espace métrique complet et A une partie fermée de E. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\forall\ x \in A$, $d(x, K) < \varepsilon$. Montrer que A est compact. Montrer que cette conclusion est fausse si E n'est pas complet.

2- Solutions

Sol.1) a) Pour tout z élément de A, tout x et tout y de E, on a :

$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

donc $\forall\ z \in A$, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, z)$

donc $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$

donc $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$

La relation étant symétrique en x et y, on a $\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leq d(x, y)$

b) $d(x, A) \Leftrightarrow \underset{y\in A}{\text{Inf}}\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ y \in A, d(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

En particulier, si A est fermé, $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

Sol.2) On peut résoudre cet exercice en utilisant les notions de limite supérieure et inférieure, se dispensant ainsi de la définition des limites avec les $\varepsilon > 0$. En changeant l'indice k en $n - k$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

D'une part :

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) \\ &\leq \exp\left(n \left(-\frac{k}{n}\right)\right) \qquad \text{car } \forall\ x, \ln(1 + x) \leq x \\ &\leq \exp(-k) \qquad \text{car } \forall\ x, \ln(1 + x) \leq x\end{aligned}$$

donc $$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

D'autre part, pour tout p et tout $n > p$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{p} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{p} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right)$$

Le second membre admet une limite quand n tend vers $+\infty$, qui est $\sum_{k=0}^{p} \exp(-k)$. Donc, en prenant la limite inférieure des deux membres, on a :

$$\mathit{liminf} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \geq \mathit{liminf} \sum_{k=0}^{p} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{p} \exp(-k)$$

Donc, pour tout p, on a :

$$\sum_{k=0}^{p} \exp(-k) \leq \mathit{liminf} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \mathit{limsup} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{e}{e-1}$$

Si on fait tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{e}{e-1} \leq \mathit{liminf} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \mathit{limsup} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \frac{e}{e-1}$$

donc $$\mathit{liminf} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \mathit{limsup} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1}$$

ce qui prouve que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$ converge vers $\frac{e}{e-1}$.

Sol.3) a) On remplace y par $f(x)$ dans l'inégalité vérifiée par f

b) Pour $n \geq 1$, $d(x_{n+1}, x_n) \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n-1})$ en remplaçant x par x_{n-1} dans le a)

donc, en posant $k = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \in \,]0,1[$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n\, d(x_1, x_0)$$

d'où $\quad d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^{n+p-1} + ... + k^n)\, d(x_1, x_0) \leq \dfrac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$

ce qui permet de montrer que la suite (x_n) est de Cauchy. Donc, E étant complet, elle converge.

c) Soit l la limite de (x_n). On a, pour tout n :

$$d(f(l), f(x_n)) \leq \alpha\, (d(f(l), l) + d(f(x_n), x_n))$$

donc $\quad d(f(l), x_{n+1}) \leq \alpha\, (d(f(l), l) + d(x_{n+1}, x_n))$

Si on passe à la limite, on obtient :

$$d(f(l), l) \leq \alpha\, (d(f(l), l)$$

or $\alpha < \dfrac{1}{2}$ donc $d(f(l), l) = 0$ et $f(l) = l$. l est un point fixe de f.

Si l et l' sont deux points fixes, alors, en reportant dans l'hypothèse :

$$d(f(l), f(l')) \leq \alpha\, (d(f(l), l) + d(f(l'), l'))$$

donc $\quad d(f(l), f(l')) \leq 0$

donc $\quad f(l) = f(l')$ et donc $l = l'$.

Sol.4) Il s'agit quasiment de la norme de la convergence uniforme. Soit (f_n) une suite de Cauchy pour la norme donnée. Soit $t \in [0, b[$. Alors :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \forall\, p \in \mathbf{N}, \left| f_n(t) - f_p(t) \right| = e^{2Kt}\, e^{-2Kt} \left| f_n(t) - f_p(t) \right| \leq e^{2Kb} \parallel f_n - f_p \parallel$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que :

$$\forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, \parallel f_n - f_p \parallel < \varepsilon\, e^{-2Kb}$$

On a alors :

$$\forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, \left| f_n(t) - f_p(t) \right| < \varepsilon$$

ce qui prouve que la suite réelle $(f_n(t))$ est de Cauchy. $\mathbf{R}$ étant complet, cette suite converge vers un nombre que nous noterons $f(t)$. Ceci étant valide pour tout t, on défini ainsi une fonction f sur $[0, b]$.

