SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE

PLAN

I : Divers types de convergence

1- Définition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un même ensemble de définition D et à valeurs réelles ou complexes. On s'intéresse à la fonction f limite des f_n. Quel sens donner à cette limite ? L'idée la plus naturelle est de définir, si elle existe, la fonction f par $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, pour x quelconque dans D. Si une telle fonction f existe, on dit que f est la **limite simple** de la suite (f_n). Cette notion est la première qui a été utilisée, surtout à partir du XVIIIème, mais il s'avère qu'elle ne possède aucune propriété satisfaisante. En effet :

❑ Si les f_n sont continues, il n'en est pas de même de f.
EXEMPLE : $f_n(x) = x^n$ sur [0,1]. On a $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(1) = 1$, donc f est discontinue en 1.

Autrement dit, $\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est différent de $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$. On ne peut pas intervertir les limites sans précaution.

❑ Si les f_n sont dérivables et convergent simplement vers une fonction dérivable f, il n'y a aucune raison que les dérivées f_n' convergent, et même si c'est le cas, qu'elles convergent vers f'.

EXEMPLE : $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ sur $\mathbf{R}$. On a $f(x) = 0$ et donc $f'(x) = 0$. Mais $f_n'(x) = \cos(nx)$ n'admet en général aucune limite.

Autrement dit, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]$ est différent de $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$. On ne peut pas intervertir les symboles de limites et de dérivation sans précaution.

❑ Si les f_n sont intégrables sur I, et converge vers f, on peut très bien avoir :

$$\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $\int_{\mathrm{I}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est différent de $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$. On ne peut pas faire traverser le signe d'intégration par le symbole de limite sans précaution.

EXEMPLE 1 :

❑ Cet exemple est dû à Darboux[1], en 1875. D'une part, $\int_0^1 2n^2x\,\exp(-n^2x^2)\,\mathrm{d}x$ vaut $1 - \exp(-n^2)$, de limite égale à 1, et d'autre part, sous l'intégrale, la fonction tend vers 0 quand n tend vers l'infini pour tout x de $[0, 1]$. Il semble que ce soit là le premier exemple explicitement mis en évidence sur cette question.

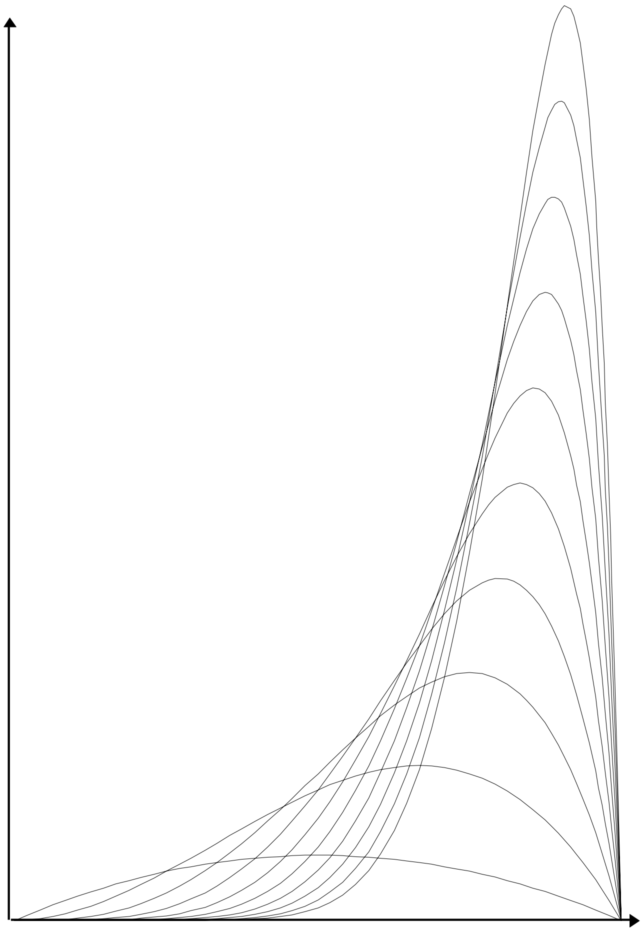
EXEMPLE 2 :

❑ Des exemples un peu plus simples peuvent être trouvés. Sur $\mathrm{I} = [0, 1[$, $f_n(x) = n^2x^n$ converge vers $f(x) = 0$. Pourtant $\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{n^2}{n+1}$ tend vers l'infini.

❑ Un exemple comparable s'applique à l'intervalle fermé $[0, 1]$ en prenant $f_n(x) = n^2x^n(1 - x)$. Cette suite continue à converger vers la fonction nulle, pourtant :

$$\int_0^1 n^2x^n(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \text{ tend vers 1.}$$

[1] Gaston Darboux, *Mémoire sur les fonctions continues*, Annales scientifiques de l'ENS, 2ème série, tome 4 (1875), p.77, 84, http://archive.numdam.org/ARCHIVE/ASENS/ASENS_1875_2_4_/ASENS_1875_2_4__57_0/ASENS_1875_2_4__57_0.pdf



Les fonctions $x \to n^2 x^n (1 - x)$ *convergent simplement vers* 0*, mais leur intégrale ne tend pas vers 0.*

EXEMPLE 3 :

❑ On peut vérifier par récurrence que, pour tout n, $\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \,\mathrm{d}t = 1$ (effectuer une intégration par parties). En faisant tendre n vers l'infini, on a donc :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \,\mathrm{d}t = 1$$

alors que $\int_0^{\infty} \lim_{n \to \infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \,\mathrm{d}t = 0$.

Plus généralement, pour $x \geq 0$, soit $\mathrm{I}_n(x) = \int_x^{\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} \,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties, on obtient la relation

$$\mathrm{I}_n(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n!} + \mathrm{I}_{n-1}(x)$$

donc (par récurrence) $\mathrm{I}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-x} \frac{x^k}{k!}$ en partant de $\mathrm{I}_0(x) = e^{-x}$. On a :

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to +\infty} \mathrm{I}_n(x) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

alors que :

$$\lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k!} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

donc $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{I}_n(x) \neq \lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_n(x)$

Le fait de permuter les deux symboles lim donne des résultats différents.

On est donc amené à chercher d'autres critères de convergence, ayant de meilleurs comportements. On peut en particulier définir $\displaystyle \lim_{n\to\infty} f_n$ au moyen de $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$, en choisissant une norme sur l'espace des fonctions (voir L2/EVNORME.PDF). Il existe cependant plusieurs normes possibles, non équivalentes. On dira que :

❑ $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge uniformément** vers f sur I si $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$, où $\| f \|_\infty = \mathrm{Sup}\ \{ |f(x)| \mid x \in \mathrm{I}\}$ (notée également $\mathrm{N}_\infty(f)$). Cette définition n'a de sens que pour les fonctions bornées.

❑ $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge en moyenne** vers f sur I si $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0$, où $\displaystyle \| f \|_1 = \int_{\mathrm{I}} |f(t)|\, \mathrm{d}t$ (notée également $\mathrm{N}_1(f)$). Cette définition n'a de sens que pour les fonctions intégrables sur I.

❑ $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **converge en moyenne quadratique** vers f sur I si $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_2 = 0$, où on a posé $\displaystyle \| f \|_2 = \sqrt{\int_{\mathrm{I}} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t}$, notée également $\mathrm{N}_2(f)$. Cette définition n'a de sens que pour les fonctions de carrés intégrables.

Nous utiliserons essentiellement les notions de convergence simple et uniforme. Regardons de plus près ces deux notions :

(i) La convergence simple sur I signifie :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{N},\ \forall\, n \geq \mathrm{N},\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

(ii) La convergence uniforme sur I signifie :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{N},\ \forall\, n \geq \mathrm{N},\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

car $\| f_n - f \|_\infty \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathrm{I},\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

La différence entre les deux définitions provient uniquement du fait que, dans la première, la valeur de N dépend du choix de x et de ε, alors que dans la deuxième, la valeur de N dépend de ε mais est indépendant du choix de x. La convergence uniforme entraîne a fortiori la convergence simple. Du point de vue pratique, pour montrer qu'une suite (f_n) de fonctions converge uniformément vers une fonction f, on détermine d'abord f en cherchant la limite simple de f, puis on essaie de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite (u_n) indépendamment de x et qui converge vers 0. On a en effet dans ce cas $\| f_n - f \|_\infty \leq u_n$ qui tend vers 0.

2- Exemples

❑ Soit $f_n(x) = x^n$, pour x élément de [0, 1]. Pour $x < 1$, la limite simple est 0. Pour $x = 1$, elle vaut 1. On a $\| f_n - f \|_\infty = 1$. Donc la convergence n'est pas uniforme. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \in [0, 1[$. On a $|x^n| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$, avec $N > \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(x)}$. On voit bien que N dépend de ε et de x et qu'il est impossible de prendre un même N sur tout l'intervalle [0, 1[. Par contre, si on se limite à un intervalle $[0, a]$, avec $a < 1$, alors on peut prendre $N > \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)}$, et la convergence est uniforme sur $[0, a]$, ce dont on peut s'apercevoir directement en écrivant que $\| f_n \|_\infty = a^n$, la norme étant ici calculée sur $[0, a]$.

❑ Soit $f_n(x) = \sin(\dfrac{x}{n})$ sur $\mathbb{R}$. La limite simple est 0, mais $\| f_n \|_\infty = 1$ qui ne tend pas vers 0, donc il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Cependant, si on se limite à un ensemble borné $[-a, a]$, on a :

$$\| f_n \|_\infty = \mathrm{Sup} \left\{ \left|\sin(\frac{x}{n})\right|, x \in [-a, a] \right\}$$

Pour n assez grand, (par exemple dès que $\dfrac{a}{n} < \dfrac{\pi}{2}$), la fonction $x \to \sin(\dfrac{x}{n})$ est croissante donc :

$$\forall x \in [-a, a], \left|\sin(\frac{x}{n})\right| \leq \sin(\frac{a}{n})$$

et $\quad \| f_n \|_\infty = \sin(\dfrac{a}{n})$ qui tend vers 0.

et la convergence est uniforme sur tout segment.

Le fait qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ est une situation qu'on rencontre fréquemment.

❑ Dans le même ordre d'idée, on dit qu'une suite (f_n) est **uniformément bornée** sur un intervalle I si la suite $(\| f_n \|_\infty)$ est bornée. Autrement dit :

$$\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq M$$

On peut très bien avoir une suite (f_n) qui est uniformément bornée sur tout segment d'un intervalle I mais qui n'est pas uniformément bornée sur I.

Ainsi, soit $I =]0, 2\pi[$ et $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$. On montrera que $f_n(x) = \dfrac{\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ en sommant la suite géométrique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ puis en prenant la partie imaginaire. Pour $x = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, on a $f_n(\dfrac{1}{n^{3/2}}) \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ non borné. Donc la suite n'est pas uniformément bornée sur $]0, 2\pi[$.

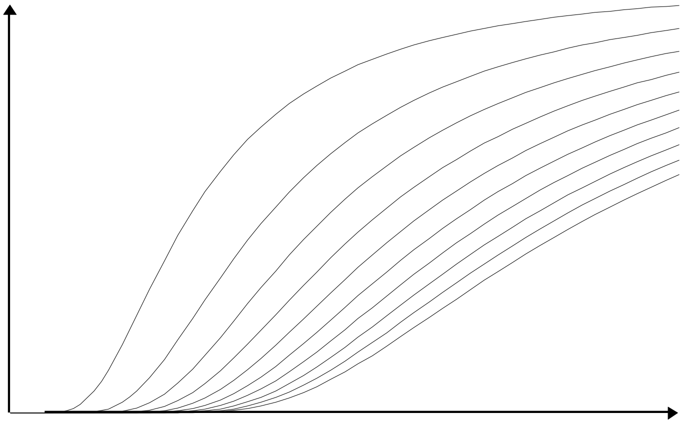
Cependant, pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, avec l'expression de f_n donnée ci-dessus, on a :

$$\forall x \in [\alpha, 2\pi - \alpha], |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

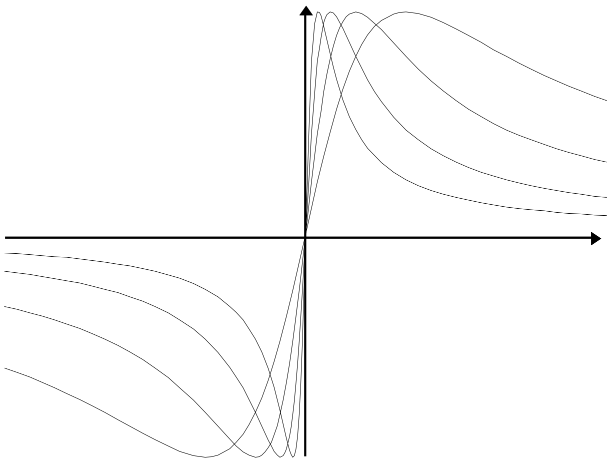
Donc la suite (f_n) est uniformément bornée sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ par le nombre $\dfrac{1}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$.

❑ Soit $f_n(x) = \dfrac{\cos(x^2 + n^2)}{n}$ sur $\mathbb{R}$. On a $\| f_n \|_\infty = \dfrac{1}{n}$, donc la suite converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

❑ Soit $f_n(x) = \left(\dfrac{x^2}{1 + x^2}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$. (f_n) converge simplement vers 0. Cependant $\| f_n \|_\infty = 1$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Elle l'est cependant sur tout segment.



❑ Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$. Pour tout x, la suite converge vers 0. Il y a donc convergence simple. Cependant, $f_n(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2}$ donc $\| f_n \|_\infty \geq \dfrac{1}{2}$ et il n'y a pas convergence uniforme.



❑ Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Dans le chapitre L1/INTEGRAL.PDF, nous avons approximé f par des fonctions en escalier. En particulier, on a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier Φ et Ψ telles que $\Phi \leq f \leq \Psi$ et $\Psi - \Phi \leq \varepsilon$. En particulier, on a :

$$0 \leq \Psi - f \leq \varepsilon$$

et donc $\| \Psi - f \|_\infty \leq \varepsilon$.

Si, pour chaque ε de la forme $\frac{1}{n}$, n entier strictement positif, on définit une telle fonction Φ_n en escalier, on a montré que f est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

3- Continuité et convergence uniforme

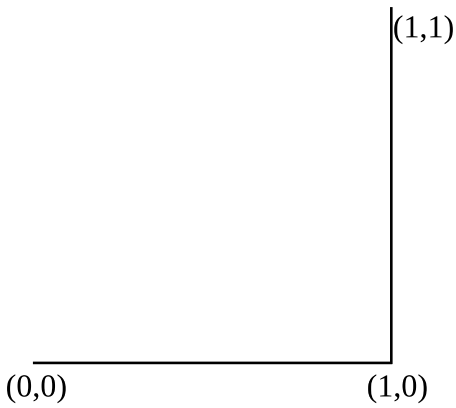
La notion de convergence uniforme résulte des tentatives de Cauchy au début du XIXème pour montrer que la limite d'une suite de fonctions continues est continue. Nous avons vu que ce résultat est faux dans le cas de la convergence simple, mais cette notion n'était pas encore dégagée du temps de Cauchy. Au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, la notion de fonction et de continuité était purement intuitive. En particulier, le fait qu'une limite de fonctions continues soit continue allait de soi et la question ne se posait pas. Cela était considéré comme une évidence. Cauchy, considérant que le concept de fonction et de limite se devait de reposer sur une rigueur analogue à celle développée en géométrie, a préféré introduire une définition arithmétique de la continuité.

> *Une fonction est continue si un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On remarquera que cette définition est donnée dans un langage intuitif. On peut tenter d'y reconnaître notre définition avec les ε et les α, mais cette tentation est anachronique. Ayant proposé une définition de la continuité, Cauchy se devait de démontrer le principe de continuité afin de prouver l'efficacité de sa définition, ce qu'il fit en 1821. Voici le raisonnement de Cauchy :

Si chaque f_n est continue, alors f est continue. En effet, pour tout x, il existe un $f_n(x)$ arbitrairement près de $f(x)$, et pour y suffisamment près de x, $f_n(y)$ est arbitrairement près de $f_n(x)$ par continuité de f_n. Pour n assez grand, $f_n(y)$ est arbitrairement près de $f(y)$. Donc pour y suffisamment près de x, $f(y)$ est arbitrairement près de $f(x)$.

Ce raisonnement, qu'on reconnaîtra être convaincant, est incorrect, comme le prouve l'exemple de la suite de fonction x^n, sur l'intervalle [0,1], qui converge vers la fonction f égale à 0 pour x élément de [0, 1[et à 1 en $x = 1$. Notons que les mathématiciens de l'époque auraient refusé de voir ici un contre-exemple, considérant que la suite de fonctions (x^n) converge vers :



qui est "visiblement" un graphe continu.

(Remarquons que cette vision originale existe encore aujourd'hui en physique, lorsque l'on représente la caractéristique d'une diode idéale, intensité I en ordonnée en "fonction" de la tension U en abscisse. Cette caractéristique s'obtient comme limite de la caractéristique d'une diode dont la tension seuil est V_0 et de résistance R_0. On a :

$I = 0$ si $U \leq V_0$

$I = \dfrac{U - V_0}{R_0}$ si $U \geq V_0$

On obtient une diode idéale en faisant tendre V_0 et R_0 vers 0)

La démonstration de Cauchy peut être formalisée de la façon suivante, en notation moderne. Soit $\varepsilon > 0$ et x donné :

i) Continuité de f_n en x :

$$\exists\ \alpha > 0, \left| y - x \right| < \alpha \Rightarrow \left| f_n(x) - f_n(y) \right| < \varepsilon$$

ii) Convergence de $(f_n(x))$ vers $f(x)$:

$$\exists\ N, \forall\ n > N, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

iii) Convergence de $(f_n(y))$ vers $f(y)$:

$$\exists\ M, \forall\ n > M, \left| f_n(y) - f(y) \right| < \varepsilon$$

Donc, en prenant $n > \mathrm{Max}(N, M)$, et $\left| y - x \right| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(y) \right| &\leq \left| f(x) - f_n(x) \right| + \left| f_n(x) - f_n(y) \right| + \left| f_n(y) - f(y) \right| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

Or nous savons que cette démonstration est fausse puisque nous possédons un contre-exemple. Cette contradiction entre la démonstration de Cauchy et l'existence de contre-exemples est bizarrement passée inaperçue pendant plusieurs années. Abel, en 1826, relève bien que des contre-exemples existent. Il admet cependant la validité du théorème de Cauchy pour les séries dites entières de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ce serait cependant une erreur de la rejeter sans l'analyser davantage et surtout sans savoir où se cache l'erreur. La raison pour laquelle la démonstration de Cauchy, quoique jugée correcte pendant ces années, ne s'applique pas à toutes les suites de fonctions continues, n'a pas été trouvée avant plusieurs années. En 1849, Seidel reproduisit la démonstration ci-dessus en précisant les relations fonctionnelles entre les variables. Soit $\varepsilon > 0$ et x donné :

i) Continuité de f_n en x :

$$\exists\ \alpha(\varepsilon, x, n) > 0, \left| y - x \right| < \alpha \Rightarrow \left| f_n(x) - f_n(y) \right| < \varepsilon$$

ii) Convergence de $(f_n(x))$ vers $f(x)$:

$$\exists\ N(\varepsilon, x), \forall\ n > N, \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

iii) Convergence de $(f_n(y))$ vers $f(y)$:

$$\exists\ M(\varepsilon, y), \forall\ n > M, \left| f_n(y) - f(y) \right| < \varepsilon$$

Donc, en prenant $n > \mathrm{Max}(N, M)$, et $\left| y - x \right| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(y) \right| &\leq \left| f(x) - f_n(x) \right| + \left| f_n(x) - f_n(y) \right| + \left| f_n(y) - f(y) \right| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

La difficulté provient que $\mathrm{Max}(N, M)$ dépend de ε, x et y, et que α dépend de ε, x et n et que la condition $n > \mathrm{Max}(N, M)$ fait que α dépend de ε, x et y, ce qui pose problème, y étant défini à partir de α.

La démonstration garde toute sa valeur si la condition suivante, utilisée implicitement par Cauchy, est vérifiée : N et M ne dépendent que de ε et non de x et y. On reconnaît là le nouveau concept de convergence uniforme, inconnu avant Cauchy, mais cependant utilisé implicitement.

Le théorème de Cauchy devient alors parfaitement correct :

THEOREME :

Soit a un point d'un intervalle I *sur lequel est définie une suite de fonctions* (f_n) *convergeant uniformément vers f sur* I. *Si les f_n sont continues en a, il en est de même de f.*

*Une suite de fonctions continues convergeant **uniformément** sur un intervalle* I *admet une limite continue.*

On notera la nécessité d'utiliser des définitions de limites utilisant les ε et α et allant au-delà de l'intuition, afin d'obtenir un résultat valide. Voici la démonstration moderne.

Démonstration :

❑ Soit $\varepsilon > 0$. Exprimons la convergence uniforme de (f_n) vers f :

$$\exists\ \mathrm{N},\ \forall\ n > \mathrm{N},\ \forall\ x,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Choisissons un tel $n > \mathrm{N}$, et exprimons la continuité de f_n en a :

$$\exists\ \alpha > 0,\ \forall\ x,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f_n(a) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|x - a| < \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} |f(a) - f(x)| &\le |f(a) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

et f est continue en a.

La proposition précédente s'exprime encore de la façon suivante pour une suite de fonctions continues (f_n) convergeant uniformément :

$$\lim_{n\to\infty}\ \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Il y a interversion possible des deux symboles limites, ce qui n'est pas le cas si la convergence est simple. On a en effet, sur [0, 1[:

$$\lim_{n\to\infty}\ \lim_{x\to 1} x^n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1}\ \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

Il suffit par ailleurs que la convergence soit uniforme sur tout segment de I, à défaut d'avoir lieu sur I tout entier, puisque la continuité en un point quelconque a de I pourra se montrer en considérant que a appartient à un segment inclus dans I.