Il reste à montrer que (f_n) converge vers f pour la norme donnée. Soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, \parallel f_n - f_p \parallel < \varepsilon$$

donc $\quad \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, \forall\, t, e^{-2Kt} \left| f_n(t) - f_p(t) \right| < \varepsilon$

Faisons tendre p vers l'infini dans l'inégalité précédente :

$$\forall\, n \geq N, \forall\, t, e^{-2Kt} \left| f_n(t) - f(t) \right| \leq \varepsilon$$

donc $\quad \forall\, n \geq N, \parallel f_n - f \parallel < \varepsilon$

On a donc bien $\lim\limits_{n\to\infty} \parallel f_n - f \parallel = 0$

Sol.5) a) Soit M = 1515. Le fait que N soit une norme ne pose pas de difficultés. Par exemple :

$$N(P) = 0 \Rightarrow \forall\, i \in [\![0, M]\!], P(i) = 0$$

donc P admet M + 1 racines, mais $\deg(P) \leq M$. Donc P = 0.

b) De même, $N_C(P) = 0 \Rightarrow$ P admet une infinité de racines (les éléments de C) $\Rightarrow P = 0$

Les autres propriétés des normes se prouvent aisément.

c) L'équivalence entre (i) et (ii) découle du fait que, dans les espaces vectoriels de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Si la suite (P_n) converge vers P pour une norme donnée,

la suite convergera vers P pour toute autre norme. Cet exercice s'appliquera donc à l'espace des polynômes dont le degré est limité (par exemple par 1515), mais ni à l'espace de tous les polynômes ni à l'espace de toutes les fonctions continues.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) avec la même remarque que ci-dessus, en prenant pour norme les N_C, pour C infini. Si C est fini, on l'inclus dans un C' infini pour conclure. Le f de la conclusion de (iii) est l'élément P de E du (ii).
(iii) $\Rightarrow$ (iv) : car si (P_n) converge uniformément sur tout compact C vers une fonction f_C, alors il existe une même fonction f telle que, pour tout C, f et f_C coïncident sur C. En effet, pour tout x, prenons le compact $\{x\}$ et posons $f(x) = f_{\{x\}}(x)$. Pour tout compact C et tout x de C, (P_n) converge uniformément vers f_C sur C donc $(P_n(x))$ converge vers $f_C(x)$. Mais $(P_n(x))$ converge aussi vers $f_{\{x\}}(x) = f(x)$, donc $f_C(x) = f(x)$. (iii) énonce donc en fait que :

$$\exists f \in C^0(\mathbf{R}),\ \forall \text{ C compact},\ \lim_{n\to\infty} N_C(P_n - f) = 0$$

En passant, nous avons montré que, pour tout x, $(P_n(x))$ converge vers $f(x)$, i.e. la convergence simple de (P_n) vers f ou (iv). Il résultera de la dernière implication qui suit que f est en fait un polynôme de E.
(iv) $\Rightarrow$ (i) en prenant la norme N du a). En effet, si (P_n) converge simplement vers une fonction f, alors pour tout $i \in [\![0, M]\!]$, $(P_n(i))$ converge vers $f(i)$ donc $\sum_{i=0}^{M} |P_n(i) - f(i)|$ tend vers 0, donc $N(P_n - f)$ tend vers 0, à condition que l'on montre que f est un polynôme. Pour cela, procédons comme suit. Pour $0 \leq i \leq N$, considérons les polynômes interpolateurs de Lagrange :

$$L_i = \alpha_i X(X-1)...(X-i+1)(X-i-1)...(X-M)$$

où α_i est choisi de façon que $L_i(i) = 1$. Alors, pour tout polynôme P de E, $P - \sum_{i=0}^{N} P(i)\, L_i$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à M et s'annulant en les M + 1 points de $[\![0, M]\!]$. Donc il est nul. Donc $P = \sum_{i=0}^{M} P(i)\, L_i$. Appliquons cela à chacun des (P_n) : $\forall\ n$, $P_n = \sum_{i=0}^{M} P_n(i)\, L_i$. Par ailleurs, prenons le polynôme F défini par $F = \sum_{i=0}^{M} f(i)\, L_i$. On a alors, pour tout $i \in [\![0, M]\!]$, $F(i) = f(i)$, et comme $\sum_{i=0}^{M} |P_n(i) - f(i)|$ tend vers 0, on a aussi $N(P_n - F) = \sum_{i=0}^{M} |P_n(i) - F(i)|$ qui tend vers 0. Donc (P_n) converge vers le polynôme F pour la norme N.

Il est essentiel de limiter le degré des polynômes. Par exemple, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge simplement vers $f = \exp$, mais il n'y aucune convergence pour la norme N.

Sol.6) Par l'absurde, si la conclusion est fausse, alors :

$$\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ M,\ \exists\ (x, y),\ \delta(f(x), f(y)) > \varepsilon + M\, d(x, y)$$

En particulier, pour M = n entier, $\exists\ (x_n, y_n)$, $\delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon + n\, d(x_n, y_n)$, ou encore :

$$\forall\ n,\ d(x_n, y_n) < \frac{\delta(f(x_n), f(y_n)) - \varepsilon}{n}$$

E étant compact, on extrait de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément l, et de la sous-suite correspondante $(y_{\varphi(n)})$ une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ convergeant vers un élément h. La sous-suite $(x_{\psi(n)})$ continue à converger vers l. En passant à la limite, comme le numérateur du membre de droite tend vers $\delta(f(l), f(h)) - \varepsilon$ et est donc borné, on obtient $d(l, h) = 0$, donc $l = h$. Mais comme $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(f(x_n), f(y_n)) = \delta(f(l), f(h)) = \delta(f(l), f(l)) = 0$, il existe n tel que $\delta(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. Pour un tel n, on obtient $d(x_n, y_n) < 0$, ce qui est impossible.

Sol.7) ii) $\Rightarrow$ i). Si (x_n) converge vers x, (x_n) est bornée donc appartient à un intervalle compact I sur lequel il y a convergence uniforme. On a alors, en notant $\| f \| = \sup\limits_{x \in \mathrm{I}} |f(x)|$:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \| f_n - f \| + |f(x_n) - f(x)|$$

et chacun des deux termes du membre de droite tend vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$

i) $\Rightarrow$ ii) Par l'absurde, s'il existe un compact C sur lequel la convergence n'est pas uniforme. Alors :

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, \mathrm{N}, \exists\, n \geq \mathrm{N}, \exists\, x \in \mathrm{C}, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$$

Cette phrase exprime qu'il existe une infinité d'indices n pour lesquels $\exists\, x \in \mathrm{C}, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$. Notons x_n le x utilisé dans cette inégalité. Pour une infinité d'indice, on a $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$. C étant compact, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers un réel l. On a alors :

$$\forall\, n, |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| > \varepsilon$$

En outre, l'hypothèse i) entraîne que $\lim\limits_{n\to\infty} f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = f(l)$. On a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$ car f est continue en l. On a donc :

$$\varepsilon < |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| \leq |f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(l)| + |f(l) - f(x_{\varphi(n)})|$$

et chaque terme du membre de droite tend vers 0. En passant à la limite, on obtient la contradiction $0 < \varepsilon \leq 0$.

Sol.8) a) Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue :

$$\exists\, a > 0, \forall\, x, \forall\, y, |x - y| < a \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour cet a, il existe N tel que, pour $n \geq \mathrm{N}$, $|f(na)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{N}a$ et $x > \mathrm{A}$. Soit $n = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor$ (partie entière). On a $\frac{x}{a} \geq \mathrm{N}$ donc $n \geq \mathrm{N}$, donc $|f(na)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, mais par ailleurs, $n \leq \frac{x}{a} < n + 1$ donc $na \leq x < na + a$, donc $|x - na| < a$ donc $|f(x) - f(na)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $|f(x)| \leq \varepsilon$. On a prouvé que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{A}, \forall\, x > \mathrm{A}, |f(x)| \leq \varepsilon$$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On peut montrer que ce résultat reste vrai si f est seulement continue, mais c'est bien plus difficile. Il repose sur une propriété dite de Baire, exposée dans le chapitre L3/BANACH.PDF. La propriété prend alors le nom de **lemme de Croft**.

Le résultat est faux si f n'est pas continue. Considérer par exemple a irrationnel, et $f(x) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } \exists\, m \in \mathbb{Z}, x = m + a \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$. f n'admet pas de limite en $+\infty$, mais vérifie $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ pour tout x, car il existe au plus un entier n tel que $nx \in \mathbb{Z} + a$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue, soit m entier tel que $|x - y| \leq \dfrac{1}{m} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Pour tout $i \in [\![0, m]\!]$, on a $\lim_{n\to\infty} f(\dfrac{i}{m} + n) = 0$ donc il existe N_i tel que, pour $n \geq N_i$, $\left|f(\dfrac{i}{m} + n)\right| < \varepsilon$. Si on prend N le maximum des N_i, on a :

$$\forall\, n \geq N,\ \forall\, i \in [\![0, m]\!],\ \left|f(\frac{i}{m} + n)\right| < \varepsilon$$

Pour tout $x \geq N$, soit $n = \lfloor x \rfloor$ et $h = x - n \in [0, 1]$. On a $n \geq N$. Soit $i \in [\![0, m]\!]$ tel que $\left|h - \dfrac{i}{m}\right| \leq \dfrac{1}{m}$.