Il convient d'attirer l'attention sur le chemin correct du raisonnement tenu dans ce cas. Prenons I = [0, +∞[à titre d'exemple. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur [0, +∞[convergeant uniformément sur tout intervalle [0, A[, A > 0, vers une fonction f. Alors f est continue sur [0, +∞[en raison des deux implications successives suivantes :

$\forall$ A > 0, (f_n) converge uniformément vers f sur [0, A] et les f_n sont continues

$\Rightarrow$ $\forall$ A > 0, f est continue sur [0, A]

$\Rightarrow$ f est continue sur [0, +∞[

La première implication résulte du théorème de Cauchy.

La deuxième implication résulte du fait que tout $a \in [0, +\infty[$ peut être disposé dans un intervalle [0, A], avec A > a, intervalle sur lequel f est continue, donc f est continue en a.

Il est fréquent de voir des étudiants tenir le raisonnement erroné suivant :

$\forall$ A > 0, (f_n) converge uniformément vers f sur [0, A] et les f_n sont continues

$\Rightarrow$ (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, +\infty[$ et les f_n sont continues

$\Rightarrow$ f est continue sur $[0, +\infty[$

La première implication est fausse, comme nous l'avons montré plus haut dans divers exemples, tels que la suite de fonction $\sin(\frac{x}{n})$. Il est facile de se tromper de raisonnement. Il convient de choisir le bon chemin et de ne pas passer par la voie rouge (CVU désigne la convergence uniforme) :

$$\begin{array}{ccc}
\text{CVU et continuité des } f_n \text{ sur tout } [0, A] & \Rightarrow & \text{continuité de } f \text{ sur tout } [0, A] \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{CVU et continuité des } f_n \text{ sur } [0, +\infty[& \Rightarrow & \text{continuité de } f \text{ sur } [0, +\infty[
\end{array}$$

Il en sera de même plus loin pour les séries de fonctions.

On peut également considérer le cas où a est une borne de I.

PROPOSITION

Soit (f_n) *une suite de fonctions convergeant* ***uniformément*** *vers* f *sur un intervalle* I *et soit* a *une borne de* I. *Si les limites* $l_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$ *existent, alors* $\lim_{n\to\infty} l_n = l$ *existe,* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe et vaut* l.

Démonstration :

❑ Prouvons d'abord que $\lim_{n\to\infty} l_n = l$ existe. Pour cela, il suffit de montrer que (l_n) forme une suite de Cauchy. Montrons que la suite (f_n) forme une suite de Cauchy (voir L1/SUITES.PDF) pour la norme uniforme. On a, pour tout n et tout p :

$$\| f_n - f_p \|_\infty \leq \| f_n - f \|_\infty + \| f - f_p \|_\infty$$

or

$$\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, \| f_n - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \| f_n - f_p \|_\infty < \varepsilon$$

Cela signifie que :

$$\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$$

L'inégalité étant vérifiée pour tout x, elle est valable (au sens large) lorsque x tend vers a, ce qui donne :

$$\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, |l_n - l_p| \leq \varepsilon$$

Il en résulte que la suite (l_n) est de Cauchy.

❑ Etant de Cauchy, la suite (l_n) converge vers un réel l. Montrons que $l = \lim_{x\to a} f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|$$

Il existe N tel que, pour tout x de I et tout $n \geq$ N, on ait $\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$ car la convergence est uniforme. Il existe M tel que, pour tout $n >$ M, on ait $\left|l_n - l\right| < \varepsilon$ car (l_n) converge vers l. Soit $n >$ Max(M, N). Pour un tel n, il existe un voisinage V de a, tel que, pour tout x dans V, on ait $\left|f_n(x) - l_n\right| < \varepsilon$ car l_n est la limite de f_n en a. On a alors, pour tout x dans V, $\left|f(x) - l\right| < 3\varepsilon$.

EXEMPLES :

❑ Soit $u_0(x) = x > 0$ et $v_0(x) = 1$. On définit par récurrence les deux suites de fonctions :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \quad \text{et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

On vérifiera facilement que, pour tout x, et tout $n \geq 1$, on a : $u_n \leq v_n$, (u_n) croît alors que (v_n) décroît. La suite (u_n) est croissante majorée par v_1, donc, pour tout x, la suite $(u_n(x))$ est croissante majorée, donc converge. Autrement dit, la suite de fonctions (u_n) admet une limite simple f. De même la suite (v_n) converge simplement vers une fonction g. Passant à la limite dans les relations de récurrence, on obtient $f = g$. Par récurrence également, les fonctions u_n et v_n sont continues. En est-il de même de leur limite commune f ? Pour cela, cherchons si la suite (v_n) converge uniformément vers f. On a :

$$0 \leq v_{n+1}(x) - f(x) = \frac{u_n(x) + v_n(x)}{2} - f(x) = \frac{v_n(x) - f(x)}{2} + \frac{u_n(x) - f(x)}{2} \leq \frac{v_n(x) - f(x)}{2}$$

puisque $\dfrac{u_n(x) - f(x)}{2} \leq 0$. Donc :

$$0 \leq v_n(x) - f(x) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\,(v_1(x) - f(x)) = \frac{1}{2^n}\,(1 - f(x) + x - f(x))$$

Pour chaque x, on a :

ou bien $1 \leq f(x) \leq x$ et $1 - f(x) + x - f(x) \leq x - f(x) \leq x - 1$

ou bien $x \leq f(x) \leq 1$ et $1 - f(x) + x - f(x) \leq 1 - f(x) \leq 1 - x$

Dans tous les cas :

$$\left|v_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|1 - x\right|$$

On n'obtient pas ainsi de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ mais si on se limite à un segment I = [0, A], alors $\| v_n - f \|_\infty \leq \dfrac{1}{2^n}$ (A + 1), donc il y a convergence uniforme sur [0, A], donc f continue sur [0,A]. A étant quelconque, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4- Cas des séries

On rappelle que $\| f \|_\infty$ désigne $\displaystyle\sup_{x \in \mathrm{I}} \left|f(x)\right|$.

PROPOSITION-DEFINITION

Soit $(\sum f_n)$ une série de fonctions définie sur un intervalle I, *telle que la série $\sum \| f_n \|_\infty$ soit convergente, ou, de manière équivalente, pour laquelle il existe une série de réels positifs convergente $(\sum \alpha_n)$ telle que : $\forall\ n$, $\| f_n \|_\infty \leq \alpha_n$. Alors la série $\sum f_n$ est dite* **normalement convergente**. *Dans ce cas, la série converge uniformément.*

Si les f_n sont continues en un point de I, *il en est de même de la somme.*

Toujours sous l'hypothèse de la convergence normale, si les f_n admettent une limite l_n en a, borne de I, *alors* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *aussi,* $\sum l_n$ *est une série convergente et* $\lim\limits_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n$.

Démonstration :

❑ Pour tout x, la série $\sum f_n(x)$ converge. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement**. En effet, pour tout x élément de I, on a $\lvert f_n(x)\rvert \leq \| f_n \|_\infty$, et puisque la série $\sum \| f_n \|_\infty$ converge, on en déduit que, pour tout x, la série $\sum f_n(x)$ converge. Nous noterons $f(x)$, la somme de la série.

La convergence de la suite des sommes partielles est uniforme, ce qu'on abrège en disant que la série **converge uniformément**. En effet :

$$\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \|_\infty = \| \sum_{k=0}^{\infty} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k \|_\infty = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \|_\infty$$

Or, pour tout $p \geq n$ et tout x de I, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \lvert f_k(x)\rvert \leq \sum_{k=n+1}^{p} \| f_k \|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$$

Faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$$

donc $\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty$

Mais $\sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \| f_k \|_\infty - \sum_{k=0}^{n} \| f_k \|_\infty$, reste d'une série convergente, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $\| f - \sum_{k=0}^{n} f_k \|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

La propriété de continuité en un point d'une série normalement convergente de fonctions continues en ce point, ou la propriété sur les limites, provient alors du résultat analogue sur les suites de fonctions convergeant uniformément, compte tenu du fait que la suite des sommes partielles d'une série de fonctions convergeant normalement converge uniformément.

On peut résumer les diverses notions de convergence des séries sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} \text{CV normale} \Rightarrow \text{CV uniforme} \Rightarrow \text{CV simple en tout point} \\ \quad\ \Downarrow \\ \text{CV absolue en tout point} \end{array}$$

La condition de convergence normale d'une série est plus forte que celle de convergence uniforme. Elle ne lui est pas équivalente. On peut trouver des séries uniformément convergentes mais pas normalement. Par exemple, soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ pour $x \in [0, 1]$. La série $\sum f_n$ ne converge pas normalement car :

$$\| f_n \|_\infty = \frac{1}{n} \text{ et } \sum \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

mais elle converge uniformément. En effet, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$ d'après la majoration par son premier terme du reste d'une série alternée vérifiant le critère de Leibniz. Voir L2/SERIES.PDF.

donc $\left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k} \right| \leq \dfrac{1}{n+1}$

donc $\| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n \|_\infty \leq \dfrac{1}{n+1}$

et le reste de la série converge bien uniformément vers 0.

EXEMPLES :

❑ $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est une fonction continue. En effet, pour tout x, $\left| \dfrac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ et la série est normalement convergente (donc uniformément convergente). Chaque terme de la somme étant continue, la somme est elle-même continue. Ce type de situation est trivial à régler.

❑ $S(x) = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(2nx)$. Outre le fait qu'il est difficile de savoir si la série converge, puisque son terme général change de signe et qu'il est majoré en valeur absolue par $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1}$ qui diverge, on ne peut rien conclure sur la continuité de la somme. La série n'est pas normalement convergente. Ce type de série est délicat à traiter. On sera peut-être surpris d'apprendre que la somme vaut $\cos(x)$ sur l'intervalle $]0, \pi[$ (noter l'intervalle **ouvert**. Il y a discontinuité en 0). Le lecteur incrédule de voir un **cosinus** exprimé comme somme d'une série de **sinus** est invité à tracer quelques sommes partielles(de rang assez élevé pour s'en convaincre). S étant impaire, elle vaut $-\cos(x)$ sur $]-\pi, 0[$.

❑ Par contre, la série $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$ est normalement convergente et donc continue. (On peut montrer qu'elle vaut, précisons-le, $\sin(x)$ pour $0 < x < \pi$. La justification de cette affirmation, ainsi que celle de l'exemple précédent et de l'exemple suivant, peut se faire au moyen du chapitre L3/FOURIER.PDF).

❑ Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$? On est tenté de dire que la limite est nulle, puisque $\lim\limits_{x\to 0} xe^{-nx} = 0$ et qu'une série de termes nuls est nulle. Mais on a ainsi calculé $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{x\to 0} xe^{-nx}$ et non $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$. Les deux sont égaux lorsque la convergence est normale, par exemple sur $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$. Mais ce n'est pas le cas sur $[0, 1]$. La fonction $f_n : x \to xe^{-nx}$ admet un maximum en $\dfrac{1}{n}$ qui vaut $\dfrac{1}{en}$, de sorte que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty$ diverge. En fait, $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$ se calcule directement. La série est en effet une série géométrique de somme $\dfrac{x}{1-e^{-x}}$ et de limite 1 quand x tend vers 0. Mais qu'en aurait-il été si on n'avait pas pu calculer la somme ?

❑ Le même problème se pose pour $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx}$, pour $x > 0$. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx}$? Là aussi, contrairement à ce qu'on aurait pu croire, la limite est non nulle. En effet :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx} = \mathrm{Im}(\sum_{n=0}^{\infty} e^{inx}\, e^{-nx}) = \mathrm{Im}(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{ix-x})^n)$$

On reconnaît la somme d'une suite géométrique de raison e^{ix-x}, dont le module e^{-x} est élément de $]0, 1[$. Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx} = \mathrm{Im}\, \frac{1}{1-e^{ix-x}} = \mathrm{Im}\, \frac{1-e^{-ix-x}}{(1-e^{-ix-x})(1-e^{ix-x})} = \frac{\sin(x)e^{-x}}{1-2\cos(x)e^{-x}+e^{-2x}}$$

$$= \frac{\sin(x)}{e^x - 2\cos(x) + e^{-x}} = \frac{\sin(x)}{2(\mathrm{ch}(x)-\cos(x))} \sim \frac{1}{x} \text{ quand } x \text{ tend vers } 0.$$

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin(nx)\, e^{-nx} = +\infty$!!!

❑ Un exemple comparable est donné par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x}{(1+x)^n}$ avec $x > 0$. On a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x}{(1+x)^n} = 1 + x$ et donc :

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = 1$$

alors que $$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)^n} = 0$$

❑ Un dernier exemple est donné par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-x} \dfrac{x^n}{n!}$ qui vaut 1 pour tout x puisque $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1$. On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^n}{n!} = 1$$

alors que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Une étude des fonctions $f_n : x \to e^{-x} \dfrac{x^n}{n!}$ sur $[0, +\infty[$ pour $n \geq 1$ montre que la dérivée a même signe que $1 - \dfrac{x}{n}$. La fonction $|f_n|$ admet un maximum en $x = n$, qui vaut $f_n(n) = e^{-n} \dfrac{n^n}{n!} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ (en utilisant la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Voir les exercices pour une démonstration de cette formule). Comme la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

❑ Comme pour les suites, on peut se contenter de la convergence normale sur tout segment de I, en suivant le bon raisonnement suivant (donné dans le cas où I = $[0, +\infty[$ et en évitant le raisonnement erroné rouge (CVN désigne la convergence normale) :

CVN et continuité des f_n sur tout $[0, A] \Rightarrow$ continuité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sur tout $[0, A]$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

CVN et continuité des f_n sur $[0, +\infty[$ $\Rightarrow$ continuité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sur $[0, +\infty[$

❑ C'est ce type de raisonnement que nous appliquons ci-dessous, y compris pour des fonctions à valeurs complexes, avec I = $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Pour z ayant une partie réelle strictement supérieure à 1, on pose $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ (fonction **zeta de Riemann**). Alors $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| \leq \dfrac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}$, donc la série converge simplement. De plus, si on choisit A > 1 et si on se place sur le demi-plan $P_A = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > A\}$, alors $\left|\dfrac{1}{n^z}\right| \leq \dfrac{1}{n^A}$ et la série est normalement convergente, donc continue. A pouvant être choisi arbitrairement, on en déduit que ζ est continue sur $P_1 = \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ puisque tout z de P_1 se trouve dans un certain P_A. On connaît quelques valeurs de ζ , par exemple tous les $\zeta(2p)$ avec p entier, et en particulier $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.

II : Intégration et dérivation

Sauf dans les cas les plus simples, aucune démonstration ne sera donnée. En effet, la notion d'intégration connue à ce niveau d'enseignement est l'intégrale de Riemann (voir L1/INTEGRAL.PDF) portant sur les fonctions continues par morceaux. Or une suite ou une série de fonctions continues par morceaux peut fort bien converger vers une fonction qui n'est pas continue par morceaux. Pour traiter ce type de cas, il faudrait développer une théorie de l'intégration plus vaste (Intégrale de Lebesgue. Voir L3/LEBESGUE.PDF).

A titre d'exemple, soit (f_n) la suite de fonctions définies comme suit :
Si p et q sont deux nombres premiers, on définit :

$$f_{2^p3^q}(x) = 0 \text{ sauf pour } x = \frac{p}{q} \text{ pour lequel on pose } f_{2^p3^q}\left(\frac{p}{q}\right) = 1$$

Pour tout n qui n'est pas de la forme 2^p3^q avec p et q premiers entre eux, $f_n = 0$. Les fonctions f_n sont donc des fonctions identiquement nulles, sauf en un point au plus. Elles sont donc continues par morceaux et d'intégrale nulle (quel que soit l'intervalle sur lequel on intègre). La fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, quant à elle, est nulle partout, sauf aux points rationnels positifs, où elle vaut 1 (**fonction de Dirichlet**). Elle n'est pas continue par morceaux et son intégrale ne peut être définie dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Il se trouve que, dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on a bien $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n = 0$, mais si nous pouvons définir le membre de droite, le membre de gauche a une définition hors de portée du présent chapitre. On touche là l'une des plus grosses difficultés auxquelles se sont affrontés les mathématiciens entre 1700 et 1900 : définir l'intégrale de fonctions les plus générales possibles.

Nous supposerons donc dans la suite que toutes les fonctions sont continues par morceaux, (y compris les limites de suites de fonctions ou les sommes de séries de fonctions, ce qui n'est pas toujours aisé à vérifier).

1- Convergence uniforme sur un segment

Nous l'avons déjà vu, $\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt$ pouvait être différent de $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt$. Il faut là aussi des hypothèses supplémentaires pour avoir l'égalité.

PROPOSITION :
Soit (f_n) *une suite de fonctions continues par morceaux sur un* ***segment*** I = $[a, b]$ *et convergeant* ***uniformément*** *vers une fonction f. Alors* $\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt$

Démonstration :
❑ On a pour tout fonction continue g :

$$\| g \|_1 = \int_a^b |g(t)|\, dt \leq (b-a) \| g \|_\infty$$

donc :

$$\| f_n - f \|_1 \leq (b-a) \| f_n - f \|_\infty$$

de sorte que la convergence de (f_n) pour la norme uniforme entraîne la convergence en moyenne de (f_n). Comme $\left| \int_I f_n(t)\, dt - \int_I f(t)\, dt \right| \leq \int_I |f_n(t) - f(t)|\, dt = \| f_n - f \|_1$, le théorème s'en déduit immédiatement.

On notera l'hypothèse que I est un **segment**, puisque la démonstration utilise la quantité $b - a$, longueur de l'intervalle I. La proposition ne peut donc s'appliquer sur des intégrales généralisées sur $[0, +\infty[$ par exemple.

EXEMPLES :

❑ Soient $0 < a < b$:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \int_a^b e^{-ux}\,du\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \int_0^n e^{-ux}\,dx\,du$$

(d'après le théorème de Fubini, voir L2/INTMULT.PDF)

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \frac{1 - e^{-un}}{u}\,du$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^{-un}}{u}\,du \qquad \text{(interversion à justifier ci-après)}$$

$$= \int_a^b \frac{1}{u}\,du = \ln \frac{b}{a}$$

Il suffit pour prouver l'interversion de montrer que la suite de fonctions $\dfrac{1 - e^{-un}}{u}$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{u}$ sur $[a, b]$, ce qui est le cas puisque la norme uniforme de la différence est majorée par $\dfrac{e^{-an}}{a}$.

Une autre démonstration de la valeur de l'intégrale est donnée dans L2/SERIES.PDF.

❑ Si I n'est pas un segment, les f_n peuvent toutes être intégrables, mais l'intégrale de f n'est pas la limite des intégrales des f_n. Considérons par exemple la suite de fonctions continues et affines par morceaux définies par :

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} \qquad \text{sur } [0, n]$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{x}{n^2} \text{ sur } [n, 2n]$$

$$= 0 \qquad \text{sur } [2n, +\infty[$$

$\| f_n \|_\infty = \dfrac{1}{n}$ donc la suite converge uniformément vers 0, cependant, son intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut 1.

❑ Il est également possible qu'on ait une suite de fonctions intégrables (f_n) convergeant uniformément vers une fonction f non intégrable. Soit $f_n = \dfrac{1}{x^{1 + 1/n}}$ sur $[1, +\infty[$. Les f_n sont intégrables d'intégrale n et convergent uniformément vers $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On vérifiera en effet que le maximum de

$| f - f_n |$ est atteint pour $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ et que la valeur de ce maximum tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

❑ On a des difficultés analogues pour les séries. Par exemple, sur [0, 1[, la série $\sum_{n\geq 1} (nx^{n-1} - (n+1)x^n)$ est une série télescopique de somme égale à 1, de sorte que :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (nx^{n-1} - (n+1)x^n)\,\mathrm{d}x = 1$$

Par contre, $\int_0^1 nx^{n-1} - (n+1)x^n\,\mathrm{d}x = 1 - 1 = 0$ de sorte que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 nx^{n-1} - (n+1)x^n\,\mathrm{d}x = 0$. On a donc :

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (nx^{n-1} - (n+1)x^n)\,\mathrm{d}x \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 nx^{n-1} - (n+1)x^n\,\mathrm{d}x$$

Pour permuter les symboles $\sum$ et $\int$, des hypothèses supplémentaires sont donc nécessaires[2].

PROPOSITION

Soit $\sum f_n$ *une série convergeant* ***normalement*** *sur un* ***segment*** $I = [a, b]$. Alors :

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k$$

<u>Démonstration</u> :

❑ Le résultat résulte de la proposition précédente sur les suites, en prenant la suite des sommes partielles, qui converge uniformément vers la somme de la série. Une démonstration directe peut également être donnée.

$$\int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t - \int_I \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

la permutation des symboles $\sum_{k=0}^{n}$ et $\int_I$ relève de la linéarité de l'intégrale

$$= \int_I \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

[2] Un exemple historique comparable se trouve dans le cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Camille Jordan (1893), p.318, disponible sur Gallica à l'adresse http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29024j.r=

$$= \int_{\mathrm{I}} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad \left| \int_{\mathrm{I}} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathrm{I}} f_k(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{\mathrm{I}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| f_k(t) \right| \mathrm{d}t \leq \int_{\mathrm{I}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_{\infty}\,\mathrm{d}t = (b-a) \sum_{k=n+1}^{\infty} \| f_k \|_{\infty}, \text{ qui}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

EXEMPLES :

❑ $$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \arctan(\frac{x}{n}) \right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}$$

En effet, $\| \frac{1}{n^2+x^2} \|_{\infty} = \frac{1}{n^2}$ terme général d'une série convergente. Donc la série $\sum \frac{1}{n^2+x^2}$ converge normalement.

❑ Dans le contre-exemple de $\sum_{n=1}^{\infty} (nx^{n-1} - (n+1)x^n)$ sur $[0, 1]$, comme l'intégrale de la série n'est pas égale à la série de l'intégrable, la série ne peut converger normalement. De fait, l'étude de la fonction $f_n : x \to nx^{n-1} - (n+1)x^n$ donne, pour $n \geq 2$, une dérivée $n(n-1)x^{n-2} - n(n+1)x^{n-1}$ qui s'annule en $\frac{n-1}{n+1}$. On a $f_n(\frac{n-1}{n+1}) = n\,(\frac{n-1}{n+1})^{n-1} - (n+1)(\frac{n-1}{n+1})^n$ quantité de limite $\frac{1}{e^2}$, comme on pourra le vérifier. f_n croît de 0 jusqu'à cette valeur puis décroît jusqu'à $f_n(1) = -1$. Donc, pour n assez grand, $\| f_n \|_{\infty} = 1$ et $\sum \| f_n \|_{\infty}$ diverge.