On a alors :

$$\left|(h + n) - (\frac{i}{m} + n)\right| = \left|h - \frac{i}{m}\right| \leq \frac{1}{m}$$

donc $\left|f(h + n) - f(\dfrac{i}{m} + n)\right| < \varepsilon$

donc $\left|f(x) - f(\dfrac{i}{m} + n)\right| < \varepsilon$

donc $|f(x)| \leq \left|f(x) - f(\dfrac{i}{m} + n)\right| + \left|f(\dfrac{i}{m} + n)\right| < 2\varepsilon$.

On a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, x \geq N, |f(x)| < 2\varepsilon$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ce résultat est faux si f est continue. Prendre $f(x) = 0$ sur $[0, 1[$, $f(n) = 0$ pour tout entier n strictement positif, $f(n + \dfrac{1}{2n}) = 1$, $f(n + \dfrac{1}{n}) = 0$ et f affine entre chacun des points précédents. Alors, pour tout a, $\lim_{n\to\infty} f(a + n) = 0$, mais f n'admet pas de limite en $+\infty$.

c) Ce résultat s'intitule le **lemme de Barbalat**. Par l'absurde, si la limite est non nulle, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) qu'on peut supposer croissante et tendant vers l'infini telle que $|f(x_n)| > \varepsilon$. Or il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall\, x, \forall\, y, |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc dans l'intervalle $[x_n - \delta, x_n + \delta]$, $|f(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc sur cet intervalle, en prenant n tel que $x_n \geq \delta$, on a :

$$0 < \varepsilon\delta \leq \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\, dx \leq \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} |f(x)|\, dx = \int_0^{x_n+\delta} |f(x)|\, dx - \int_0^{x_n-\delta} |f(x)|\, dx$$

et quand on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$0 < \varepsilon\delta \leq \int_0^{\infty} |f(x)|\, dx - \int_0^{\infty} |f(x)|\, dx = 0$$

ce qui est contradictoire.

Ce résultat est faux si f est seulement continue. Prendre par exemple f affine par morceaux, son graphe étant constitué de triangles dont la base est l'intervalle $[n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}]$ et la hauteur vaut 1, pour $n \geq 1$. f est intégrable mais n'admet pas de limite en $+\infty$.

Sol.9) L'ensemble des $B(a, \frac{1}{n})$ est dénombrable puisque $A \times \mathbf{N}^*$ l'est. Montrons maintenant que tout ouvert est réunion de ces boules. Soit U un ouvert et considérons la réunion V des $B(a, \frac{1}{n})$ incluses dans U. Cette réunion V est évidemment incluse dans U. Montrons qu'elle est égale à U. Soit x un élément de U. U étant ouvert, il existe un entier n, $B(x, \frac{1}{n}) \subset U$. A étant dense, il existe a élément de $A \cap B(x, \frac{1}{2n})$. On a alors $x \in B(a, \frac{1}{2n})$. Or $B(a, \frac{1}{2n}) \subset U$ car :

$$y \in B(a, \frac{1}{2n}) \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \Rightarrow y \in B(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow y \in U$$

On a donc $B(a, \frac{1}{2n}) \subset V$ et $x \in V$. Ainsi U = V.

Sol.10) Raisonnons par l'absurde avec $y_0 \notin f(E)$. L'application $x \to d(x, y_0)$ est continue sur E. E étant compact, elle admet un minimum δ qui est strictement positif car $f(E)$ est compact, donc fermé, et $y_0 \notin f(E)$ (cf Exo.1). Or $\forall\, n \geq 1$, $y_n = f(y_{n-1}) \in f(E)$, donc $d(y_0, y_n) \geq \delta$. Comme f est une isométrie, en appliquant f p fois, on a :

$$\forall\, p \geq 0, \forall\, n \geq 1, d(y_p, y_{n+p}) \geq \delta$$

qu'on peut exprimer plus simplement :

$$\forall\, p, \forall\, n, n \neq p \Rightarrow d(y_p, y_n) \geq \delta$$

E étant compact, on peut extraire une sous-suite convergente $(y_{\varphi(n)})$. On a encore :

$$\forall\, p, \forall\, n, n \neq p \Rightarrow d(y_{\varphi(p)}, y_{\varphi(n)}) \geq \delta > 0$$

mais ceci contredit le fait que, la suite $(y_{\varphi(n)})$ étant convergente, elle devrait être de Cauchy.
Donc f est surjective.
La conclusion est fausse si on enlève l'hypothèse de compacité de E. Prendre $E = \mathbf{R}^+$ et $f(x) = x + 1$.

Sol.11) Si E est de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés (voir L2/EVNORME.PDF). Donc la boule unité fermée est compacte.
Réciproquement, supposons la boule unité compacte :
❑ <u>Démonstration 1</u> : Si E n'est pas de dimension finie, construisons une suite dans la boule unité dont on puisse pas extraire une sous-suite convergente. Cela signifiera que la boule unité n'est pas compacte. On prend d'abord x_1 de norme 1. Supposons qu'on ait défini $x_1, ..., x_n$ tels que, pour tout $i \neq j$, $\| x_i - x_j \| \geq 1$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, ..., x_n$. E étant de dimension infinie, il existe a n'appartenant pas à F. L'application $f : z \in F \to \| a - z \|$ est continue sur F. Soit m sa borne inférieure. Il existe une suite (z_n) de F telle que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = m$. En particulier, la suite $(\| a - z_n \|)$ est bornée, donc la suite (z_n) également. F étant de dimension finie, il existe une sous-suite de (z_n) qui converge dans F, et quitte à remplacer (z_n) par sa sous-suite, on peut supposer que (z_n) converge vers $l \in F$. On a alors $m = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(l)$. Donc :

$$\forall\, z \in F, 0 < \| a - l \| \leq \| a - z \|$$

ou encore :

$$\forall z \in F,\ 1 \leq \frac{\| a - z \|}{\| a - l \|}$$

donc :

$$\forall z \in F,\ 1 \leq \frac{\| a - l + l - z \|}{\| a - l \|}$$

donc, en prenant $x_{n+1} = \dfrac{a - l}{\| a - l \|}$ de façon que $\| x_{n+1} \| = 1$ et en renommant $\dfrac{l - z}{\| a - l \|}$ en $-z$, l'inégalité ci-dessus devient :

$$\forall z \in F,\ 1 \leq \| x_{n+1} - z \|$$

et donc en particulier :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \| x_{n+1} - x_i \| \geq 1$$

Par récurrence, on définit ainsi les termes x_n d'une suite telle que, pour tout $i \neq j$, $\| x_i - x_j \| \geq 1$. Cette suite n'admet aucune sous-suite convergente car une telle sous-suite devrait être de Cauchy, ce qui serait contradictoire avec les inégalités $\| x_i - x_j \| \geq 1$. Donc la boule unité n'est pas compacte.

❑ <u>Démonstration 2</u> : Notons B_f la boule unité fermée, B la boule unité ouverte et, pour tout réel λ strictement positif, λB la boule ouverte de centre 0 de rayon λ. B_f est incluse dans la réunion des boules ouvertes $B(x, \frac{1}{2}) = x + \frac{B}{2}$, $x \in B_f$. Donc, comme on suppose B_f compacte, B_f est recouverte par un nombre fini de telles boules. Soit F le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les centres de ces boules. On a a fortiori :

$$B \subset F + \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B}{2} \subset F + \frac{B}{4} \qquad \text{en appliquant une homothétie de rapport } \frac{1}{2}, \text{ pour laquelle } \frac{F}{2} = F$$

$$\Rightarrow \quad B \subset F + F + \frac{B}{4} = F + \frac{B}{4} \qquad \text{car } F + F = F$$

et par récurrence, $B \subset F + \frac{B}{2^n}$. Donc, pour tout x de B, il existe $x_n \in F$ et $y_n \in \frac{B}{2^n}$ tels que $x = x_n + y_n$. Mais la suite (y_n) converge vers 0, donc x_n tend vers x. F étant un sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé dans E, donc $x \in F$. Ainsi, $B \subset F$, donc $E = F$ espace vectoriel de dimension finie.

Des exemples explicites de boules unité fermées mais non compactes sont donnés dans le chapitre L2/EVNORME.PDF.