2- Theoreme de la convergence dominée

THEOREME

Soit (f_n) *une suite de fonctions continues par morceaux à valeurs réelles ou complexes, et convergeant simplement sur un intervalle* I *quelconque vers une fonction* f (*continue par morceaux*). *On suppose qu'il existe une fonction* φ (*continue par morceaux*) *positive et intégrable sur* I *telle que, pour tout n,* $|f_n| \leq \varphi$. *Alors* f *et les* f_n *sont intégrables sur* I *et* $\int_{\mathrm{I}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n$.

Ce théorème est admis. Une démonstration en est donnée dans le chapitre L3/LEBESGUE.PDF. On rappelle que le fait qu'une fonction f soit intégrable sur un intervalle I signifie que $\int_{\mathrm{I}} |f|$ est une intégrale généralisée convergente.

La condition $\forall\, n$, $|f_n| \leq \varphi$ avec φ intégrable sur I s'appelle **hypothèse de domination**.

EXEMPLE :

❑ Soit $f_n(x) = x^n\, e^x$ sur $[0, 1]$. Alors $f_n(x)$ tend simplement vers $f(x) = 0$ sur $[0, 1[$ et $f(1) = e$. En outre, les f_n sont toutes majorées par la fonction constante $\varphi = e$, intégrable sur $[0, 1]$. Le théorème s'applique et :

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0$$

On aurait pu trouver ce résultat par le raisonnement plus élémentaire suivant, consistant à majorer l'intégrale de f_n :

$$0 \leq \int_0^1 f_n \leq \int_0^1 x^n\, e\, \mathrm{d}x = \frac{e}{n+1} \text{ qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

On notera que le théorème de convergence dominée est vérifié dans les deux cas particuliers suivants :

- Suite décroissante de fonctions intégrables positives : il suffit de prendre $\varphi = f_0$.

- Suite croissante de fonctions intégrables positives, convergeant vers une fonction f intégrable. Il suffit de prendre $\varphi = f$.

On pourra faire un parallèle entre le théorème de convergence dominée des intégrales et le théorème de passage à la limite pour une série de fonctions convergeant normalement. Ci-dessous, nous avons souligné en couleur les analogies. On passe d'une situation à l'autre en remplaçant le symbole d'intégration par celui de sommation, la variable réelle d'intégration t par l'indice de sommation n, et la variable n par la variable x. Les entiers n apparaissant dans les deux situations n'ont absolument pas le même rôle :

$\mathrm{I}_n = \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\, \mathrm{d}t$	$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$
Hypothèses :	
$\forall\, t,\ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$	$\forall\, n,\ \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$
$\exists\, \varphi,\ \forall\, (n, t),\ \lvert f_n(t)\rvert \leq \varphi(t)$	$\exists\, (\varphi_n),\ \forall\, (x, n),\ \lvert f_n(x)\rvert \leq \varphi_n$
$\int_{\mathrm{I}} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ converge	$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ converge
Alors $\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_n = \int_{\mathrm{I}} f(t)\, \mathrm{d}t$	$\lim_{x\to a} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n$

A gauche, on permute limite et symbole d'intégration, et à droite, on permute limite et symbole de sommation.

Le théorème de convergence dominée ne permet pas de résoudre tous les cas. Considérons l'exemple suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!}\, \mathrm{d}t$$

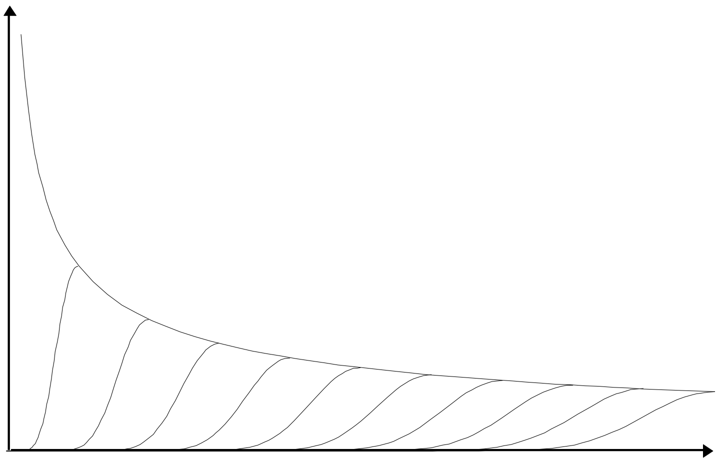
On peut écrire $\int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty f_n(t)\, \mathrm{d}t$ en posant :

$$f_n(t) = e^{-t} \frac{t^n}{n!} \text{ pour } 0 \leq t < n$$

$= 0$ pour $t \geq n$

Cette suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle. Mais l'intégrale converge-t-elle vers 0 ? Il est douteux qu'on puisse majorer les f_n par une même fonction intégrable φ. En effet, on vérifiera que $\| f_n \|_\infty = e^{-n} \dfrac{n^n}{n!}$ obtenue lorsque t tend vers n à gauche et dont un équivalent (avec la formule de Stirling, voir L2/SERIES.PDF ou les exercices du présent chapitre) vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. La convergence de la suite (f_n) vers 0 est donc uniforme, mais cela ne suffit pas à conclure, puisque l'intervalle $[0, +\infty[$ n'est pas un segment.

La fonction φ devant majorer toutes les f_n est probablement d'une forme comparable à $\varphi(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$, mais qui, malheureusement, n'est pas intégrable. Ce raisonnement n'apporte pas de preuve certaine de l'inexistence de φ mais laisse penser qu'il est vain de chercher à appliquer le théorème de convergence dominée. Les représentations graphiques peuvent apporter une aide précieuse pour formuler des conjectures. Ci-dessous, on verra quelques graphes de fonctions f_n, ainsi que la fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}$.



On peut avoir des doutes sur le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!} \,dt = 0$ car le maximum des f_n décroît, mais le graphe de la fonction s'étale sur un intervalle de plus en plus grand. En fait, nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!} \,dt = \frac{1}{2}$ en nous ramenant à une suite d'intégrales sur lesquelles on pourra appliquer le théorème de convergence dominée. Effectuons le changement de variables $v = \dfrac{n-t}{\sqrt{n}}$. On obtient :

$$\int_0^n e^{-t} \frac{t^n}{n!} \,dt = \frac{1}{n!} \sqrt{n}\, e^{-n}\, n^n \int_0^{\sqrt{n}} \exp(v\sqrt{n})\, \Big(1 - \frac{v}{\sqrt{n}}\Big)^n \,dv$$

La formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ permet de voir que le facteur $\dfrac{1}{n!} \sqrt{n}\, e^{-n}\, n^n$ devant l'intégrale tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Quant à l'intégrale, elle est de la forme $\displaystyle\int_0^\infty g_n(v) \,dv$ avec $g_n(v) = \exp(v\sqrt{n})\, \Big(1 - \dfrac{v}{\sqrt{n}}\Big)^n$

pour $0 \le v < \sqrt{n}$ et $g_n(v) = 0$ pour $v \ge \sqrt{n}$. Pour $0 \le v < \sqrt{n}$, en utilisant un développement limité du logarithme sous la forme

$$\ln(1 - x) = - x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{R}(x)$$

avec $\mathrm{R}(x) = \mathrm{o}(x^2)$ reste du développement limité, on a :

$$g_n(v) = \exp(v\sqrt{n}) \exp(n \ln(1 - \frac{v}{\sqrt{n}})) = \exp(-\frac{v^2}{2} + n\mathrm{R}(\frac{v}{\sqrt{n}}))$$

Par ailleurs, $\mathrm{R}(x) = \ln(1 - x) + x + \frac{x^2}{2}$ a pour dérivée $-\frac{1}{1-x} + 1 + x = -\frac{x^2}{1-x}$. R est strictement décroissante sur [0, 1[et varie de 0 à $-\infty$. R est donc négative. Donc :

$$0 \le g_n(v) \le \exp(-\frac{v^2}{2})$$

Cette inégalité est également vraie pour $v \ge n$ puisque $g_n(v) = 0$.

Or $\exp(-\frac{v^2}{2})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée sur la suite (g_n). Du fait que, $\mathrm{R}(x) \sim \mathrm{o}(x^2)$ quand x tend vers 0, il en résulte que $n\mathrm{R}(\frac{v}{\sqrt{n}}) = \mathrm{o}(1)$ et donc que le majorant $\exp(-\frac{v^2}{2})$ des $(g_n(v))$ n'est autre que la limite simple de la suite des $(g_n(v))$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g_n(v)\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty \exp(-\frac{v^2}{2})\,\mathrm{d}v.$$

La valeur de cette intégrale est connue est vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On trouvera une démonstration de cette propriété dans la partie exercice.

Il en résulte finalement que $\displaystyle\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty g_n(v)\,\mathrm{d}v \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$.

D'autres limites peuvent être déduites de celle-ci. Par exemple, on vérifiera par récurrence que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t = n!$ ou que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = 1$, on a aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty} e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$ est quasiment coupée en deux entre les deux intervalles $[0, n]$ et $[n, +\infty[$.

Dernière propriété sur cette question. On a, pour tout x :

$$e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!}\int_x^\infty e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t$$

En effet, pour $x = 0$, les deux membres sont égaux à 1, et par ailleurs, leurs dérivées par rapport à x valent respectivement $-e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ et $-e^{-x} \frac{x^n}{n!}$, qui sont égales. Les deux fonctions ayant même dérivée et coïncidant en un point sont égales. Il en résulte que :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} \int_n^{\infty} e^{-t} t^n \, dt = \frac{1}{2}$$

(et non 1 comme le calcul naïf et erroné suivant aurait pu laisser le croire :

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = e^{-n} e^n = 1$$

Ce calcul est **FAUX**, le remplacement de $\sum_{k=0}^{n}$ par $\sum_{k=0}^{\infty}$ étant incorrect).

Cela signifie au contraire que, dans le développement en série de e^n sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$, environ la moitié de la valeur de l'exponentielle est donnée par $\sum_{k=0}^{n}$ et l'autre moitié par $\sum_{k=n+1}^{\infty}$, le partage étant d'autant plus équitable que n est grand.

En probabilité, la suite $(e^{-n} \frac{n^k}{k!})_{k \in \mathbf{N}}$ constitue la suite des valeurs de la loi d'une variable aléatoire X_n suivant une loi de Poisson de paramètre n (voir L2/PROBA2.PDF) :

$$\mathbf{P}(X_n = k) = e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

On a donc :

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbf{P}(X_n \leq n)$$

Le fait que $\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(X_n \leq n) = \frac{1}{2}$ n'est guère étonnant attendu que $\mathbf{E}(X_n) = n$. On peut d'ailleurs calculer directement cette limite d'un point de vue probabiliste en utilisant le théorème central limite (voir L3/PROBA3.PDF).

3- Intégration terme à terme d'une série

Dans le cas d'une série $(\sum f_n)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée sur les sommes partielles de la série, en vérifiant que les $\left| \sum_{k=0}^{n} f_k \right|$ sont majorées par une fonction intégrable φ positive. On prend en général $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$. On admettra que, pour vérifier que φ est intégrable, il suffit de voir si la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. On énonce donc :

THEOREME

Soit ($\sum f_n$) *une série de fonctions continues par morceaux à valeurs réelles ou complexes, intégrables sur* I. *On suppose que la série est convergente en tout point de* I *de somme f* (*continue par morceaux*) *et que la série* ($\sum \int_I |f_n|$) *converge. Alors f est intégrable et :*

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$$

On remarquera que, dans le cas de séries positives, il suffit de vérifier que $\sum \int_I f_n$ converge.

EXEMPLES :

❑ Dans le contre-exemple de $\sum_{n=1}^{\infty} (nx^{n-1} - (n+1)x^n)$ sur [0, 1], comme l'intégrale de la série n'est pas égale à la série de l'intégrable, on a nécessairement $\sum \int_0^1 |nx^{n-1} - (n+1)x^n| \, dx$ qui diverge. De fait :

$$\int_0^1 |nx^{n-1} - (n+1)x^n| \, dx = \int_0^{n/(n+1)} nx^{n-1} - (n+1)x^n \, dx - \int_{n/(n+1)}^1 nx^{n-1} - (n+1)x^n \, dx$$

$$= 2\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right) \sim 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n} \sim \frac{2}{en}$$

et la série $\sum \frac{2}{en}$ diverge.

❑ Soit p entier strictement positif. Considérons $\int_0^{\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} \, dt$. On vérifiera que l'intégrale est bien convergente.

Pour $t > 0$, on peut écrire :

$$\frac{t^p}{e^t - 1} = \frac{1}{e^t} \frac{t^p}{1 - e^{-t}} = \frac{t^p}{e^t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} t^p e^{-nt}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \, dt$$

avec $f_n(t) = t^p e^{-nt}$.

Or $\int_0^{\infty} |f_n(t)| \, dt = \int_0^{\infty} t^p e^{-nt} \, dt = \frac{1}{n^{p+1}} \int_0^{\infty} u^p e^{-u} \, du$ en posant $u = nt$

$= \frac{p!}{n^{p+1}}$ car on vérifiera par récurrence sur p que $p! = \int_0^{\infty} u^p e^{-u} \, du$

On obtient le terme général d'une série convergente, donc le théorème précédent s'applique et on peut écrire :

$$\int_0^\infty \frac{t^p}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t = p!\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$$

En admettant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, on en déduit les valeurs des intégrales suivantes, sans qu'on ait, à aucun moment, cherché des primitives des fonctions à intégrer (et d'ailleurs, de telles primitives ne peuvent s'exprimer sous forme de fonctions élémentaires) :

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{15}$$

A noter qu'il n'existe aucune formule connue pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ou $\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

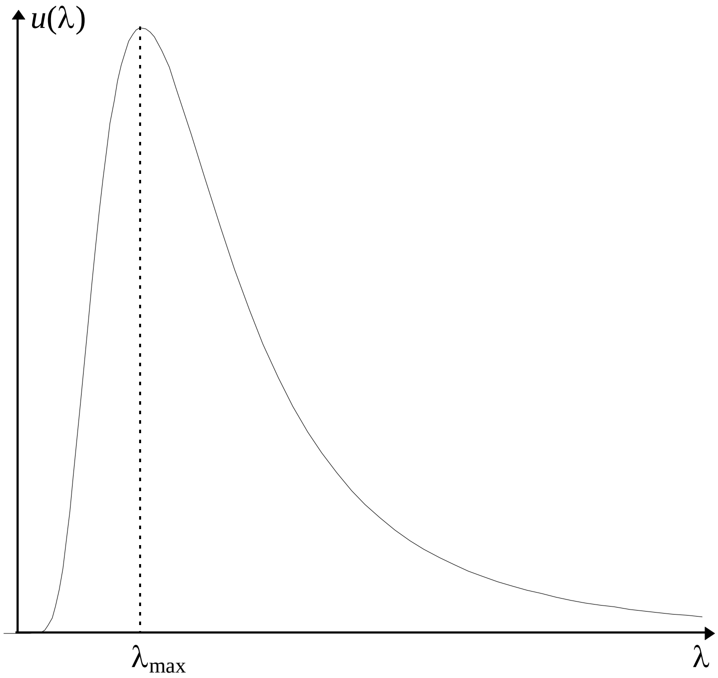
Signalons une intéressante utilisation de la formule $\int_0^\infty \frac{t^3}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{15}$ en physique, dans le cadre du rayonnement dit du corps noir. C'est un modèle de corps idéal qui, maintenu à une température T constante, possède une densité volumique d'énergie électromagnétique dont l'expression dans chaque intervalle $[\lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda]$ est de la forme $u(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ (en $\mathrm{J.m^{-3}}$), où λ désigne une longueur d'onde et où, selon la loi de Planck, $u(\lambda)$ (en $\mathrm{J.m^{-3}.m^{-1}}$) a pour expression :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\mathrm{T}\lambda}\right) - 1}$$

avec T la température (en K), h la constante de Planck (6.625×10^{-34} J.s), c la vitesse de la lumière (3×10^8 $\mathrm{m.s^{-1}}$), k la constante de Boltzmann (1.3806×10^{-23} $\mathrm{J.K^{-1}}$), λ la longueur d'onde (en m).

Quand λ tend vers $+\infty$, on a $u(\lambda) \sim \frac{8\pi k\mathrm{T}}{\lambda^4}$ (loi de Rayleigh-Jeans).

Le graphe de la fonction $\lambda \to u(\lambda)$ a la forme suivante, passant par un maximum pour une certaine valeur λ_{max} de la variable :



Si le corps émet son énergie vers l'extérieur par rayonnement thermique, ce sera principalement à la longueur d'onde λ_{max}. En calculant la dérivée de $u(\lambda)$, on pourra vérifier que, si α est la racine positive de l'équation $\mathrm{X}e^{\mathrm{X}} + 5 - 5e^{\mathrm{X}} = 0$, soit environ 4,965, alors $\lambda_{max} = \dfrac{hc}{\alpha k\mathrm{T}} \approx \dfrac{2{,}90\ 10^{-3}}{\mathrm{T}}$ m (loi du déplacement de Wien). Cette loi permet de calculer la température du corps en observant sa couleur. Si on applique cette théorie aux étoiles, on a par exemple, dans la constellation d'Orion, Bételgeuse qui est une supergéante rouge émettant un rayonnement à 0,83 μm et Rigel qui émet au contraire à 0,19 μm. On peut en déduire l'ordre de grandeur des températures superficielles de ces étoiles : 3500 K pour Bételgeuse et 15300 K pour Rigel (et 5300 K pour notre Soleil qui émet dans le jaune). On a également déterminé la température de l'Univers (environ 3 K) en détectant en 1965 un fond cosmique de rayonnement dans les ondes millimétriques.

L'énergie électromagnétique totale du corps par unité de volume est (en $\mathrm{J.m^{-3}}$) :

$$\mathrm{E} = \int_0^{\infty} u(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

Si on fait le changement de variable $t = \dfrac{hc}{k\mathrm{T}\lambda}$, on obtient :

$$\mathrm{E} = \frac{8\pi(k\mathrm{T})^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

On reconnaît l'intégrale dont on vient de calculer la valeur, d'où :

$$\mathrm{E} = \frac{8\pi^5(k\mathrm{T})^4}{15(hc)^3} \text{ (loi de Stefan-Boltzmann)}$$

❑ Considérons $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^p}{e^t + 1}\,\mathrm{d}t$ pour p entier positif ou nul, différant très légèrement de l'exemple précédent. On vérifiera que l'intégrale est bien définie. Pour $t > 0$, on peut écrire :

$$\frac{t^p}{e^t + 1} = \frac{1}{e^t}\frac{t^p}{1 + e^{-t}} = \frac{t^p}{e^t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} t^p (-1)^{n-1} e^{-nt}.$$

Or $\displaystyle\int_0^{\infty} \left| t^p (-1)^{n-1} e^{-nt} \right| \mathrm{d}t = \frac{p!}{n^{p+1}}$ comme précédemment. $\sum \dfrac{p!}{n^{p+1}}$ converge si $p \geq 1$. Le théorème de convergence dominée s'applique encore dans ce cas et on peut écrire :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^p}{e^t + 1} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^p (-1)^{n-1} e^{-nt} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} t^p e^{-nt} \mathrm{d}t$$

$$= p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}}$$

En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t + 1} \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$.

Dans la situation précédente, le théorème ne s'applique pas si $p = 0$ car $\sum \dfrac{p!}{n^{p+1}}$ diverge. Notons cependant que :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^t + 1} \mathrm{d}t = \Big[- \ln(1 + e^{-t})\Big]_0^{\infty} = \ln(2)$$

et que $\displaystyle p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \ln(2)$

comme nous l'avons vu dans le chapitre L2/SERIES.PDF. Ainsi, l'égalité :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^p}{e^t + 1} \mathrm{d}t = p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}}$$

est quand même vraie pour $p = 0$.

❑ Considérons $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + t^2} \mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{3}} (-1)^{2n} t^{2n} \mathrm{d}t$. On a le droit de permuter les signes intégrales et somme car $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \left| (-1)^{2n} t^{2n} \right| \mathrm{d}t = \frac{1}{(2n + 1)3^n\sqrt{3}}$ est le terme général d'une série convergente. Comme par ailleurs :

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + t^2} \mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$$

on obtient finalement :

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)3^n\sqrt{3}}$$

❑ $\displaystyle\int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} x^n \,dx$ car cette dernière série (à termes positifs) vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ qui converge. On a donc :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

❑ L'exemple précédent s'étend à tout t élément de]0, 1[:

$$\int_0^{t} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t} x^n \,dx \text{ car } \int_0^{t} x^n \,dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} \text{ terme général d'une série convergente.}$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^{t} \frac{1}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

$$\Rightarrow \qquad -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

❑ Qu'en est-il maintenant pour $t < 0$? Pour voir si $\displaystyle\int_t^{0} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_t^{0} x^n \,dx$, nous devons vérifier si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_t^{0} |x^n| \,dx$ converge. Or :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_t^{0} |x^n| \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_t^{0} (-1)^n x^n \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n}{n}$$

qui converge pour $|t| < 1$. Dans ce cas, la permutation des symboles d'intégration et de sommation conduit au même résultat. Donc :

$$\boxed{\forall\, t \in \,]-1, 1[,\ -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}}$$

On notera que, pour $t = 1$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-x}\,dx$ aussi bien que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1} x^n \,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergent.

Par contre, pour $t = -1$, on retrouve la formule $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, bien que la démonstration précédente ne puisse s'appliquer à ce cas.

❑ Considérons $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/3} t^{2n}\,dt$ car $\displaystyle\int_0^{1/3} t^{2n}\,dt = \frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)}$ terme général d'une série convergente. Comme par ailleurs :

$$\int_0^{1/3} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{1/3} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\Big[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\Big]_0^{1/3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{\ln(2)}{2}$$

on obtient :

$$\frac{\ln(2)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)}$$

Par contre, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-t^2}\,dt$ diverge, au même titre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1} t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

4- Dérivation

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et convergeant uniformément vers f. Il n'est pas sûr que f soit dérivable, ni a fortiori que f_n' converge vers f'.

EXEMPLES :

❑ $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$

Cette suite converge uniformément vers 0. Chaque terme est dérivable, mais la suite des dérivées ne converge pas.

❑ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$

Cette suite converge simplement vers $|x|$, qui n'est pas dérivable en 0. La convergence est même uniforme. En effet :

$$0 \le f_n(x) - |x| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ qui tend vers } 0$$

❑ Le même problème se pose pour les séries. On peut montrer que, sur $[-\pi, \pi]$, on a :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

Peut-on en déduire, en dérivant terme à terme, que :

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\ ?$$

Rien n'est moins sûr. Il n'est d'ailleurs pas évident de montrer que la série converge. Il se trouve cependant que l'égalité a effectivement lieu, sur $]-\pi, \pi[$, mais ni en π ni en $-\pi$, où l'égalité est clairement fausse, puisque le membre de droite est nul. En dérivant de nouveau terme à terme, a-t-on :

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} 4(-1)^{n+1} \cos(nx) \text{ ?}$$

Non, car la série diverge.

On ne peut donc rien déduire du comportement des f_n' à partir de celui des f_n. Cependant, l'inverse est possible. Si on connaît le comportement des f_n', on peut en déduire quelque chose sur les f_n, car on se ramène à un problème d'intégration. On a :

PROPOSITION :
Soit (f_n) *une suite de fonctions de classe* C^1 *sur un intervalle* I, *qui converge simplement vers une fonction* G *et telle que la suite des* ***dérivées*** *converge* ***uniformément*** *vers une fonction g sur tout segment de* I. *Alors* G *est* C^1 *et* G' = *g. De plus,* (f_n) *converge uniformément vers* G *sur tout segment de* I.

Comme pour la continuité, on peut se contenter de la continuité uniforme sur tout segment de I, puisque la dérivation est, comme la continuité, un problème local.

Démonstration 1 :
Soit x_0 un point de I. On a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = G(x_0)$ et, pour tout x de I :

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)$$

En appliquant le résultat relatif à l'intégration d'une suite de fonctions convergeant uniformément sur un segment (ici le segment $[x_0, x]$), le membre de droite converge vers $\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + G(x_0)$, d'où :

$$G(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + G(x_0)$$

donc $G'(x) = g(x)$, puisque g est continue comme limite uniforme de fonctions continues sur tout segement de I.

On remarque qu'il suffit de supposer la convergence de $(f_n(x_0))$ et la convergence uniforme de $(f_n)'$ sur tout segment pour appliquer le raisonnement précédent et en particulier conclure à la convergence simple de (f_n) sur I.
Enfin, la convergence de (f_n) vers G est uniforme sur tout segment. En effet, prenons un segment J (que l'on étend éventuellement de façon à ce qu'il contienne x_0) et soit x élément de J :

$$\begin{aligned}|f_n(x) - G(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f_n'(t) - g(t)\,dt + f_n(x_0) - G(x_0)\right| \\ &\leq |x - x_0|\ \|f_n' - g\|_\infty + |f_n(x_0) - G(x_0)| \text{ où } \|\ \|_\infty \text{ est ici la norme uniforme sur J} \\ &\leq |J|\ \|f_n' - g\|_\infty + |f_n(x_0) - G(x_0)| \text{ où } |J| \text{ désigne la longueur de J}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \| f_n - \mathrm{G} \|_\infty \leq |\mathrm{J}| \; \| f_n' - g \|_\infty + |f_n(x_0) - \mathrm{G}(x_0)|$ quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini).

Démonstration 2 :
Soit x_0 un élément de I. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \quad \text{(à justifier)} \\ &= \lim_{n \to +\infty} f_n'(x_0) \\ &= g(x_0)\end{aligned}$$

Il suffit de justifier la permutation des limites en deuxième ligne. Pour cela, il suffit de montrer que les fonctions $h_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$ forment une suite qui converge uniformément vers $h(x) = \dfrac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0)}{x - x_0}$ sur un segment de I contenant x_0. Or, en appliquant l'inégalité des accroissements finis :

$$h_n(x) - h_p(x) = \frac{(f_n - f_p)(x) - (f_n - f_p)(x_0)}{x - x_0}$$

$\Rightarrow \quad |h_n(x) - h_p(x)| \leq \| f_n' - f_p' \|_\infty$

Si on fait tendre p vers l'infini, on a donc, pour tout x du segment :

$$|h_n(x) - h(x)| \leq \| f_n' - g \|_\infty$$

donc $\quad \| h_n - h \|_\infty \leq \| f_n' - g \|_\infty$

La suite (f_n') convergeant uniformément vers g, il en est de même de la suite (h_n) qui converge donc uniformément vers $h(x) = \dfrac{\mathrm{G}(x) - \mathrm{G}(x_0)}{x - x_0}$.

On en déduit la généralisation suivante pour les fonctions de classe C^k, en appliquant le théorème précédent successivement à $f^{(k-1)}$, $f^{(k-2)}$, etc. en remontant jusqu'à f :

PROPOSITION :
Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^k sur un intervalle I, telle que les suites (f_n), (f_n'), ..., $(f_n^{(k-1)})$ convergent simplement et telle que la suite $(f_n^{(k)})$ converge ***uniformément*** *sur tout segment. Posons G la limite des f_n. Alors G est de classe C^k, et pour $0 \leq i \leq k$, $\mathrm{G}^{(i)}$ est la limite simple de la suite $(f_n^{(i)})$, la converge étant uniforme sur tout segment de I.*

Pour une série, le théorème de dérivation s'exprime comme suit :

PROPOSITION
i) *Soit (f_n) une suite de fonctions de classes C^1 sur un intervalle I. Si la série $(\sum f_n')$ converge* ***normalement*** *sur I ou sur tout segment de I, et si la série $(\sum f_n)$ converge simplement, alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe C^1, $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.*

ii) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de classe* C^k *sur un intervalle* I. *Si, pour tout i élément de* $[\![0, k-1]\!]$ les *séries* $(\sum f_n^{(i)})$ *converge simplement sur I* et *si la série* $(\sum f_n^{(k)})$ *converge* ***normalement*** *sur* I *ou sur tout segment de* I, *alors la somme* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est une fonction de classe* C^k, *et pour* $0 \le i \le k$, $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(i)}$.

Démonstration :

❑ Cette proposition découle de la proposition précédente sur les suites, en considérant la suite des sommes partielles.

Une démonstration directe du i) peut également être donnée. Puisqu'il y a convergence normale de $(\sum f_n)$ sur tout segment, on a, pour tout x et x_0 :

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(utilisation de la convergence normale sur un segment)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)$ est continue (série convergeant normalement de fonctions continues), $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est bien une primitive de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)$.

EXEMPLES :

❑ Pour tout x, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ converge sur $\mathbb{R}$, car $\left|\dfrac{1}{x^2+n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$. Les dérivées de chaque fonction valent $-\dfrac{2x}{(x^2+n^2)^2}$ dont la valeur absolue est majorée par :

$$\frac{2|x|}{(x^2+n^2)^2} \le \frac{1}{n^2} \qquad \text{(utiliser le fait que } \frac{2|x|}{x^2+n^2} \le \frac{2n|x|}{x^2+n^2} \le 1\text{)}$$

donc la série des dérivées converge normalement. La dérivée de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ est donc bien $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2x}{(x^2+n^2)^2}$.

❑ Soit $\mathrm{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^3}$, alors $\mathrm{G}'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ car la série dérivée converge normalement. Par contre, on ne peut rien dire de G''.

❑ On définit l'exponentielle complexe comme étant $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Considérons une variable réelle t et la fonction $t \to e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^n}{n!}$. La série des dérivées est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} z^n}{(n-1)!} = ze^{tz}$ qui converge normalement sur tout segment. Il s'agit donc bien de la dérivée de e^{tz} par rapport à t.

III : Intégrales dépendant d'un paramètre

Une intégrale dépendant d'un paramètre est une fonction de la forme

$$g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, on intègre une fonction de t sur un intervalle I, mais cette fonction dépend d'un paramètre x. On obtient donc une fonction $g(x)$. En général, on ne sait pas calculer explicitement l'intégrale de sorte que la seule expression connue de g est sous cette forme intégrale. Se pose alors souvent la question de calculer une limite de g (ou de savoir si g est continue) ou de dériver g.

Comment calculer $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$? On est évidemment tenter de dire que cette quantité vaut $\int_I \lim\limits_{x \to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(x_0,t)\,\mathrm{d}t$ si f est continue, d'autant plus que, si l'intégrale n'est pas calculable, c'est a priori **la seule** possibilité de traitement à notre disposition. Malheureusement ***C'EST FAUX***.

EXEMPLES :

❑ Soit $g(x) = \int_0^{\infty} xe^{-tx}\,\mathrm{d}t$ définie pour $x \geq 0$. On a donc $g(0) = 0$ et on vérifiera que pour $x > 0$, $g(x) = 1$. De sorte que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 1 \neq \int_0^{\infty} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} xe^{-tx}\,\mathrm{d}t = 0$.

❑ Soit $g(x) = \int_0^1 \frac{xt}{(1-t+tx)^2}\,\mathrm{d}t$. On a $g(0) = 0$, mais, pour $0 < x < 1$, en effectuant le changement de variable $u = 1 - t + tx$ ou $t = \frac{1-u}{1-x}$:

$$g(x) = \int_x^1 \frac{x}{(1-x)^2}\,\frac{1-u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}\left(\frac{1}{x} - 1 + \ln(x)\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}\ln(x) \to 1 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0,\, x>0} \int_0^1 \frac{xt}{(1-t+tx)^2}\,\mathrm{d}t = 1 \neq \int_0^1 \lim\limits_{x \to 0,\, x>0} \frac{xt}{(1-t+tx)^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

❑ Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^2t^2}\, dt$. On a :

$g(0) = 0$

pour $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + u^2}\, du = \frac{\pi}{2}$ en posant $u = xt$

pour $x < 0$, $g(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

donc g n'est pas continue, bien que la fonction $(x, t) \to \dfrac{x}{1 + x^2t^2}$ le soit.

De même, on peut être tenté de dériver g en dérivant f par rapport à x, autrement dit de dire que $\dfrac{dg}{dx} = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$. Mais c'est ***EGALEMENT FAUX***.

EXEMPLES :

❑ Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-tx}\, dt$ définie pour $x \geq 0$. On vérifiera que pour $x \geq 0$, $g(x) = x$. On a donc $g'(x) = 1$ pour $x \geq 0$. Cependant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} (2x - tx^2)e^{-tx}\, dt$ et pour $x = 0$, cette quantité vaut 0 alors que nous avons vu que $g'(0) = 1$. On a donc $g'(0) \neq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(0,t)\, dt$.

❑ Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{3/2}\, e^{-tx}\, dt$ définie pour $x \geq 0$. On vérifiera que pour $x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{x}$. On a donc $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$, et $g'(0)$ n'est pas défini. Cependant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} - tx^{3/2}\right)e^{-tx}\, dt$ et pour $x = 0$, cette quantité vaut 0 alors que nous avons vu que $g'(0)$ n'est pas défini.

❑ Pour $x \geq 0$, posons $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\exp(-(t^2 + 1)x^2)}{t^2 + 1}\, dt$. (Dans cet exemple, et contrairement aux précédents, bien malin est celui qui sait calculer g pour pouvoir vérifier ce qu'il avance ☹).

A-t-on le droit de dériver sous le signe d'intégration, obtenant ainsi :

$$g'(x) = \int_0^{\infty} -2x \exp(-(t^2 + 1)x^2)\, dt = -2x \exp(-x^2) \int_0^{\infty} \exp(-t^2x^2)\, dt \text{ ?}$$

En admettant la formule $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-v^2)\, dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss, formule prouvée dans le chapitre L2/INTMULT.PDF, ou dans les exercices du présent chapitre), et en faisant le changement de variable $v = tx$, on obtiendrait, pour $x > 0$:

$$g'(x) = -\sqrt{\pi} \exp(-x^2)$$

Cette dérivée admet une limite en $x = 0$, de sorte que $g'(0) = -\sqrt{\pi}$, alors que $g'(x)$ donnée par l'expression $\int_0^{\infty} -2x \exp(-(t^2+1)x^2)\, dt$ est nulle pour $x = 0$. Que conclure ? Contrairement à l'exemple 1 où g était calculable, permettant de trouver g' et de voir quelle formule est incorrecte, ici, on ne connait pas l'expression de g. On voudrait au contraire se servir de l'expression de g' pour l'intégrer et retrouver une expression de g. Encore faut-il savoir si l'on a bien $g'(x) = -\sqrt{\pi} \exp(-x^2)$, malgré le problème posé en $x = 0$.

Pour intervertir limite et intégration, ou bien dérivation et intégration, il est besoin d'hypothèses supplémentaires indispensables pour garantir le résultat. **Si ces hypothèses ne sont pas vérifiées, on ne peut rien conclure**.

1- Limites et continuité

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f :

$$A \times I \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$
$$(x,t) \to f(x,t)$$

et son intégrale dépendant d'un paramètre $g : x \in A \to \int_I f(x,t)\, dt$.

Soit a élément de A, ou même une des bornes de l'intervalle A. On s'intéresse à $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Pour cela, on souhaite intervertir limite et intégrale, comme on l'a fait pour les suites de fonctions, et pour y parvenir, on va précisément se ramener à une suite de fonctions, en utilisant la caractérisation séquentielle des limites, montrée dans le chapitre L1/FONCTION.PDF. Cette propriété énonce qu'il y a équivalence entre :

i) g tend vers $g(a)$ lorsque x tend vers a.

ii) Pour toute suite (x_n) tendant vers a, $(g(x_n))$ tend vers $g(a)$

On cherche donc maintenant $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I f(x_n,t)\, dt$, pour toute suite (x_n) de limite a, et à quelle condition cette limite vaut $\int_I \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,t)\, dt$.

Il s'agit donc bien d'une simple intervertion de passage à la limite avec le symbole d'intégration pour la suite de fonctions $n \to f(x_n, .)$. Il suffit que les hypothèses du théorème de convergence dominée soient vérifiées, à savoir :

que la suite converge simplement vers une fonction limite. Il suffit de supposer que, pour tout t, $\lim\limits_{x\to a} f(x, t)$ existe. Nous noterons $h(t)$ cette limite. Si (x_n) converge vers a, on aura aussi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, t) = h(t)$.

que la fonction f soit dominée par une fonction $t \to \varphi(t)$ intégrable sur I, autrement dit, que : $\forall n, \forall t, |f(x_n,t)| \le \varphi(t)$. Bien que la fonction φ puisse dépendre de la suite (x_n) choisie, la condition sera a fortiori vérifiée si φ n'en dépend pas et si on impose que, pour tout x et tout t, $|f(x,t)| \le \varphi(t)$.

on ajoute des hypothèses de continuité par morceaux pour garantir la possibilité de définir les intégrales.

On a ainsi montré le théorème suivant :

LIMITES

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexe définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$ *où* A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$, *et soit a un point de A ou une de ses bornes. On suppose que :*

pour tout t de I, *l'application* $x \to f(x, t)$ *admet une limite* $h(t)$ *quand x tend vers a.*

pour tout x de A, *les applications* $t \to f(x, t)$ *et* $t \to h(t)$ *sont continues par morceaux par rapport à t.*

il existe une fonction φ *continue par morceaux et intégrable sur* I *telle que, pour tout* (x, t) *de* $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$, *on ait* $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (***hypothèse de domination***).

Alors la fonction g admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \int_{\mathrm{I}} h(t)\,\mathrm{d}t$.

Il est inutile de supposer les fonctions $t \to f(x, t)$ intégrables car cela découle du fait qu'elles sont continues par morceaux et dominées par la fonction intégrable φ. h sera également intégrable car elle est aussi dominée par φ en passant à la limite dans l'inégalité $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Si $a \in \mathrm{A}$ et si, pour tout t, la fonction $x \to f(x, t)$ est continue en a, alors, sous l'hypothèse de domination précédente, on aura avec $h(t) = f(a, t)$:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \int_{\mathrm{I}} f(a,t)\,\mathrm{d}t = g(a)$$

donc g est continue en a. Ainsi, on aura le théorème de continuité suivant :

CONTINUITE

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexe définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$ *où* A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$. *On suppose que :*

pour tout t de I, *l'application* $x \to f(x, t)$ *est continue*

pour tout x de A, *l'application* $t \to f(x, t)$ *est continue par morceaux par rapport à t.*

il existe une fonction φ *continue par morceaux et intégrable sur* I *telle que, pour tout* (x, t) *de* $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$, *on ait* $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (***hypothèse de domination***).

Alors la fonction g définie sur A *par* $g(x) = \int_{\mathrm{I}} f(x,t)\,dt$ *est continue sur* A.

REMARQUES :

❑ La continuité étant une propriété locale, il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur un ensemble de la forme $[a - r, a + r] \times \mathrm{I}$, $r > 0$, pour prouver la continuité en a.

❑ Si A et I sont des segments et f est continue, alors l'hypothèse de domination est vérifiée. En effet, f étant continue sur le fermé borné $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$ y est bornée (voir L2/EVNORME.PDF) donc on peut prendre pour φ une constante M majorant $|f|$.

❑ On pourra faire un parallèle entre le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre et celui des séries de fonctions convergeant normalement. Ci-dessous, nous avons souligné en couleur les analogies. On passe d'une situation à l'autre en remplaçant le symbole d'intégration par celui de sommation, et la variable réelle t par l'indice entier n :

	$g(x) = \int_I f(x, t)\,dt$	$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$
Hyp :	$\forall t, x \to f(x, t)$ est continue	$\forall n, x \to f_n(x)$ est continue
	$\exists \varphi, \forall (x, t), \lvert f(x, t)\rvert \leq \varphi(t)$	$\exists (\varphi_n), \forall (x, n), \lvert f_n(x)\rvert \leq \varphi_n$
	$\int_I \varphi(t)\,dt$ converge	$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ converge
Alors :	$x \to g(x)$ est continue	

EXEMPLE 1 :

❑ On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \lim_{x\to 1, x\neq 1} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{x^2+t^2}\,dt$

En effet, la fonction $\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{1}{x^2+t^2}$ est continue en x et en t et est dominée par 1. On peut donc prendre la limite quand x tend vers 1, x étant différent de 1. Ceci permet de calculer l'intégrale de gauche en utilisant l'intégrale de droite où l'on peut faire une réduction en éléments simples :

$$\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{x^2+t^2} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{x^2+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2-1}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{x^2+t^2}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

qui tend vers $\dfrac{1}{2} \times (-f'(1))$, où f est la fonction $x \to \dfrac{1}{x}\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}\right) \Rightarrow f'(1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

On peut aussi calculer cette intégrale en posant $t = \tan(\theta)$. Vérifions le résultat :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^{\pi/4} \cos^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

EXEMPLE 2 :

❑ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \lim_{x\to 1, x\neq 1} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{x^2+t^2}\,dt$

La différence avec l'exemple 1 provient du fait que l'on a remplacé l'intervalle d'intégration [0, 1] par [0, +∞[. La domination de la fonction $\dfrac{1}{1+t^2}\dfrac{1}{x^2+t^2}$ par 1 ne convient plus, puisque 1 n'est pas intégrable sur [0, +∞]. Cependant, elle est également dominée par $\dfrac{1}{1+t^2}$ qui, elle, est intégrable. On peut donc poursuivre les calculs comme plus haut :

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{x^2+t^2}\,dt = \frac{1}{x^2-1}\left(\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^\infty \frac{1}{x^2+t^2}\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\frac{\pi}{2}\right)$$

qui tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ quand x tend vers 1. Donc $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

Vérifions. Posons $t = \tan(\theta)$.

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

EXEMPLE 3 :

❑ Soit $\displaystyle I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-2x\cos(\theta)+x^2)\,d\theta$

Posons $f(x,\theta) = \ln(1-2x\cos(\theta)+x^2)$, fonction définie et continue sur $]-1, 1[\times [-\pi, \pi]$. Soit a un point de $]-1, 1[$. Montrons la continuité de f en a. Pour cela, choisissons r strictement positif tel que $[a-r, a+r]$ soit inclus dans $]-1,1[$. f est définie sur le fermé borné $[a-r, a+r] \times [-\pi, \pi]$ donc y est bornée. L'hypothèse de domination est donc vérifiée au moyen d'une constante majorant $|f|$, et I est continue sur $[a-r, a+r]$, donc en a. La démarche étant possible pour n'importe quelle point a de $]-1, 1[$, I est continue sur $]-1,1[$.
On montre de même que I est continue sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$, donc continue sur $]1, +\infty[$, et également sur $]-\infty, -1[$.
La valeur de I(x) est donnée un peu plus bas dans le cours.

EXEMPLE 4 :

❑ Soit $\displaystyle f(x) = \int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt$. On ne peut pas montrer facilement que f est continue. En effet, la fonction dominante la plus naturelle est $\dfrac{t}{1+t^2}$, mais cette fonction n'est pas intégrable en $+\infty$. De fait, il est possible de montrer (mais c'est loin d'être évident, et nous l'admettrons) que, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sg}(x)\exp(-|x|)$, où $\mathrm{sg}(x) = 1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$ et 0 si $x = 0$. f est discontinue en 0. En particulier :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

alors qu'on aurait pu croire que la limite est nulle.

2- Dérivation

On a un théorème analogue pour la dérivation de la fonction g, en utilisant une hypothèse de domination sur $\frac{\partial f}{\partial x}$.

THEOREME DE DERIVATION

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexe définie sur A × I *où* A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$, *f étant telle que* :

pour tout t de I, *l'application* $x \to f(x, t)$ *est de classe* C^1

pour tout x de A, *l'application* $t \to f(x, t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* I

la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ *vérifie les hypothèses du théorème précédent* ($x \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ *est continue,* $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ *est continue par morceaux. Il existe* φ *continue par morceaux et intégrable sur* I *telle que, pour tout* (x, t), *on ait* $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \varphi(t)$).

Alors la fonction g définie sur A *par* $g(x) = \int_I f(x, t)\, dt$ *est de classe* C^1 *sur* A *et sa dérivée est la fonction* $x \to \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$.