Sol.12) a) Il est donné dans le paragraphe *Espaces complets* l'exemple de $\mathbb{R}$ avec la distance suivante $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. $(\mathbb{R}, d)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}, |\ |)$, Cependant, $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet car la suite des entiers y est de Cauchy sans être convergente.

b) Soit (y_n) une suite de Cauchy de F, et (x_n) la suite de E telle que, pour tout n, $y_n = f(x_n)$. Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. f^{-1} étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (y, z) \in F^2,\ d(y, z) < \alpha \Rightarrow d(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) < \varepsilon$$

La suite (y_n) est de Cauchy, donc, pour le α précédemment défini :

$$\exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N,\ d(y_n, y_p) < \alpha$$

Par conséquent, en prenant $y = y_n$ et $z = y_p$:

$$\exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N,\ d(f^{-1}(y_n), f^{-1}(y_p)) < \varepsilon$$

donc $\exists$ N, $\forall n \geq$ N, $\forall p \geq$ N, d(x_n, x_p) < ε
La suite (x_n) est de Cauchy. E étant complet, elle converge et f étant continue, la suite (y_n) = ($f(x_n)$) également. Donc F est complet.
On voit que, dans le a), ($\mathbf{R}$, $| \ |$) est complet, mais pas ($\mathbf{R}$, d). La raison en est que l'identité de ($\mathbf{R}$, d) dans ($\mathbf{R}$, $| \ |$) n'y est pas uniformément continue.

Sol.13) a) Soit ε > 0. Il s'agit de recouvrir C par un nombre fini de boules de rayon ε, centrées en des éléments de C. Soit P une partie précompacte de E telle que $\forall x \in$ C, d(x, P) < $\frac{\varepsilon}{4}$. P étant précompacte, il existe un recouvrement fini de P par des boules B(x_i, $\frac{\varepsilon}{4}$), $1 \leq i \leq n$, $x_i \in$ P. Montrons que les B(x_i, $\frac{\varepsilon}{2}$) recouvre C. Soit $x \in$ C. Comme d(x, P) < $\frac{\varepsilon}{4}$, il existe $y \in$ P tel que d(x, y) < $\frac{\varepsilon}{4}$. Comme $y \in$ P et que les B(x_i, $\frac{\varepsilon}{4}$) recouvent P, $\exists\, i \in [\![1, n]\!]$ tel que $y \in$ B(x_i, $\frac{\varepsilon}{4}$), i.e. d(y, x_i) < $\frac{\varepsilon}{4}$. Par inégalité triangulaire, d(x, x_i) < $\frac{\varepsilon}{2}$. Donc $x \in$ B(x_i, $\frac{\varepsilon}{2}$) et les B(x_i, $\frac{\varepsilon}{2}$) recouvrent C. On va modifier légèrement ce recouvrement pour que les boules soient centrées sur des éléments de C. On élimine les i pour lesquels B(x_i, $\frac{\varepsilon}{2}$) $\cap$ C = $\varnothing$. Pour les autres, soit $z_i \in$ B(x_i, $\frac{\varepsilon}{2}$) $\cap$ C. A nouveau en utilisant une inégalité triangulaire, B(z_i, ε) contient B(x_i, $\frac{\varepsilon}{2}$), et comme les B(x_i, $\frac{\varepsilon}{2}$) recouvrent C, il en est de même des B(z_i, ε), boules centrées sur des éléments de C.
Donc C est précompact.

b) Pour l'implication A précompact $\Rightarrow$ $\overline{\text{A}}$ précompact, prendre C = $\overline{\text{A}}$ et P = A pour tout ε > 0. Appliquer le a).

Pour l'implication $\overline{\text{A}}$ précompact $\Rightarrow$ A précompact, prendre C = A et P = $\overline{\text{A}}$ pour tout ε > 0. Appliquer le a).

c) Appliquer le a) avec C = A et P = K pour les parties précompactes. Il en résulte que A est précompact. Comme elle est de plus une partie fermée dans un espace complet, A est complet. Etant complet et précompact, A est compact.
Si E n'est pas complet, la conclusion peut être fausse. Prendre E = $\mathbf{R}$ avec la distance suivante d(x, y) = $|\arctan(x) - \arctan(y)|$. ($\mathbf{R}$, d) est homéomorphe à ($\mathbf{R}$, $| \ |$), de sorte que les parties [$-a$, a], a > 0, sont des compacts de ($\mathbf{R}$, d). Pour tout ε > 0, soit a tel que $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arctan(a)$. On a alors, pour tout x de $\mathbf{R}$, d(x, [$-a$, a]) < ε. Ainsi, la partie fermée A = $\mathbf{R}$ vérifie l'hypothèse de l'énoncé, mais A n'est pas compact.

◆