Démonstration :

❑ Soit a un élément de I. Nous voulons montrer que $g'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt$, autrement dit que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt \qquad (*)$$

Par ailleurs, cette dernière fonction est une fonction continue de a en appliquant le théorème de continuité sur l'intégrale $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt$, puisque $\frac{\partial f}{\partial x}$ en vérifie les hypothèses, de sorte que g sera bien C^1.

La démonstration de (*) est comparable à celle sur la continuité. Il suffit de prendre une suite (h_n) quelconque tendant vers 0 et de montrer que $\lim_{n \to \infty} \frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\, dt$.

$$\frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \int_I \frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}\, dt$$

Notons f_n la fonction qui, à t associe $\frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}$, de sorte que :

$$\frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \int_I f_n(t)\, dt.$$

Quand n tend vers l'infini, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité des accroissements finis sur la fonction $x \to f(x,t)$, on a, pour tout t, $\left|\frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n}\right| \leq \varphi(t)$. De sorte que $|f_n| \leq \varphi$ et on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(a + h_n) - g(a)}{h_n} = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathrm{I}} \frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n} \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\mathrm{I}} \lim_{n \to \infty} \frac{f(a + h_n,t) - f(a,t)}{h_n} \,\mathrm{d}t \text{ (application du théorème de convergence dominée)}$$

$$= \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial f}{\partial x}(a,t) \,\mathrm{d}t$$

Le théorème de dérivation admet la généralisation suivante, pour les fonctions de classe C^k :

PROPOSITION

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexe définie sur $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$ *où* A *et* I *sont deux intervalles de* $\mathbb{R}$, *f étant telle que* :

pour tout t de I, *l'application $x \to f(x, t)$ est de classe* C^k,

pour tout x de A,*et i élément de* $[\![0, k-1]\!]$, *les applications $t \to \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur* I,

la dérivée partielle $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie les hypothèses du théorème précédent ($x \to \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue, $t \to \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux. Il existe φ continue par morceaux et intégrable telle que, pour tout (x, t), on ait $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leq \varphi(t)$).

Alors la fonction g définie sur A *par $g(x) = \int_{\mathrm{I}} f(x, t) \,\mathrm{d}t$ est de classe* C^k *sur* A *et pour tout i élément de* $[\![0, k-1]\!]$, $g^{(i)}(x) = \int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) \,\mathrm{d}t$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Dans le théorème de dérivation précédent, vérifions que, outre la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ dominée par φ, la fonction f vérifie aussi une hypothèse de domination sur $\mathrm{B} \times \mathrm{I}$, où B est un intervalle borné quelconque inclus dans A. Soit $a \in \mathrm{B}$. On a alors :

$$f(x, t) = f(a, t) + \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(u, t) \,\mathrm{d}u$$

donc $\quad |f(x, t)| \leq |f(a, t)| + |x - a| \,\varphi(t)$

donc, si L est la longueur de B, la fonction f vérifie l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall\, x \in \mathrm{B},\ \forall\, t \in \mathrm{I},\ \left| f(x, t)\right| \leq \left| f(a, t)\right| + \mathrm{L}\ \varphi(t)$$

avec $t \to \left| f(a, t)\right| + \mathrm{L}\ \varphi(t)$ intégrable sur I.

Par conséquent, dans le cas de notre proposition, le fait que $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie une hypothèse de domination permet d'en déduire, par une récurrence descendante sur k, que toutes les dérivées $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $0 \leq n \leq k$, vérifient chacune une hypothèse de domination sur tout $\mathrm{B} \times \mathrm{I}$, B intervalle borné inclus dans A. A tout rang $n < k$, le théorème de dérivation permet alors de conclure que la fonction $x \to \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\, \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur B, sa dérivée étant la fonction $x \to \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(x, t)\, \mathrm{d}t$. B étant quelconque inclus dans A et la dérivation étant une propriété locale, on en déduit qu'elle est de classe C^1 sur A. Par conséquent, g est de classe C^k, ses dérivées successives s'obtenant en dérivant par rapport à x sous le signe d'intégration.

EXEMPLE 1 :

❑ Reprenons l'exemple de $\mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)\, \mathrm{d}\theta$ dont on a montré au paragraphe précédent la continuité sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Soit $f(x,\theta) = \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)$. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x - 2\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}$$

continue sur tout $]-1, 1[\times [-\pi, \pi]$, ou sur $]1, +\infty[\times [-\pi, \pi]$ ou sur $]-\infty, -1[\times [-\pi, \pi]$. En procédant d'une manière analogue à I (en se restreignant à des ensembles de la forme $[a - r, a + r] \times [-\pi, \pi]$, a étant élément de $]-1, 1[$ ou de $]1, +\infty[$ ou de $]-\infty, -1[$), on montre que l'hypothèse de domination est vérifiée par $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur $[a - r, a + r] \times [-\pi, \pi]$, donc I est dérivable sur tout $[a - r, a + r]$, donc dérivable sur chacun des intervalles $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$ ou $]-\infty, -1[$ avec :

$$\mathrm{I}'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x - 2\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) + x^2}\, \mathrm{d}\theta$$

posons $u = \tan(\dfrac{\theta}{2})$, de sorte que $\cos(\theta) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\, \frac{x(1 + u^2) - 1 + u^2}{(1 + x^2)(1 + u^2) - 2x(1 - u^2)}\, \frac{2}{1 + u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 4\, \frac{u^2(x + 1) + x - 1}{u^2(1 + x)^2 + (1 - x)^2}\, \frac{1}{1 + u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{x}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{u^2(1 + x)^2 + (1 - x)^2} + \frac{1}{1 + u^2}\, \mathrm{d}u \qquad \text{pour } x \text{ non nul} \\
&= \frac{2}{x}\left[-\arctan \frac{u(1 + x)}{1 - x} + \arctan u \right]_{-\infty}^{\infty} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{4\pi}{x} \text{ sinon} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc I est une fonction constante sur]–1, 1[. Etant nulle pour $x = 0$, elle est identiquement nulle, donc, pour tout x de]–1,1[, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2)\, d\theta = 0$.

Sur]1, +∞[ou]–∞, –1[, $I(x) = 4\pi \ln(|x|) + \text{Cte}$.

Montrons que la Cte est nulle. Pour $x > 1$, on a :

$$\text{Cte} = I(x) - 4\pi\ln(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2) - 2\ln(x)\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + \frac{1 - 2x\cos(\theta)}{x^2}\right) d\theta$$

Prenons la limite quand x tend vers $+\infty$, en vérifiant qu'on peut intervertir les symboles $\lim\limits_{x\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}$. Vérifions pour cela qu'une hypothèse de domination est vérifiée pour $(x, \theta) \in [2, +\infty[\times [-\pi, \pi]$.

On a :

$$-\frac{3}{4} \leq \frac{1 - 2x}{x^2} \leq \frac{1 - 2x\cos(\theta)}{x^2} \leq \frac{1 + 2x}{x^2} \leq 3$$

La première inégalité à gauche est vérifiée car elle est équivalente à $3x^2 - 8x + 4 \geq 0$ ou à $(x - 2)(3x - 2) \geq 0$ (une étude de fonction permet de trouver cette valeur $\frac{3}{4}$). La dernière inégalité, à droite, est équivalente à $3x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(3x + 1) \geq 0$. On a donc :

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1 - 2x\cos(\theta)}{x^2}\right) \leq \ln(4)$$

et la fonction $(x,\theta) \to \ln\left(1 + \frac{1 - 2x\cos(\theta)}{x^2}\right)$ est bornée sur $[2,+\infty[\times [-\pi,\pi]$, donc dominée par une fonction constante, intégrable sur $[-\pi,\pi]$. On peut donc permuter limite et intégrale et on obtient :

$$\text{Cte} = \lim_{x\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + \frac{1 - 2x\cos(\theta)}{x^2}\right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1 - 2x\cos(\theta)}{x^2}\right) d\theta = 0$$

On procède d'une façon analogue quand x tend vers $-\infty$. Ainsi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + \frac{1 - 2x\cos(\theta)}{x^2}\right) d\theta = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } |x| < 1 \\ 4\pi\ln(|x|) \text{ si } |x| > 1 \end{array}\right.$$

Ce résultat a déjà été prouvé en utilisant des sommes de Riemann, dans les exercices du chapitre L1/INTEGRAL.PDF.

EXEMPLE 2 :

❑ Soit a un réel strictement positif. Considérons $g(x) = \displaystyle\int_0^a \frac{1 - e^{-tx}}{t}\, dt$.

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \to \dfrac{1 - e^{-tx}}{t}$ est continue et il en est de même pour tout x de la fonction $t \to \dfrac{1 - e^{-tx}}{t}$ qui se prolonge par continuité en 0. En outre, si on écrit $\dfrac{1 - e^{-tx}}{t}$ sous la forme $\psi(tx)x$

avec $\psi(u) = \dfrac{1 - e^{-u}}{u}$, on remarque que ψ est une fonction continue sur $[0, \infty[$ de limite nulle en $+\infty$, donc est bornée. Il en résulte que $\psi(xt)x$ est bornée sur toute partie de la forme $A \times I$, où A est un segment et $I = [0, a]$, et donc que l'hypothèse de domination s'applique avec comme fonction dominante une constante, qui est intégrable sur $[0, a]$. Donc que φ est continue sur tout segment A et donc continue sur $\mathbf{R}$.

De plus, si on dérive sous le signe intégral par rapport à x, on obtient $\int_0^a e^{-tx}\,dt = g'(x)$, puisque, là aussi, la fonction e^{-tx} est bornée sur tout ensemble de la forme $A \times I$, où A est un segment quelconque. On en déduit que :

$$g'(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{x}$$

Comme $g(0) = 0$, on a donc $g(x) = \int_0^x g'(t)\,dt = \int_0^x \dfrac{1 - e^{-ta}}{t}\,dt$, intégrale fonction de la borne supérieure et non plus intégrale dépendant d'un paramètre. Curieusement, les rôles de a et x sont symétriques, ce qu'on aurait pu voir :

- ou bien en faisant le changement de variable $u = \dfrac{tx}{a}$ dans la première intégrale
- ou bien en développant en série l'exponentielle. On obtient :

$$g(x) = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, t^{n-1}\, x^n\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\; x^n \int_0^a t^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, \frac{x^n a^n}{n}$$

fonction symétrique de a et x. (On vérifiera que le théorème d'intégration terme à terme d'une série peut s'appliquer, autorisant la permutation de $\sum_{n=1}^{\infty}$ et de $\int_0^a$). Il n'existe aucune expression de g sous forme de fonctions élémentaires simples, mais on dispose de plusieurs formes de g : intégrales, séries...

EXEMPLE 3 :

❑ La fonction $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$ est définie pour $x > 0$ (voir L2/SERIES.PDF). Montrons qu'elle est continue. Pour cela, considérons $0 < a < 1 < b$:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt = \int_0^1 e^{-t}\, t^{x-1}\,dt + \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$$

La fonction $(x,t) \to e^{-t}\, t^{x-1}$ est continue sur $[a, b] \times]0, +\infty[$. Pour t élément de $[0,1]$, elle est majorée par $e^{-t}\, t^{a-1}$, qui est intégrable sur $[0,1]$ donc la première intégrale est une fonction continue de x. Pour la seconde, elle est majorée par $e^{-t}\, t^{b-1}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc la deuxième intégrale est une fonction continue de x.

Γ étant continue sur tout intervalle $[a, b]$, elle est continue en tout point de $]0,+\infty[$ puisque tout point de cet intervalle peut être mis à l'intérieur d'un intervalle $[a, b]$ adéquat.

On prouvera de même que $\Gamma(x)$ est dérivable de dérivée $\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\, t^{x-1}\, dt$, et par récurrence, Γ est indéfiniment dérivable et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)^n\, t^{x-1}\, dt$.

Une curiosité : $\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\, dt$ et on peut montrer que cette intégrale n'est autre que $-\gamma$, où γ est la constante d'Euler $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$ (voir la partie *Exercices* de ce chapitre).

EXEMPLE 4 :

❑ Soit $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt$. Peut-on conclure que F est dérivable ? En particulier, a-t-on $F'(x) = -\int_0^{\infty} \frac{t \sin(tx)}{1+t^2}\, dt$? Ce résultat est loin d'être évident. La fonction majorante naturelle de la valeur absolue de $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} = -\frac{t\sin(tx)}{1+t^2}$ est en effet $\frac{t}{1+t^2}$ qui n'est pas intégrable et nous ne pouvons donc pas conclure directement en utilisant le théorème de dérivation. En fait, il est possible de montrer que $\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \exp(-|x|)$ (une preuve est donnée en exercice), qui n'est pas dérivable en 0, alors que $\int_0^{\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\, dt$ est nul en 0.

EXEMPLE 5 :

❑ Soit $x > 0$ et $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$. Sur tout ensemble de la forme $\{(x, t) \in]a, +\infty[\times]0, \infty[\}$, avec $a > 0$, $e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$ est dominée par e^{-at}. Sa dérivée par rapport à x également. F est donc continue et dérivable en tout point de $]a,+\infty[$, et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$, a étant quelconque. Sa dérivée vaut :

$$F'(x) = -\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin(t)\, dt = -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-xt+it}\, dt$$

$$= \operatorname{Im} \frac{1}{i-x} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$\Rightarrow \quad F(x) = -\arctan(x) + \text{Cte}$

Par ailleurs, $|F(x)| \leq \int_0^{\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers l'infini, donc Cte $= \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a : $\boxed{\int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)} = \arctan \frac{1}{x}$

La formule est également vraie en $x = 0$. En effet, on a montré dans les exercices du chapitre sur les séries et intégrales généralisées L2/SERIES.PDF que $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ (**intégrale de Dirichlet**). Il en résulte que F est continue en 0, mais une démonstration directe de ce fait basée sur le présent chapitre n'est pas facile car la seule hypothèse de domination possible jusqu'en $x = 0$ serait avec la fonction dominante $\dfrac{|\sin(t)|}{t}$, mais celle-ci n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. On peut cependant écrire que $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. On vérifiera que, pour tout x, la série $\sum f_n(x)$ est une série alternée telle que $|f_n(x)|$ décroît. On peut alors montrer que la série converge uniformément en majorant la valeur absolue du reste par la valeur absolue de son premier terme :

$$\forall\, x\,,\ \left|\mathrm{F}(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} e^{-xt}\frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+1)\pi}$$

La convergence étant uniforme et les fonctions f_n étant continues (intégrant sur un segment, l'hypothèse de domination est vérifiée avec la fonction constante 1), il en est de même de F. On peut alors retrouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet en faisant tendre x vers 0.

EXEMPLE 6 :

❑ En utilisant l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$, montrons que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_0^{\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, qui est donc différente de $\displaystyle\int_0^{\infty} \lim_{x\to0^+} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. Remarquons qu'a priori, la fonction $\dfrac{t\sin(tx)}{1+t^2}$ ne vérifie pas d'hypothèse de domination car la fonction dominante la plus naturelle est $\dfrac{t}{1+t^2}$, qui n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour conclure, il convient de modifier l'écriture de l'intégrale. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t\sin(tx)}{1+t^2} - \frac{\sin(tx)}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u \text{ en posant } u = xt \\
&= -\int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On a réussi à augmenter le degré du dénominateur, ce qui permet maintenant de vérifier une hypothèse de domination sur la fonction $\dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$:

$$\forall\, x \in\,]0, 1],\ \forall\, t \in\,]0, +\infty[,\ \left|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right| \leq \frac{tx}{t(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}, \text{ fonction intégrable sur }]0, +\infty[$$

Donc on peut écrire :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt = \int_0^{\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt = 0$$

donc $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \int_0^{\infty} \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

EXEMPLE 7 (**Lemme d'Hadamard**):

❑ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^n. Alors la fonction $g : x \to \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f'(0) \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$. Il suffit de constater que, pour tout x, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xt)\,dt$. On montre que g est C^{n-1} sur $\mathbb{R}$ en le montrant sur tout intervalle $]-a, a[$, $a > 0$. Comme $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} f'(xt) = t^{n-1} f^{(n)}(xt)$, l'hypothèse de domination est prouvée en majorant $\left|\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} f'(xt)\right|$ par une constante majorant $f^{(n)}$ sur $[-a, a]$. On a de plus, pour tout k entier entre 0 et $n-1$:

$$g^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial x^k} f'(xt)\,dt = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(xt)\,dt$$

donc $\displaystyle g^{(k)}(0) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(0)\,dt = \frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$.

❑ Plus généralement, soient f et h deux fonctions de classe C^n, s'annulant toutes deux en 0, mais telles que $h'(0) \neq 0$. Alors $g : x \to \begin{cases} \dfrac{f(x)}{h(x)} \text{ si } x \neq 0 \\ \dfrac{f'(0)}{h'(0)} \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^{n-1} sur un voisinage $]-\alpha, \alpha[$ de 0. On prend α tel que h ne s'annule pas sur $]-\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$. Un tel α existe car h est strictement monotone dans un voisinage de 0. D'après la partie précédente, il existe des fonctions φ et ψ de classe C^{n-1} telles que $f(x) = x\varphi(x)$ et $h(x) = x\psi(x)$. Donc $g = \dfrac{\varphi}{\psi}$ avec ψ ne s'annulant pas sur $]-\alpha, \alpha[$, donc g est C^{n-1} sur cet intervalle. La relation $g'(0) = \dfrac{f'(0)}{h'(0)}$ se montre en dérivant $f(x) = g(x)h(x)$ puis en faisant tendre x vers 0.

Exercices

1- Enoncés sur les suites de fonctions

Exo.1-1) Etudier la convergence simple puis uniforme des suites de fonctions suivantes :

a) Sur $]0, +\infty[$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{nx+2}\exp(-\dfrac{1}{nx})$

b) Sur $[0, 1]$, $\quad f_n(x) = \varphi(x^n)$, où φ est une fonction continue sur $[0, 1]$ non identiquement nulle et telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

c) Sur $\mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

d) Sur $[0, \pi]$ $\quad f_n(x) = nx \sin(x)\, e^{-nx}$

e) Sur $[0, +\infty[$, $\quad f_n(x) = n^{\alpha}\, x\, e^{-nx}$, suivant les valeurs de α.

f) Sur $[0, +\infty[$, $\quad f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{x + n}{nx + 1}\right)$

g) Sur $]-\pi, \pi[$, $\quad$ Soit $f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(nx)}{n\sin(x)} \text{ sinon} \end{cases}$

h) Sur $\mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \text{Min}\,\{n, \dfrac{x^2}{n}\}$

i) Sur $[0, 1]$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} nx \text{ sur } [0, \frac{1}{n}] \\ -nx + 2 \text{ sur } [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 \text{ sur } [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

Exo.1-2) Soit (f_n) la suite de fonction définie pour n entier strictement positif par :

$$\forall\, x > 0,\ f_n(x) = \frac{1}{4n-3}\left(\frac{(4n-3)x + 4n - 2}{x + 2} - \frac{2n-1}{(2n-1)x + 1}\right)$$

a) Chercher la fonction limite simple de la suite (f_n) sur $]0, +\infty[$. On note g cette limite.

b) Pour tout n, montrer que f_n se prolonge en une fonction C^1 sur $[0, +\infty[$. Que vaut $f_n'(0)$?

c) Montrer que g se prolonge en une fonction C^1 sur $[0, +\infty[$. Comparer $g(0)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)$ ainsi que $g'(0)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)$. Représenter graphiquement la fonction g ainsi que quelques fonctions f_n.

d) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers la fonction g sur $]0, +\infty[$?

Exo.1-3) Soit (P_n) la suite de polynômes définis sur $[0, 1]$ par :

$$P_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \geq 1,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)).$$

a) Montrer que : $\forall\, x \in [0,1],\ \forall\, n,\ 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$

b) En déduire que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

Exo.1-4) Les deux questions sont indépendantes.

a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) définies par $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^{-n}$ converge uniformément vers la fonction $x \to e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n \text{ si } 0 \leq x \leq n \\ 0 \text{ si } x > n \end{cases}$ converge uniformément vers la fonction $x \to e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

Exo.1-5) Soient f, g deux fonctions et (f_n) une suite de fonctions, toutes définies continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Si (f_n) converge simplement vers f, est-ce que $(f_n \circ g)$ converge simplement vers $f \circ g$?

b) Si (f_n) converge simplement vers f, est-ce que $(g \circ f_n)$ converge simplement vers $g \circ f$?

c) Si (f_n) converge uniformément vers f, est-ce que $(f_n \circ g)$ converge uniformément vers $f \circ g$?

d) Si (f_n) converge uniformément vers f, est-ce que $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$?

Exo.1-6) a) Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers f continue. Soit (x_n) une suite convergeant vers un réel x. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$?

b) Même question en supposant que (f_n) converge uniformément vers f.

c) Même question en supposant que (f_n) converge simplement vers f et qu'il existe $k > 0$, tel que, pour tout n, f_n est une fonction k-lipschitzienne.

Exo.1-7) Soit f_n l'application définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$

a) Tracer le graphe de f_n.

b) On considère la suite définie par $x_1 > 0$ et $x_{n+1} = f_n(x_n)$. Déterminer la limite de la suite (x_n).

c) Déterminer un équivalent de (x_n) quand n tend vers l'infini.

Exo.1-8) a) Montrer que, pour tout n entier strictement posif, les intégrales $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}\,\mathrm{d}x$ sont définies.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}_n$.

Exo.1-9) Soit f continue sur $[0, 1]$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^n\,\mathrm{d}t$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^n\,(1 - t)\,\mathrm{d}t$

c) Plus généralement, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p+1} \displaystyle\int_0^1 f(t)\, t^n\,(1 - t)^p\,\mathrm{d}t$ pour tout entier p positif ou nul.

d) Donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 t^n\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.

e) Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1 + t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$

Exo.1-10) a) Trouver une suite de fonctions (f_n) continues sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall\, t \in [0, 1],\ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = +\infty$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = 0$$

b) Trouver une suite de fonctions (f_n) continues sur [0, 1] telles que :

$$\forall\, t \in [0, 1], \ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = +\infty$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = -\infty$$

c) Donner un exemple de suites de fonctions f_n intégrables sur $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, mais telle que la suite d'intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx$ tende vers $+\infty$.

d) Trouver une suite de fonctions non intégrables sur $\mathbb{R}$, qui converge uniformément vers une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

e) Trouver une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, qui converge uniformément vers une fonction non intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exo.1-11) Soit f_n continue sur $[0, +\infty[$ définie pour n entier strictement positif par :

$f_n(0) = \dfrac{1}{n}$

f_n est affine sur $[0, n^2]$

f_n est nulle sur $[n^2, +\infty[$

a) Quelle est la limite simple de (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$? La convergence est-elle uniforme ? Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)\, dx$?

b) Soit $\varphi : x \in\,]0, +\infty[\, \to \dfrac{2}{3^{3/2}\sqrt{x}}$. Montrer que φ majore toutes les fonctions f_n sur $]0, +\infty[$. φ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$? Peut-on trouver une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ qui majore toutes les fonctions f_n ?

Exo.1-12) Soit $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{1/n}\,(1 + t)}\, dt$, pour $n > 1$.

a) Montrer que, pour tout n, l'intégrale I_n est convergente.

b) Montrer que $\mathrm{I}_n \sim n$ quand n tend vers l'infini.

Exo.1-13) a) Montrer que, pour tout $n > 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u \sin(u)}{n^2 + u^2}\, du$ est convergente.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{u \sin(u)}{n^2 + u^2}\, du$

Exo.1-14) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{\infty} \frac{n \ln(1 + \frac{t}{n})}{1 + t^2}\, dt$.

Exo.1-15) a) Montrer que, pour tout entier $n > 0$, l'intégrale $I_n = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2 + \frac{t}{n}} \, dt$ est définie.

b) Donner un équivalent de I_n, quand n tend vers l'infini.

Exo.1-16) On se propose de montrer que $\int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) \, dt + \gamma = 0$, où γ est la constante d'Euler, définie comme étant $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

a) Montrer que l'égalité à prouver est équivalente à :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \frac{1 - (1 - t/n)^n}{t} \, dt + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(\frac{t}{n}) \, dt = 0$$

b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_n^{\infty} e^{-t} \ln(\frac{t}{n}) \, dt = 0$.

c) Il reste donc à montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \frac{1 - (1 - t/n)^n}{t} \, dt + \int_0^n e^{-t} \ln(\frac{t}{n}) \, dt = 0$. Par une intégration par parties, montrer que cette relation est équivalente à $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \frac{e^{-t} - (1 - t/n)^n}{t} \, dt = 0$ et conclure.

2- Enoncés sur les séries de fonctions

Exo.2-1) Soit $f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n2^n}$.

a) Montrer que la série converge pour tout θ et que f est C^1.
b) calculer $f(\theta)$.

Exo.2-2) Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) f est-elle continue ?
c) f est-elle C^1 ?
d) Quelle est la limite de f' en 0 ?

Exo.2-3) Montrer que $\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ et que $\int_0^1 \frac{1}{x^x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exo.2-4) Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t + 1} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt$.

Exo.2-5) Soit $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de g ? g est-elle continue ?

b) En comparant $g(x)$ avec $\int_0^{\infty} \frac{x}{t^2 + x^2}\,dt$, calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Pour tout n, calculer la dérivée de la fonction $t \to \frac{t}{t^2 + n^2}$. En déduire, pour tout $x \geq 0$, la valeur de $\int_0^x \frac{n^2 - t^2}{(t^2 + n^2)^2}\,dt$. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{n^2 - t^2}{(t^2 + n^2)^2}\,dt$ et $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - t^2}{(t^2 + n^2)^2}\,dt$. Pour cette dernière intégrale, on pourra considérer $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - t^2}{(t^2 + n^2)^2}\,dt$.

d) On considère la fonction $\varphi : x \to \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{e^t - 1}\,dt$. Montrer que $g = \varphi$.

Exo.2-6) Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) Montrer que : $\forall\, x > 1$, $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt$.

b) Montrer que la série de droite converge pour tout $x > 0$. Cette formule permet d'étendre ζ sur $]0, 1[$.

c) Montrer que, quand x tend vers 1, $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$, où $\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ (constante d'Euler).

Exo.2-7) L'objet de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Il est donc interdit de l'utiliser. La démonstration se fait en deux temps. On prouve d'abord l'existence d'un nombre L tel que $n! \sim L\, n^n e^{-n} \sqrt{n}$, puis on détermine la valeur de L. Cette détermination repose sur deux variantes, l'une qui utilise la formule de Wallis, l'autre l'intégrale de Gauss.

a) Soit $u_n = n!\, n^{-n-1/2} e^n$. Etudier la nature de la série $\sum \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite L strictement positive. On a donc $n! \sim L\, n^n e^{-n} \sqrt{n}$. Reste à déterminer L.

b) Dans le chapitre L2/SERIES.PDF, on a montré la formule de Wallis :

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

Utiliser cette formule pour en déduire la valeur de L.

c) Dans le chapitre L2/INTMULT.PDF, on a déterminé la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et 1 à la fonction $(1 + x)^{2n+1}$. Montrer par ailleurs que le reste intégral de cette formule peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\binom{2n}{n}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

En déduire[3] la valeur de L.

Exo.2-8) Dans les exercices du chapitre L1/COMPLEXE.DOC, on a montré que, pour tout réel x et tout entier strictement positif n, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{x + k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^{n-1}}$. On va se servir de cette égalité pour montrer que, pour tout x, $\displaystyle\sin(x) = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

a) On prend n impair de la forme $2m + 1$. Montrer que :

$$\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{n}\right)} = (-1)^m\, 2^{2m}\prod_{k=1}^{m}\sin\left(\frac{x+k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{x-k\pi}{n}\right) = 2^{2m}\prod_{k=1}^{m}\left(\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

b) Montrer que $\displaystyle\frac{\sin(x)}{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)} = \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$

c) Pour conclure, on fait tendre m vers l'infini. Le membre de gauche tend alors vers $\dfrac{\sin(x)}{x}$. Chaque facteur du membre de droite, de la forme $1 - \dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, tend, pour chaque k, vers $1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}$. On est donc tenté de croire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)$ tend vers $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, ce qui donne le résultat demandé. Mais le raisonnement est cependant incorrect, comme le montre l'exemple $\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ qui tend vers e et non vers 1 quand m tend vers l'infini, alors que chaque facteur tend vers 1. Pour conclure correctement, il convient de prouver le lemme suivant. Considérons des termes $u_k(m)$ tels que, pour tout entier k, $u_k(m)$ admette une limite u_k quand m tend

[3] Cette méthode a été trouvée en 2000 par D. Romik, Stirling's Approximation for n!: The Ultimate Short Proof?, 107:6, Amer. Math. Monthly (juin-juillet 2000), 556.

vers l'infini. On note $v_k = \text{Sup } \{|u_k(m)|, m \in \mathbf{N}\}$ et on suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ converge. Montrer que, pour tout m, $\sum_k u_k(m)$ et $\sum_k u_k$ convergent et que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(m)$. Montrer que, pour tout m, $\prod_k (1 + u_k(m))$ et $\prod_k (1 + u_k)$ convergent, et que $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) = \lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k(m))$. Appliquer ensuite ce lemme à l'exemple considéré.

Exo.2-9) Soit une suite (a_n) réelle décroissante positive. Pour n entier, on note f_n la fonction qui, à $x \in [0, 1]$, associe $f_n(x) = a_n x^n(1 - x)$.

a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur [0, 1].

b) Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur [0, 1] si et seulement si la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

c) Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur [0, 1] si et seulement si la suite (a_n) converge vers 0.

Exo.2-10) Soit f une fonction continue sur [0, 1], et, pour tout entier n :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 f(x)(1 + x + ... + x^{n-1})\, dx.$$

a) Si $f(1) = 0$, montrer que $\mathrm{I}_n = o(\ln(n))$ quand n tend vers l'infini.

b) Si $f(1) \neq 0$, montrer que $\mathrm{I}_n \sim f(1)\ln(n)$ quand n tend vers l'infini.

c) Pour tout n, on pose $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - x^n}{\cos(\frac{\pi x}{2})}\, dx$. Montrer que, pour tout n, J_n est une intégrale généralisée convergente et donner un équivalent de la suite (J_n) quand n tend vers l'infini.

3- Enoncés sur les intégrales dépendant d'un paramètre

Exo.3-1) a) Montrer que la fonction $f : x \to \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt}\, dt$ est de classe C^{∞} sur $[0, +\infty[$.

b) Quel est son développement limité à l'ordre n à droite de 0 ?

Exo.3-2) Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}\, dt$.

a) Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est C^2 sur $]0, +\infty[$

c) Soit $g(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2}$. Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.

d) En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.

e) Montrer que : $\forall x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2}\, du$.

f) En déduire la valeur de f et celle de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,du$.

Exo.3-3) a) Montrer que la fonction F: $x \to \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)^2}{t^2}\, e^{-xt}\,dt$ est continue sur $[0, +\infty[$ et C^2 sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer F'' puis en déduire F.

c) Donner les valeurs de :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,dt,\ \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt,\ \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,e^{-t}\,dt,\ \int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,e^{-xt}\,dt\ (x > 0)$$

Exo.3-4) Soit φ et ψ deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et f une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$.

a) Quelle est la dérivée de la fonction $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\,dt$?

b) Quelle est la dérivée de H : $x \to \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,dt$?

c) En déduire H, puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt$.

Exo.3-5) L'intégrale de Dirichlet est l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. On a montré dans le chapitre L2/SERIES.PDF qu'elle vaut $\frac{\pi}{2}$, et donner une ébauche d'une autre démonstration dans le présent cours. On donne ici plusieurs autres démonstrations de ce résultat.

a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{it})\,dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{e^{-it}-e^{-t}}{it}\,dt$, puis prendre la partie réelle des deux membres et faire tendre x vers $+\infty$.

b) Soient X et Y strictement positifs. On considère l'égalité suivante (théorème de Fubini appliqué à la fonction $(x, y) \to e^{-xy}\sin(y)$ sur le rectangle $[0, X] \times [0, Y]$. Voir le chapitre L2/INTMULT.PDF) :

$$\int_0^Y \left(\int_0^X e^{-xy}\sin(y)\,dx\right)dy = \int_0^X \left(\int_0^Y e^{-xy}\sin(y)\,dy\right)dx$$

Déduire de cette égalité que $\displaystyle\int_0^Y \frac{1-e^{-Xy}}{y}\sin(y)\,dy = \arctan(X) - \operatorname{Im}\int_0^X \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$ (où Im désigne la partie imaginaire), puis faire tendre X vers l'infini puis Y vers l'infini dans les deux membres.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, puis faire tendre x vers 0.

Exo.3-6) L'intégrale de gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\ dt = \sqrt{2\pi}$ a été calculée dans le chapitre L2/INTMULT.PDF. On donne ci-dessous une autre démonstration de cette égalité.

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})\ dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \exp(-\frac{x^2(1+t^2)}{2})\ dt$ pour $x \geq 0$.

a) Exprimer g en fonction de f.

b) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\ dt$ puis $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\ dt$.

Exo.3-7) Donner un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_x^{\infty} \exp(-t^2)\ dt$.

Exo.3-8) Intégrale de Frullani. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ telle que f' soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Soient a et b deux réels strictement positifs.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\ dx = (\lim_{x \to +\infty} f(x) - f(0)) \ln(\frac{a}{b})$.

On pourra partir de l'égalité $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{X} \int_b^a f'(tx)\ dt\ dx = \int_b^a \int_{\varepsilon}^{X} f'(tx)\ dx\ dt$, $0 < \varepsilon < X$ (théorème de Fubini sur $(t, x) \to f'(tx)$, appliqué au rectangle $[a, b] \times [\varepsilon, X]$).

b) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x}\ dx$?

c) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x}\ dx$?

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} = \ln(2)$.

Exo.3-9) Montrer que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_1^A e^{it/A}\ \frac{e^{it}-1}{t} + \frac{1}{t}\ dt$ est égale non pas à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\ dt$ comme on pourrait s'y attendre, mais à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\ dt - \int_0^1 \frac{e^{it}-1}{t}\ dt$.

Exo.3-10) On considère la fonction $f : x \geq 0 \to \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\ dt$.

a) Montrer que f est définie et continue pour $x \geq 0$.

b) Montrer que : $f(x) = -x\ln(x) + x + \dfrac{\pi x^2}{4} + o(x^2)$ quand x tend vers 0.

Exo.3-11) a) Montrer que la fonction $f : x \to \int_0^{\pi/2} \arctan(x \tan(\theta))\, d\theta$ est continue sur $[0, +\infty[$ et C^1 sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que, pour $x \in\,]0, 1[$, $f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\, dt$

c) En prenant la limite quand x tend vers 1, en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\, dt$, de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4- Solutions sur les suites de fonctions

Sol.1-1) a) Il y a convergence simple vers 0 mais pas convergence uniforme puisque $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3e}$, donc $\| f_n \|_\infty \geq \frac{1}{3e}$.

b) Pour tout $x \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \varphi(0) = 0$, et, pour $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \varphi(1) = 0$. La convergence est donc simple vers la fonction nulle. Mais il n'y a pas convergence uniforme si $\varphi \neq 0$ puisque $\| f_n \|_\infty = \| \varphi \|_\infty > 0$.

c) Pour $|x| < 1$ la limite est nulle. Pour $|x| = 1$, elle vaut $\frac{1}{2}$. Pour $|x| > 1$, elle vaut 1. La convergence ne peut être uniforme sinon la limite serait continue. Cependant, on pourra prouver la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ ou sur tout intervalle $[-b, b]$ avec $0 < b < 1$.

d) La suite converge simplement vers 0 (distinguer selon que x est nul ou non nul).

f_n est positive et majorée par $nx^2 e^{-nx} = \frac{1}{n}(n^2x^2 e^{-nx}) = \frac{1}{n} y^2 e^{-y}$ avec $y = nx$. Or la fonction $y \in [0, +\infty[\to y^2 e^{-y}$ est bornée car continue et de limite nulle en $+\infty$, donc il existe une constante M telle que : $\forall n, \forall x \geq 0, |f_n(x)| \leq \frac{M}{n}$ et la convergence est uniforme.

e) $\forall n$, $f_n(0) = 0$, et pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$ donc il y a convergence simple vers la fonction nulle.

Etudions $x \to x\, e^{-nx}$. Sa dérivée est du signe de $1 - nx$ donc le maximum est atteint en $x = \frac{1}{n}$ donc $\| f_n \|_\infty = n^{\alpha-1} e^{-1}$. Il y a convergence uniforme si et seulement si $\alpha < 1$.

f) Pour $x = 0$, la limite simple est $\frac{\pi}{2}$, sinon, elle est vaut $\arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. On retrouve la valeur $\frac{\pi}{2}$ pour $x = 0$.

Etudions la convergence uniforme.

$f_n(x) - (\frac{\pi}{2} - \arctan(x))$ a pour dérivée $\frac{1-n^2}{(1+nx)^2} \frac{1}{1+(\frac{x+n}{1+nx})^2} + \frac{1}{1+x^2}$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{n^2-1}{(1+nx)^2+(x+n)^2}$$

qui a même signe que $(1+nx)^2 + (x+n)^2 - (n^2-1)(x^2+1) = 2 + 4nx + 2x^2 > 0$

donc $f_n(x) - (\frac{\pi}{2} - \arctan(x))$ est strictement croissante et varie sur $[0, +\infty[$ entre $\arctan(n) - \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$. Donc sa norme infinie vaut $\arctan(\frac{1}{n})$ et la convergence est uniforme.

g) Pour $x \neq 0$, $f_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, alors que $f_n(0)$ tend vers 1. La convergence est simple vers la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. La convergence n'est pas uniforme sinon f serait continue, les f_n étant continues.

On pourrait aussi montrer $\| f_n - f \|_\infty \geq 1$ puisque $\lim\limits_{x\to 0,\, x\neq 0} f_n(x) - f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{n\sin(x)} = 1$. On peut d'ailleurs montrer que $\| f_n - f \|_\infty = 1$ en vérifiant par récurrence que :

$$\forall\, x \in [0, \pi],\ |\sin(nx)| \leq n\sin(x)$$

h) Pour tout x, $\exists$ N, $\forall\, n \geq$ N, $x \in [-n, n]$, donc $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ de limite nulle. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Il n'y a pas convergence uniforme car $\| f_n \|_\infty = n$.

i) Il y a convergence simple vers 0.

En effet, $\forall\, n$, $f_n(0) = 0$, et pour tout $x \in\,]0, 1]$, $\forall\, n > \frac{2}{x}$, $f_n(x) = 0$.

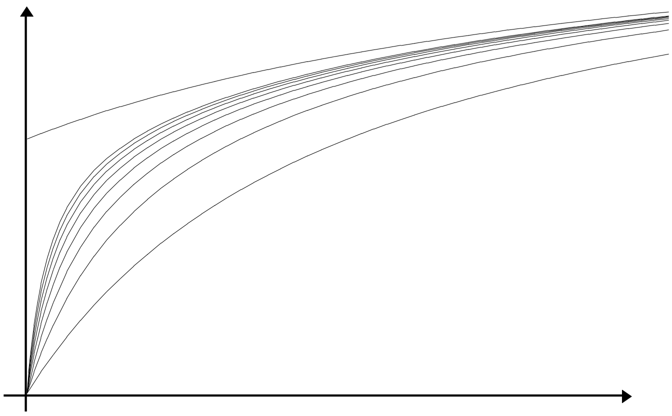
Il n'y a pas de convergence uniforme car $\| f_n \|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1$.

Sol.1-2) a) $g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$

b) On trouvera $f_n(0) = 0$ et $f_n'(0) = n$

c) $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g'(0) = \frac{1}{4}$

Ci-dessous, le graphe de g et de quelques fonctions f_n.



d) La convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$ sinon on pourrait permuter les symboles $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x > 0}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}$, et l'on aurait :

$$\frac{1}{2} = g(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x > 0}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x\to 0 \\ x > 0}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$

ce qui est absurde.

On peut aussi dire que $\| f_n - g \|_\infty \geq \left| f_n(x) - g(x) \right|$ pour tout x de $]0, +\infty[$ et l'on aura aussi :

$$\| f_n - g \|_\infty \geq \lim_{x\to 0} \left| f_n(x) - g(x) \right| = \frac{1}{2}$$

Sol.1-3) a) La relation est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie au rang n et donc que :

$$0 \leq \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \qquad (1)$$

On a alors :

$$\sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x) = \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) - \frac{1}{2}(x - \mathrm{P}_n^{\,2}(x)) = (\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x))(1 - \frac{\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)}{2})$$

La relation (1) donne un encadrement du facteur $(\sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x))$. Utilisons la même relation pour encadrer le facteur $(1 - \frac{\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)}{2})$. (1) est équivalent à :

$$\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \leq \mathrm{P}_n(x) \leq \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{nx}{2 + n\sqrt{x}} \leq \mathrm{P}_n(x) \leq \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{x} + nx}{2 + n\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)}{2} \leq \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq 1 - \sqrt{x} \leq 1 - \frac{\sqrt{x} + \mathrm{P}_n(x)}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{x} + nx}{2 + n\sqrt{x}} = \frac{2 + (n-1)\sqrt{x} - nx}{2 + n\sqrt{x}} \qquad (2)$$

donc, en multipliant (1) et (2), tous les termes étant positifs :

$$0 \leq \sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \, \frac{2 + (n-1)\sqrt{x} - nx}{2 + n\sqrt{x}}$$

La quantité $\sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x)$ est donc bien positive. On doit aussi montrer que :

$$\sqrt{x} - \mathrm{P}_{n+1}(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$$

Il suffit pour cela de montrer que

$$\frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}} \, \frac{2 + (n-1)\sqrt{x} - nx}{2 + n\sqrt{x}} \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2 + n\sqrt{x}} \, \frac{2 + (n-1)\sqrt{x} - nx}{2 + n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad (2 + (n+1)\sqrt{x})(2 + (n-1)\sqrt{x} - nx) \leq (2 + n\sqrt{x})^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4 + 4n\sqrt{x} + (n^2 - 2n - 1)x - n(n+1)x^{3/2} \leq 4 + 4n\sqrt{x} + n^2x$$

$$\Leftrightarrow \qquad -(2n+1)x - n(n+1)x^{3/2} \leq 0 \text{ ce qui est bien vrai.}$$

b) Vérifier que, sur $[0, 1]$, la fonction $x \to \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$ est strictement croissante et donc majorée par $\frac{2}{2 + n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Ce résultat est un cas particulier du **théorème de Weierstrass** qui énonce que toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes. On trouvera une démonstration de ce théorème dans les exercices du chapitre sur les *Espaces normés*

L2/EVNORME.PDF et une autre en annexe du chapitre sur les *Espaces métriques* L3/METRIQUE.PDF.

Sol.1-4) a) $f_n(x) - e^{-x}$ est positive car $f_n(x) - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow (1 + \frac{x}{n})^{-n} \geq e^{-x} \Leftrightarrow \ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$ qui est vrai, résultant de l'inégalité $\forall\, t > -1$, $\ln(1 + t) \leq t$ (comparer le graphe de $t \to \ln(1 + t)$ à sa tangente en $t = 0$ ou faire une étude de fonction).

Méthode 1 :

Etudions la fonction $x \to f_n(x) - e^{-x}$. Sa dérivée vaut $e^{-x} - (1 + \frac{x}{n})^{-n-1}$. Etudions le signe de cette dérivée. On a :

$$e^{-x} - (1 + \frac{x}{n})^{-n-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x} \geq (1 + \frac{x}{n})^{-n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq (n + 1) \ln(1 + \frac{x}{n})$$

$$\Leftrightarrow \quad (n + 1) \ln(1 + \frac{x}{n}) - x \geq 0$$

Posons $g_n(x) = (n + 1) \ln(1 + \frac{x}{n}) - x$, et étudions g_n sur $[0, +\infty[$ Sa dérivée vaut $\frac{n+1}{n+x} - 1 = \frac{1-x}{n+1}$. Donc g_n croît sur $[0, 1]$ de 0 à $(n + 1) \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1$ puis décroît sur $[1, +\infty[$ jusqu'à $-\infty$. g_n s'annule donc en une valeur $\alpha_n > 1$ et est positive ou nulle sur $[0, \alpha_n]$. Il en résulte que $f_n(x) - e^{-x}$ croît sur $[0, \alpha_n]$ de 0 à $f_n(\alpha_n)$ puis décroît sur $[\alpha_n, +\infty[$ de $f_n(\alpha_n)$ à 0. Son maximum est donc :

$$f_n(\alpha_n) = (1 + \frac{\alpha_n}{n})^{-n} - \exp(-\alpha_n)$$

avec $\exp(-\alpha_n) = (1 + \frac{\alpha_n}{n})^{-n-1}$ car $g_n(\alpha_n) = 0 = (n + 1) \ln(1 + \frac{\alpha_n}{n}) - \alpha_n$.

On a donc :

$$\| f_n - e^{-x} \|_\infty = f_n(\alpha_n) = (1 + \frac{\alpha_n}{n})^{-n} - (1 + \frac{\alpha_n}{n})^{-n-1} = \frac{\alpha_n}{n} (1 + \frac{\alpha_n}{n})^{-n-1} \leq \frac{\alpha_n}{n}$$

Par ailleurs, $g_n(3) = (n + 1) \ln(1 + \frac{3}{n}) - 3 = (n + 1)(\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})) - 3 \sim -\frac{3}{2n} < 0$ donc $\alpha_n < 3$ pour n assez grand, donc $\| f_n - e^{-x} \|_\infty < \frac{3}{n}$ pour n assez grand, donc $\| f_n - e^{-x} \|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

REMARQUE : la majoration $\alpha_n < 3$ pour n assez grand peut être remplacée par une majoration :

$$\forall\, x > 2, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \alpha_n < x$$

car, si $x > 2$, $g_n(x) = (n + 1) \ln(1 + \frac{x}{n}) - x \sim \frac{2x - x^2}{2n} < 0$ pour n assez grand. Donc $\alpha_n < x$ pour n assez grand. Mais par ailleurs, pour $x = 2$, on vérifiera $g_n(2) = (n + 1)\ln(1 + \frac{2}{n}) - 2 \sim \frac{2}{3n^2}$, donc $2 \leq \alpha_n$.

Ainsi α_n tend vers 2. $(1 + \frac{\alpha_n}{n})^{-n-1}$ tend alors vers e^{-2} et $\| f_n - e^{-x} \|_\infty = \frac{\alpha_n}{n} (1 + \frac{\alpha_n}{n})^{-n-1}$ est équivalent à $\frac{2e^{-2}}{n}$.

<u>Méthode 2</u> : Outre la majoration $\ln(1 + t) \leq t$, on utilise l'inégalité $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t)$ valide sur $[0, +\infty[$, comme on pourra le vérifier en étudiant la fonction $\ln(1 + t) - (t - \frac{t^2}{2})$. Par ailleurs, l'inégalité des accroissements finis donne, pour $a \leq b$, $0 \leq e^b - e^a \leq (b - a)e^b$. Donc, en prenant $a = - x$ et $b = - n \ln(1 + \frac{x}{n})$:

$$
\begin{aligned}
0 \leq f_n(x) - e^{-x} &\leq (x - n \ln(1 + \frac{x}{n})) \exp(- n \ln(1 + \frac{x}{n})) \\
&\leq n (\frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n})) \exp(- n \ln(1 + \frac{x}{n})) \\
&\leq n \frac{x^2}{2n^2} \exp(- n \ln(1 + \frac{x}{n})) \qquad \text{car } t - \ln(1 + t) \leq \frac{t^2}{2} \text{ pour } t \geq 0 \\
&\leq \frac{x^2}{2n} \exp(- n \ln(1 + \frac{x}{n}))
\end{aligned}
$$

On étudie la fonction $x \to \frac{x^2}{2n} \exp(- n \ln(1 + \frac{x}{n}))$ sur $[0, +\infty[$, pour $n \geq 3$. Sa dérivée est du signe de :

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2(n + x)} = \frac{x(2n - (n - 2)x)}{2n(n + x)}$$

La dérivée est positive sur $[0, \frac{2n}{n - 2}]$ et négative ensuite. La fonction majorante admet donc un maximum en $\frac{2n}{n - 2}$, maximum qui vaut :

$$
\begin{aligned}
\frac{2n}{(n - 2)^2} \exp(- n \ln(1 + \frac{2}{n - 2})) &= \frac{2n}{(n - 2)^2} \exp(- n \ln(\frac{n}{n - 2})) \\
&= \frac{2n}{(n - 2)^2} \exp(n \ln(\frac{n - 2}{n})) = \frac{2n}{(n - 2)^2} \exp(n \ln(1 - \frac{2}{n})) \\
&\sim \frac{2e^{-2}}{n}
\end{aligned}
$$

Donc $\| f_n - e^{-x} \|_\infty$ est majorée par une quantité équivalente à $\frac{2e^{-2}}{n}$. On évite ici le recours à la suite auxiliaire (α_n).

b) La limite simple est e^{-x}. Pour $x > n$, la différence entre la limite et f_n est majorée par e^{-n}. Pour x entre 0 et n, la différence vaut $e^{-x} - (1 - \frac{x}{n})^n$. Elle est positive car :

$$e^{-x} - (1 - \frac{x}{n})^n \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq (1 - \frac{x}{n})^n \Leftrightarrow - \frac{x}{n} \geq \ln(1 - \frac{x}{n})$$

qui est vrai car $\ln(1 + t) \leq t$ pour $t > - 1$. Si on pose $x = tn$, on se ramène à $g(t) = e^{-nt} - (1 - t)^n$, avec t élément de $[0, 1]$. On a $g'(t) = -ne^{-nt} + n(1 - t)^{n-1}$, donc :

$$g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-nt} \leq (1 - t)^{n-1} \Leftrightarrow -nt \leq (n - 1) \ln(1 - t).$$

Soit $\varphi(t) = (n-1)\ln(1-t) + nt$. On a $\varphi'(t) = n - \dfrac{n-1}{1-t} = \dfrac{1-nt}{1-t}$, donc φ est croissante sur $[0, \dfrac{1}{n}]$ de 0 à $\varphi(\dfrac{1}{n})$ puis décroissante sur $[\dfrac{1}{n}, 1[$ de $\varphi(\dfrac{1}{n})$ jusqu'à $-\infty$. Il existe donc une valeur α_n supérieure à $\dfrac{1}{n}$ telle que $\varphi(\alpha_n) = 0$, autrement dit : $\exp(-n\alpha_n) = (1-\alpha_n)^{n-1}$. On a $\varphi \geq 0$ sur $[0, \alpha_n]$ et $\varphi \leq 0$ sur $[\alpha_n, 1[$. On vérifiera que $\varphi(\dfrac{2}{n}) \sim -\dfrac{2}{3n^2} < 0$, donc, pour n assez grand, $\alpha_n < \dfrac{2}{n}$. g' étant du signe de φ, g est maximal en α_n.

Or $g(\alpha_n) = \exp(-n\alpha_n) - (1-\alpha_n)^n = (1-\alpha_n)^{n-1} - (1-\alpha_n)^n = (1-\alpha_n)^{n-1}\,\alpha_n < \dfrac{2}{n}$.

On a montré ainsi que $\| g \|_\infty < \dfrac{2}{n}$.

La convergence est donc bien uniforme.

Sol.1-5) a) Oui, car si $\forall x$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, alors a fortiori, en remplaçant x par $g(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(g(x)) = f(g(x))$.

b) Oui car g est continue. En effet, si $\forall x$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, la continuité de g en $f(x)$ permet d'écrire :

$$g(f(x)) = g(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} g(f_n(x))$$

Malgré la ressemblance entre a) et b), on notera que la continuité de g est utilisée pour conclure dans le b), alors qu'aucune hypothèse de continuité n'est utile dans le a).

c) Oui, car $\| f_n \circ g - f \circ g \|_\infty = \text{Sup } \{|f_n(g(x)) - f(g(x))|, x \in \mathbf{R}\}$

$$\leq \text{Sup } \{|f_n(y) - f(y)|, y \in \mathbf{R}\} = \| f_n - f \|_\infty$$

d) Non en général. Exemple :

❑ Prenons la suite de terme général $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$ qui converge uniformément vers x, et $g(x) = e^x$. Alors $(g \circ f_n)(x) = \exp(x + \dfrac{1}{n}) = \exp(x)\exp(\dfrac{1}{n})$ dont la différence avec e^x n'est pas majoré.

❑ Si g lipschitzienne, ou même seulement uniformément continue, il y a bien convergence uniforme de $(g \circ f_n)$ vers $g \circ f$ car alors :

$$\forall \varepsilon, \exists \alpha, \forall x, \forall y, |x - y| < \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

et $\quad \forall \alpha, \exists N, \forall n \geq N, \forall x, |f_n(x) - f(x)| < \alpha$

Donc, $\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, \forall x, |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$

En particulier, il y a convergence uniforme sur tout segment, puisque g est uniformément continue sur tout segment (voir le **théorème de Heine** dans L1/INTEGRAL.PDF).

❑ Il ne suffit pas que g soit bornée pour qu'il y ait convergence uniforme. Exemple : $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$,

$$f(x) = x \text{ et } g(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \leq 1 \\ x - k \ \text{ pour } x \in [k, k + 1 - \dfrac{1}{k}],\ k \text{ entier, } k \geq 1 \\ (k-1)(k+1-x) \text{ pour } x \in [k + 1 - \dfrac{1}{k}, k+1] \end{cases}.$$

On a alors :

$$g(f_n(n + 1 - \frac{1}{n})) = g(n + 1) = 0$$

alors que $g(f(n + 1 - \frac{1}{n})) = g(n + 1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$. La différence ne tend pas vers 0.

Sol.1-6) a) Si la convergence est simple, c'est faux. Exemple : $f_n = nx$ sur $[0, \frac{1}{n}]$, $2 - nx$ sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et 0 ailleurs. Alors f_n est continue pour tout n et la suite converge simplement vers 0. Soit $x_n = \frac{1}{n}$. Alors la suite (x_n) converge vers $x = 0$. Pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = 1$ alors que $f(x) = 0$.

b) Si la convergence est uniforme, c'est vrai. En effet :

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \| f_n - f \|_\infty + |f(x_n) - f(x)|$$

et chacun des deux termes tend vers 0.

c) Pour des fonctions k-lipschitziennes, on a :

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq k\,|x_n - x| + |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Les démonstrations b) et c) sont ressemblantes mais en b), on introduit la valeur intermédiaire $f(x_n)$, alors qu'en c), c'est $f_n(x)$.

Sol.1-7) a) f_n croît sur $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ depuis 0 jusqu'à $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, puis décroît et tend vers 0 en $+\infty$. La tangente à l'origine est la droite d'équation $y = x$. La suite de fonctions converge uniformément vers la fonction $f = 0$ puisque $\| f_n \|_\infty = f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$.

b) Par récurrence, la suite est positive, et l'on a :

$$0 \leq x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2} \leq x_n$$

donc la suite est décroissante minorée, donc converge vers une limite l.

Si $l > 0$, alors $1 + nx_n^2 \sim nl^2$ tend vers l'infini, donc $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + nx_n^2}$ tend vers 0, ce qui est contradictoire.

Donc $l = 0$.

On peut aussi appliquer le b) de l'exercice précédent. Puisque (f_n) converge uniformément vers la fonction $f = 0$ et que (x_n) converge vers l, alors $(x_{n+1}) = (f_n(x_n))$ converge vers $f(l)$. Comme (x_{n+1}) converge aussi vers l, on doit avoir $f(l) = l$ d'où $l = 0$.

c) Soit $u_n = nx_n > 0$. Remarquer que, pour n assez grand, $x_n < 1$ (puisque (x_n) converge vers 0) et donc $u_n < n$. On va montrer que (u_n) converge vers 1. On a :

$$u_{n+1} = (n + 1)\, x_{n+1} = \frac{(n + 1)x_n}{1 + nx_n^2} = \frac{(n + 1)u_n}{n + u_n^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)\, \frac{n - u_n}{n + u_n^2}$$

Pour n assez grand, $\left|\dfrac{n-u_n}{n+u_n^2}\right| < 1$, donc $|u_n - 1|$ décroît strictement donc converge. Cela impose que u_n est borné. On a alors $(u_n - 1)\dfrac{n-u_n}{n+u_n^2} \sim u_n - 1$, donc $u_{n+1} - 1$ est de même signe que $u_n - 1$ pour n assez grand, donc $(u_n - 1)$ converge, donc (u_n) converge. (u_n) ne peut converger vers 0 car sinon on aurait :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{n+1}{n+u_n^2} - 1\right) u_n = \frac{1-u_n^2}{n+u_n^2} u_n > 0 \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

donc la suite (u_n) serait positive strictement croissante, ce qui est incompatible avec une limite nulle. (u_n) convergeant vers une limite non nulle, il existe $a > 0$ et $b > a$ tels que, pour n assez grand :

$$0 < a \leq u_n \leq b$$

Pour $n \geq b$, on a $u_n \leq n$ et :

$$|u_{n+1} - 1| = |u_n - 1| \frac{n-u_n}{n+u_n^2} \leq |u_n - 1| \frac{n-a}{n+a^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \ln|u_{n+1} - 1| \leq \ln|u_n - 1| + \ln\left(\frac{n-a}{n+a^2}\right)$$

donc $\quad \ln|u_n - 1| \leq \ln|u_b - 1| + \displaystyle\sum_{k=b}^{n-1} \ln\left(\frac{k-a}{k+a^2}\right)$

or $\ln\left(\dfrac{k-a}{k+a^2}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{a+a^2}{k+a^2}\right) \sim -\dfrac{a+a^2}{k}$ est le terme général d'une série à termes de signe constant et divergente donc la somme $\displaystyle\sum_{k=b}^{n-1} \ln\left(\frac{k-a}{k+a^2}\right)$ est la somme partielle d'une série divergente vers $-\infty$, donc $\ln|u_n - 1|$ tend vers $-\infty$, donc u_n tend vers 1. Par conséquent, $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Sol.1-8) a) En 0, prolonger la fonction $x \to \dfrac{\sin(nx)}{nx + x^2}$ par continuité, et en $+\infty$, remarquer que c'est un $O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

b) Appliquer le théorème de convergence dominée avec, comme fonction dominante, $\varphi(x) = 1$ sur $[0, 1]$ et $\dfrac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$. On trouve alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

On peut aussi raisonner directement comme suit :

$$I_n = n \int_0^{\infty} \frac{\sin(y)}{n^2 y + y^2}\,dy \qquad \text{en effectuant le changement de vraiables } nx = y$$

Or :

$$\left| n \int_1^{\infty} \frac{\sin(y)}{n^2 y + y^2}\,dy \right| \leq n \int_1^{\infty} \frac{1}{n^2 y + y^2}\,dy = \frac{1}{n} \int_1^{\infty} \frac{1}{y} - \frac{1}{y+n^2}\,dy = \frac{1}{n}\left[\ln\left(\frac{y}{y+n^2}\right)\right]_1^{\infty}$$

$$\leq \frac{\ln(1+n^2)}{n} \qquad \text{qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini,}$$

et $\quad \left| n \int_0^1 \dfrac{\sin(y)}{n^2 y + y^2} \, dy \right| \leq n \int_0^1 \dfrac{1}{n^2 + y} \, dy \leq \dfrac{1}{n}$ également de limite nulle.

Sol.1-9) On donne trois méthodes pour résoudre a)-b)-c). La méthode c) suppose cependant que f est C^1 sur [0, 1]. Néanmoins, elle présente aussi son intérêt.

Méthode 1 :

On effectue le changement de variable $u = t^n$, et on applique le théorème de convergence dominée.

a) $n \int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = \int_0^1 f(u^{1/n})\, u^{1/n} \, du$. Pour tout $u \in \,]0, 1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(u^{1/n})\, u^{1/n} = f(1)$, et l'hypothèse de domination est vérifiée en majorant par $\| f \|_\infty$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(u^{1/n})\, u^{1/n} \, du = f(1)$$

b)-c) $n^{p+1} \int_0^1 f(t)\, t^n\, (1 - t)^p \, dt = \int_0^1 f(u^{1/n})\, u^{1/n}\, n^p\, (1 - u^{1/n})^p \, du$ qui converge vers $\int_0^1 f(1)\, (-\ln(u))^p \, du = f(1)$ avec l'hypothèse de domination vérifiée par la fonction intégrable $(-1)^p \ln(u)^p \| f \|_\infty$. En effet, en utilisant l'inégalité $|1 - \exp(-t)| \leq t$, on a :

$$|n(1 - u^{1/n})| = \left| n(1 - \exp(\frac{1}{n} \ln(u))) \right| \leq |\ln(u)|$$

On calcule $\int_0^1 (-1n(u))^p \, du = p!$ par intégration par parties. Donc la limite cherchée vaut $p!\, f(1)$.

En particulier, pour $p = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 f(t)\, t^n\, (1 - t) \, dt = f(1)$.

Méthode 2 :

On effectue le changement de variable $t = 1 - \dfrac{u}{n}$, et on applique le théorème de convergence dominée.

a) $n \int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = \int_0^n f(1 - \frac{u}{n})(1 - \frac{u}{n})^n \, du = \int_0^\infty g_n(u) \, du$

avec $g_n(u) = \begin{cases} f(1 - \frac{u}{n})(1 - \frac{u}{n})^n \text{ si } u \in [0, n[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. La suite (g_n) converge simplement vers la fonction $u \to f(1)e^{-u}$. Par ailleurs, on a vu dans un exercice précédent que, pour tout u élément de $[0, n]$, $(1 - \frac{u}{n})^n \leq e^{-u}$. Donc les g_n sont dominées par la fonction $u \to \| f \|_\infty\, e^{-u}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$, et on peut appliquer le théorème de convergence dominée. On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = \int_0^\infty f(1)e^{-u} \, du = f(1)$$

b)-c) $n^{p+1} \int_0^1 f(t)\, t^n\, (1 - t)^p \, dt = \int_0^n f(1 - \frac{u}{n})(1 - \frac{u}{n})^n\, u^p \, du = \int_0^\infty g_n(u) \, du$

avec $g_n(u) = \begin{cases} f(1-\frac{u}{n})(1-\frac{u}{n})^n\, u^p \text{ si } u \in [0, n[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. La suite (g_n) converge simplement vers la fonction $u \to f(1)e^{-u}u^p$ et est dominée par $\| f \|_\infty\, e^{-u}\, u^p$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient, (en intégrant par parties la dernière intégrale) :

$$\lim_{n\to\infty} n^{p+1}\int_0^1 f(t)\, t^n\, (1-t)^p\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(1)e^{-u}u^p\, \mathrm{d}u = p!\, f(1)$$

<u>Méthode 3</u> :

On remplace $f(t)$ par $f(1) - \int_t^1 f'(u)\, \mathrm{d}u$. Cette méthode évite l'utilisation du théorème de convergence dominée. Mais on aura besoin des valeurs des intégrales suivantes, (pour n et p strictement positif), définissant une fonction appelée **Beta** :

$$\mathrm{B}(n, p) = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t = \frac{(n-1)!\,(p-1)!}{(n+p-1)!}$$

On peut vérifier par récurrence sur p que les égalités sont vraies pour tout $n > 0$, une intégration par parties donnant la relation, pour $p \geq 2$, $\mathrm{B}(n, p) = \frac{p-1}{n}\,\mathrm{B}(n+1, p-1)$.

a) $$n\int_0^1 f(t)\, t^n\, \mathrm{d}t = n\int_0^1 f(1)\, t^n\, \mathrm{d}t - n\int_0^1\int_t^1 f'(u)\, t^n\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{n}{n+1} f(1) - n\int_0^1\int_t^1 f'(u)\, t^n\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t$$

Majorons l'intégrale double :

$$\left| n\int_0^1\int_t^1 f'(u)\, t^n\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t \right| \leq \| f' \|_\infty\, n\int_0^1\int_t^1 t^n\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t$$
$$\leq \| f' \|_\infty\, n\int_0^1 t^n(1-t)\, \mathrm{d}t$$
$$\leq \| f' \|_\infty\, n\, \mathrm{B}(2, n+1)$$
$$\leq \| f' \|_\infty\, n\, \frac{n!}{(n+2)!}$$
$$\leq \| f' \|_\infty\, \frac{n}{(n+1)(n+2)} = \mathrm{o}(1)$$

Donc $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)\, t^n\, \mathrm{d}t = 1$.

b)-c) $$n^{p+1}\int_0^1 f(t)\, t^n\, (1-t)^p\, \mathrm{d}t = n^{p+1}\int_0^1 f(1)\, t^n\, (1-t)^p\, \mathrm{d}t - n^{p+1}\int_0^1\int_t^1 f'(u)\, t^n\, (1-t)^p\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t$$
$$= n^{p+1} f(1)\, \mathrm{B}(p+1, n+1) - n^{p+1}\int_0^1\int_t^1 f'(u)\, t^n\, (1-t)^p\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{n^{p+1}\, p!}{(n+1)(n+2)...(n+p+1)} f(1) - n^{p+1}\int_0^1\int_t^1 f'(u)\, t^n\, (1-t)^p\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t$$

On a $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+1}\, p!}{(n+1)(n+2)...(n+p+1)} f(1) = p!\, f(1)$. Majorons l'intégrale double :

$$\left| n^{p+1} \int_0^1 \int_t^1 f'(u)\, t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \right| \leq \| f' \|_\infty\; n^{p+1} \int_0^1 \int_t^1 t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \| f' \|_\infty\; n^{p+1} \int_0^1 t^n (1-t)^{p+1} \,\mathrm{d}t$$

$$\leq \| f' \|_\infty\; n^{p+1}\, \mathrm{B}(p+2, n+1)$$

$$\leq \| f' \|_\infty\; \frac{(p+1)!\, n^{p+1}}{(n+1)(n+2)...(n+p+2)} = \mathrm{o}(1)$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p+1} \int_0^1 f(t)\, t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t = p!\, f(1)$.

d) On applique le a) avec $f(t) = e^{-t}$. L'équivalent est $\dfrac{f(1)}{n} = \dfrac{1}{ne}$.

e) Méthode 1 :

En appliquant le a) avec $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} n\mathrm{I}_n = f(1) = \dfrac{1}{2}$.

Puis :

$$\mathrm{I}_n - \frac{1}{2n} = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t^{n-1} \left(\frac{t}{1+t} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-1} \frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On applique le b) au rang $n-1$ avec la même fonction f, ce qui donne :

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-1} \frac{1-t}{1+t}\,\mathrm{d}t \sim -\frac{1}{2} \frac{f(1)}{(n-1)^2} \sim -\frac{1}{4n^2}$$

donc $\mathrm{I}_n - \dfrac{1}{2n} = -\dfrac{1}{4n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$, d'où le résultat demandé.

Méthode 2 :

On peut aussi intégrer par parties deux fois de suite, de façon à augmenter la puissance de t :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{(1+t)(n+1)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2(n+1)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} + \left[\frac{t^{n+2}}{(1+t)^2(n+1)(n+2)}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(1+t)^3(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \int_0^1 \frac{2t^{n+2}}{(1+t)^3(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}t$$

On vérifiera que $\dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{4(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$. Quant au reste intégral, il est majoré par $2 \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$.

Méthode 3 :

Cette méthode permet de donner un développement de I_n à un ordre quelconque. On considére $f : t \to \dfrac{1}{1+t}$ et la fonction F de classe C^∞ telle que $F(1) = F'(1) = ... = F^{(n)}(1) = 0$ et $F^{(n+1)}(t) = f(t) = \dfrac{1}{1+t}$. Cette fonction existe bien : on prend la primitive de $\dfrac{1}{1+t}$ qui s'annule en 1, puis la primitive de cette primitive qui s'annule en 1, etc. en remontant n fois. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n de F en 1 donne :

$$F(x) = F(1) + (x-1)F'(1) + ... + \frac{(x-1)^n}{n!} F^{(n)}(1) + \int_1^x F^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$$

$$= \int_1^x F^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt \qquad \text{puisque } F^{(k)}(1) = 0 \text{ pour } k \text{ variant de 1 à } n$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$F(0) = \int_1^0 F^{(n+1)}(t) \frac{(-t)^n}{n!} \, dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt = \int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = (-1)^{n+1}\, n!\, F(0)$

La formule de Taylor à un ordre $n + p$ quelconque de la même fonction F donnera :

$$F(x) = F(1) + (x-1)F'(1) + ... + \frac{(x-1)^{n+p}}{(n+p)!} F^{(n+p)}(1) + \int_1^x F^{(n+p+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+p}}{(n+p)!} \, dt$$

$$= \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(1) + ... + \frac{(x-1)^{n+p}}{(n+p)!} F^{(n+p)}(1) + \int_1^x F^{(n+p+1)}(t) \frac{(x-t)^{n+p}}{(n+p)!} \, dt$$

et pour $x = 0$:

$$F(0) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(1) + ... + \frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!} F^{(n+p)}(1) + \int_1^0 F^{(n+p+1)}(t) \frac{(-t)^{n+p}}{(n+p)!} \, dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} f(1) + ... + \frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!} f^{(p-1)}(1) + (-1)^{n+p+1} \int_0^1 f^{(p)}(t) \frac{t^{n+p}}{(n+p)!} \, dt$$

donc $\displaystyle(-1)^{n+1} F(0) = \frac{1}{(n+1)!} f(1) + ... + \frac{(-1)^{p-1}}{(n+p)!} f^{(p-1)}(1) + (-1)^p \int_0^1 f^{(p)}(t) \frac{t^{n+p}}{(n+p)!} \, dt$

Il en résulte que :

$$\int_0^1 f(t)\, t^n \, dt = \frac{f(1)}{n+1} + ... + \frac{(-1)^{p-1} f^{(p-1)}(1)}{(n+1)(n+2)...(n+p)} + \frac{(-1)^p}{(n+1)(n+2)...(n+p)} \int_0^1 f^{(p)}(t)\, t^{n+p} \, dt$$

formule qu'on pourrait aussi montrer par récurrence sur p.

Pour $p = 2$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $f'(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $f''(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$, on retrouve la formule de la méthode 2 :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{4(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^3} \, dt$$

mais on comprend que son itération à un ordre p quelconque ne provient que d'une formule de Taylor bien choisie.

Sol.1-10) a) $f_n(t) = n - 3 - n^3 x^n (1 - x)$

b) $f_n(t) = \sqrt{n} - n^3 x^n (1 - x)$

c) On prend des fonctions positives ou nulles, dont le maximum vaut $\frac{1}{n}$, mais qui s'étalent de façon à englober une aire de plus en plus grande. Par exemple $f_n(x) = \frac{n^3}{n^4 + x^2}$ de maximum $\frac{1}{n}$ mais dont l'intégrale vaut $n\pi$, ou encore une fonction en escalier, nulle en dehors de $[-n^2, n^2]$, valant $\frac{1}{n}$ sur $[-n^2, n^2]$.

d) $f_n = \frac{1}{n}$

e) $f_n = \frac{1}{1 + |x|} \mathbf{1}_{[-n,n]}$ où $\mathbf{1}_{[-n,n]}(x) = 1$ si $x \in [-n, n]$ et 0 sinon.

Sol.1-11) a) $\| f_n \|_\infty = f(0) = \frac{1}{n}$ donc il y a convergence uniforme vers la fonction nulle.

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \frac{n}{2} \text{ de limite infinie}$$

Cela signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx \neq \int_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. La convergence uniforme ne suffit pour intervertir les symboles $\lim\limits_{n\to\infty}$ et $\int_0^\infty$ car on n'intègre pas sur un segment.

b) Pour $x \geq n^2$, on a $0 = f_n(x) \leq \varphi(x)$.

Pour $0 \leq x \leq n^2$, on a $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{x}{n^3}$. Etudions la fonction :

$$x \in [0, n^2] \to \varphi(x) - f_n(x) = \frac{2}{3^{3/2}\sqrt{x}} - \frac{1}{n} + \frac{x}{n^3}$$

Sa dérivée vaut $-\frac{1}{(3x)^{3/2}} + \frac{1}{n^3}$ et s'annule en $x = \frac{n^2}{3}$. $\varphi - f_n$ admet un minimum en ce point, et ce minimum vaut $\frac{2}{3n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n} = 0$, donc $\varphi \geq f_n$.

φ n'est pas intégrable et aucun φ majorant les f_n ne peut l'être car sinon on pourrait appliquer le théorème de convergence dominée dans le a), et on aurait dû avoir l'égalité entre $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx$ et $\int_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

Sol.1-12) a) ne devrait pas poser de problème. La fonction à intégrer étant positive, prendre un équivalent en 0 et en $+\infty$ et vérifier l'intégrabilité de chaque équivalent respectivement sur [0, 1] et sur $[1, +\infty[$.

b) On effectue le changement de variable $t = u^n$ donc $dt = nu^{n-1}\,du$ donc :

$$I_n = n \int_0^\infty \frac{u^{n-2}}{1 + u^n}\,du$$

or $\dfrac{u^{n-2}}{1+u^n} \to 0$ si $u < 1$ en étant dominé par 1 pour $n \geq 2$

$\dfrac{u^{n-2}}{1+u^n} \to \dfrac{1}{2}$ si $u = 1$

$\dfrac{u^{n-2}}{1+u^n} \to \dfrac{1}{u^2}$ si $u > 1$ en étant dominé par $\dfrac{1}{u^2}$

donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée avec comme fonction dominante $\varphi(u) = \begin{cases} 0 \text{ sur } [0, 1[\\ \dfrac{1}{u^2} \text{ sur } [1, +\infty[\end{cases}$, qui est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, et on en déduit :

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{n-2}}{1+u^n}\, du \to \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2}\, du = 1$$

Donc on a bien $I_n \sim n$ quand n tend vers l'infini.

Sol.1-13) a)-b) Les deux questions sont délicates si on tente d'opérer directement sur la suite de fonctions $(n, u) \to \dfrac{u \sin(u)}{n^2 + u^2}$. Mais si on intègre par parties, on obtient $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{n^2 - u^2}{(n^2+u^2)^2} \cos(u)\, du$ et le théorème de convergence dominée s'applique, avec comme fonction dominante $\dfrac{1}{1+u^2}$. La limite est nulle.

Sol.1-14) Une difficulté repose sur le fait que l'une des bornes de l'intégrale est variable. On remédie à ce problème en effectuant le changement de variable $t = nu$. L'intégrale devient :

$$\int_1^{\infty} \frac{n^2 \ln(1+u)}{1+n^2u^2}\, du$$

On applique le théorème de convergence dominée, la fonction dominante étant $\dfrac{\ln(1+u)}{u^2}$. Celle-ci est bien intégrable car c'est un $O(\dfrac{1}{u^{3/2}})$ quand u tend vers l'infini.

La limite cherchée est donc :

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+u)}{u^2}\, du = \ln(2) + \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+u)u}\, du \qquad \text{(intégrer par parties)}$$

$$= \ln(2) + \int_1^{\infty} \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\, du = 2\ln(2)$$

Sol.1-15) a) ne devrait pas poser de problème.

b) $I_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\arctan(t)}{t^2 + \frac{t}{n}}\, dt + \int_1^{\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2 + \frac{t}{n}}\, dt$

Le théorème de convergence dominée (avec comme fonction dominante $\frac{\arctan(t)}{t^2}$) donne comme limite du deuxième terme la quantité finie $\int_1^{\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. En ce qui concerne le premier terme, on a :

$$t - \frac{t^3}{3} \leq \arctan(t) \leq t \text{ sur } [0, 1]$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{t - \frac{t^3}{3}}{t^2 + \frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^2 + \frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{t}{t^2 + \frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{1 - \frac{t^2}{3}}{t + \frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^2 + \frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1}{t + \frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^1 -\frac{t}{3} + \frac{1}{3n} + \frac{1 - \frac{1}{3n^2}}{t + \frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^2 + \frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1}{t + \frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6} + \frac{1}{3n} + (1 - \frac{1}{3n^2}) \ln(n + 1)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^2 + \frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t \leq \ln(n + 1)$$

donc l'équivalent cherché est $\ln(n)$

Sol.1-16) a) $\int_0^n \frac{1 - (1 - t/n)^n}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(\frac{t}{n})\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x}\,\mathrm{d}x - \ln(n) + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ en posant } x = 1 - \frac{t}{n}$$

$$= \int_0^1 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\,\mathrm{d}x - \ln(n) + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

donc, en passant à la limite : $0 = \gamma + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

b) $\int_n^{\infty} e^{-t} \ln(\frac{t}{n})\,\mathrm{d}t = \int_n^{\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t - e^{-n} \ln(n)$ et chaque terme est de limite nulle, l'intégrale étant le reste de l'intégrale convergente $\int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Dans $\displaystyle\int_0^n e^{-t}\ln(\frac{t}{n})\,dt$, on pose $u = \ln(\frac{t}{n})$ et $v' = e^{-t}$ en prenant garde de prendre comme primitive $v = 1 - e^{-t}$. La limite de uv en $t = 0$ étant nulle, on obtient $\displaystyle\int_0^n e^{-t}\ln(\frac{t}{n})\,dt = -\int_0^n \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$. Donc :

$$\int_0^n \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\,dt + \int_0^n e^{-t}\ln(\frac{t}{n})\,dt = \int_0^n \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\,dt - \int_0^n \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt$$

$$= \int_0^n \frac{e^{-t}-(1-t/n)^n}{t}\,dt$$

On conclut en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite $\displaystyle\int_0^\infty f_n(t)\,dt$, $n \geq 1$, avec

$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}-(1-t/n)^n}{t} \text{ si } t \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. La suite converge simplement vers 0 sur $]0, +\infty[$.

Remarquer que :

$$e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n = e^{-t} - \exp(n\ln(1-\frac{t}{n})) \geq 0 \text{ car } n\ln(1-\frac{t}{n}) \leq -t$$

Donc $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, t \in [1, n]$, $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \dfrac{e^{-t}}{t}$.

La même majoration est trivialement vérifiée sur $]n, +\infty[$.

Sur [0,1], on peut majorer $e^{-t} - (1-\frac{t}{n})^n$ par $e^{-t} - 1 + t$. Il suffit pour cela de montrer que :

$$n\ln(1-\frac{t}{n}) \geq \ln(1-t)$$

ce qui se fait par une simple étude de la fonction $n\ln(1-\frac{t}{n}) - \ln(1-t)$. Sa dérivée vaut $-\dfrac{n}{n-t} + \dfrac{1}{1-t}$ et est du signe de $-n + nt + n - t = (n-1)t \geq 0$ donc la fonction est croissante. Or elle s'annule en $t = 0$. Par conséquent, $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, t \in [0, 1[$, $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \dfrac{e^{-t}-1+t}{t}$.

On prend donc comme fonction dominante φ la fonction $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}-1+t}{t} \text{ si } t < 1 \\ \dfrac{e^{-t}}{t} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$. Cette fonction est bien intégrable, aussi bien au voisinage de 0 (elle s'y prolonge par continuité) qu'en l'infini (où elle est un $O(\frac{1}{t^2})$).

On a donc bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{e^{-t}-(1-t/n)^n}{t}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,dt = \int_0^\infty \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = 0$$

5- Solutions sur les séries de fonctions

Sol.2-1) a) La série converge normalement puisque $\| \dfrac{\cos(n\theta)}{n2^n} \|_\infty = \dfrac{1}{n2^n}$, terme général d'une série convergente. Les fonctions $\theta \to \dfrac{\cos(n\theta)}{n2^n}$ étant continues pour tout n, il en est de même de f.

La série des dérivées $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{2^n}$ converge aussi normalement car $\| \dfrac{\sin(n\theta)}{2^n} \|_\infty = \dfrac{1}{2^n}$, terme général d'une série convergente. Chaque fonction $\theta \to -\dfrac{\sin(n\theta)}{2^n}$ étant continue, f est C^1 et se dérive terme à terme.

b) Donc $f'(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{2^n} = -\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{in\theta}}{2^n} = -\operatorname{Im} \dfrac{2}{2 - e^{i\theta}} = -\dfrac{2\sin(\theta)}{5 - 4\cos(\theta)}$. f est une primitive de cette fonction, donc est de la forme $-\dfrac{1}{2}\ln(5 - 4\cos(\theta)) + \text{Cte}$.

Par ailleurs, $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n} = \ln(2)$ (utiliser la formule $\forall\, t \in\,]-1, 1[,\ -\ln(1 - t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{n}$ prouvée dans le présent chapitre, pour $t = \dfrac{1}{2}$). Donc :

$$f(\theta) = -\frac{1}{2}\ln(5 - 4\cos(\theta)) + \ln(2)$$

REMARQUE : dans le chapitre L3/HOLOMRPH.PDF, on définit le logarithme $\operatorname{Log}(z)$ d'un nombre complexe z donné sous sa forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in\,]-\pi, \pi[$ par $\operatorname{Log}(z) = \ln(r) + i\theta$ (on exclut le cas où z est un réel négatif ou nul). Si on admet que le développement $-\ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, prouvé dans le cours pour $x \in\,]-1, 1[$, s'étend aux nombres complexes z de module strictement inférieur à 1, alors on retrouve le résultat précédent par le calcul suivant :

$$f(\theta) = \operatorname{Re}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n2^n}\Big) = \operatorname{Re}\Big(-\operatorname{Log}\big(1 - \frac{e^{i\theta}}{2}\big)\Big) = \operatorname{Re}\Big(-\operatorname{Log}\big(\frac{2 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2}\big)\Big)$$

$$= \operatorname{Re}\Big(-\operatorname{Log}\big(\frac{\sqrt{(2 - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}}{2}\, e^{i\varphi}\big)\Big)$$

où $\varphi \in\,]-\pi, \pi[$ est l'argument de $2 - \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

$$= \operatorname{Re}\Big(-\ln\big(\frac{\sqrt{(2 - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}}{2}\big) - i\varphi\Big)$$

$$= -\ln\big(\sqrt{(2 - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)}\big) + \ln(2)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(5 - 4\cos(\theta)) + \ln(2)$$

Sol.2-2) a) f est définie sur $\mathbb{R}$ car, pour tout x, $\left|\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2n^2}$, terme général d'une série convergente.

b) La même majoration prouve que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout n, le terme général est une fonction continue de x, f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Pour le montrer, on se contente du cas $x > 0$ sachant que f est impaire, et on montre que f est C^1 sur tout intervalle $]\alpha, +\infty[$, $\alpha > 0$. La série des dérivées est $\sum \dfrac{1}{n(1 + n^2x^2)}$ et elle converge normalement sur $]\alpha, +\infty[$ car $0 \leq \dfrac{1}{n(1 + n^2x^2)} \leq \dfrac{1}{n(1 + n^2\alpha^2)}$, terme général d'une série convergente. Donc, pour x non nul :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + n^2x^2)}$$

d) La limite de f' en 0 est infinie. Plus précisément, par une comparaison série-intégrale, on a :

$$\forall\, n,\ \int_n^{n+1} \frac{1}{t(1 + t^2x^2)}\, dt \leq \frac{1}{n(1 + n^2x^2)} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t(1 + t^2x^2)}\, dt$$

donc $$\int_1^{\infty} \frac{1}{t(1 + t^2x^2)}\, dt \leq f'(x) \leq \frac{1}{1 + x^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{t(1 + t^2x^2)}\, dt$$

or $$\int_1^{\infty} \frac{1}{t(1 + t^2x^2)}\, dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t} - \frac{tx^2}{1 + t^2x^2}\, dt = \Big[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1 + t^2x^2)\Big]_1^{\infty} =$$

$$= \Big[\ln\Big(\frac{t}{\sqrt{1 + t^2x^2}}\Big)\Big]_1^{\infty} = -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) \sim -\ln(x) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0.$$

Les deux membres de l'encadrement de $f'(x)$ sont équivalents à $-\ln(x)$. Il en est donc de même de $f'(x)$.

Sol.2-3) $\displaystyle\int_0^1 x^x\, dx = \int_0^1 e^{x\ln(x)}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln(x))^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln(x))^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ en intégrant n fois par parties l'intégrale.

On peut permuter série et intégrale car $\displaystyle\sum \int_0^1 \left|\frac{(x\ln(x))^n}{n!}\right| dx = \sum \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ est une série convergente.

Le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \int_0^1 e^{-x\ln(x)}\, dx$ se traite de la même façon.

Sol.2-4) ❑ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t\, e^{-nt}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t\, e^{-nt}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ en intégrant par parties.

On peut permuter série et intégrale car $\displaystyle\sum \int_0^{\infty} |t\, e^{-nt}|\, dt = \sum \int_0^{\infty} t\, e^{-nt}\, dt = \sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Posons $\displaystyle S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle P = \sum_{n \text{ pair}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{S}{4}$, $\displaystyle I = \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

On a S = P + I = $\frac{S}{4}$ + I. Par ailleurs :

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t+1}\,dt = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty t\,(-1)^{n-1}\,e^{-nt}\,dt = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^\infty t\,e^{-nt}\,dt$$

car, comme précédemment $\sum \int_0^\infty \left| t\,(-1)^{n-1}\,e^{-nt}\right|\,dt$ converge. Donc :

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t+1}\,dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = -\,\mathrm{P} + \mathrm{I}.$$

Mais I = $\frac{3S}{4}$ et P = $\frac{S}{4}$ donc I – P = $\frac{S}{2}$. Ainsi, $\int_0^\infty \frac{t}{e^t+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt$.

❑ On peut aussi écrire que :

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{t}{(e^{t/2}-1)(e^{t/2}+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t}{e^{t/2}-1} - \frac{t}{e^{t/2}+1}\,dt$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{u}{e^u-1}\,du - 2\int_0^\infty \frac{u}{e^u+1}\,du \qquad \text{avec } u = \frac{t}{2}$$

donc $2\int_0^\infty \frac{u}{e^u+1}\,du = 2\int_0^\infty \frac{u}{e^u-1}\,du - \int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt.$

Sol.2-5) a) g est définie sur $\mathbb{R}$ et continue. On montrera qu'il y a convergence normale sur tout intervalle $[-a, a]$, $a > 0$.

b) Par comparaison série-intégrale avec la fonction $f(t) = \frac{x}{x^2+t^2}$, on a :

$$\int_1^\infty f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_0^\infty f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \qquad \left[\arctan\frac{t}{x}\right]_1^\infty \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{x^2+n^2} \leq \left[\arctan\frac{t}{x}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{x^2+n^2} \leq \frac{\pi}{2}$$

La limite quand x tend vers $+\infty$ est donc $\frac{\pi}{2}$.

c) $\left(\frac{t}{t^2+n^2}\right)' = \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}$ donc $\int_0^x \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\,dt = \frac{x}{x^2+n^2}$, donc, pour tout n, $\int_0^\infty \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\,dt = 0$, donc

$\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\,dt = 0$ alors que :

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On peut permuter intégrale et série dans le calcul ci-dessus car :

$\int_0^x \left|\frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\right| dt \le \int_0^x \frac{1}{t^2+n^2}\,dt = \frac{1}{n}\arctan(\frac{x}{n})$ qui est le terme général d'une série convergente.

Cette question montre que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\,dt \neq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\,dt$ et donne un exemple où l'on ne peut pas permuter $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $\int_0^{\infty}$ alors même qu'on a montré juste au-dessus que, pour tout $x > 0$, on peut permuter $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $\int_0^x$. La différence provient du fait que, pour tout $x > 0$, $\sum \int_0^x \left|\frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\right| dt$ converge, alors que $\sum \int_0^{\infty} \left|\frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\right| dt$ diverge. On pourra vérifier en effet que $\int_0^{\infty} \left|\frac{n^2-t^2}{(t^2+n^2)^2}\right| dt = \frac{1}{n}$.

d) On développe $\frac{1}{e^t-1}$ en série : $\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{e^t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$. On a donc :

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(tx)\, e^{-nt}\,dt$$

Pour tout n :

$$\int_0^{\infty} \sin(tx)\, e^{-nt}\,dt = \mathrm{Im}(\int_0^{\infty} e^{itx-nt}\,dt) = \mathrm{Im}\,(\frac{1}{n-ix}) = \frac{x}{x^2+n^2}$$

Pour montrer que $g = \varphi$, il suffit de justifier que $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(tx)\, e^{-nt}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sin(tx)\, e^{-nt}\,dt$. Il suffit pour cela de montrer que $\sum \int_0^{\infty} |\sin(tx)|\, e^{-nt}\,dt$ converge. C'est bien le cas car :

$\int_0^{\infty} |\sin(tx)|\, e^{-nt}\,dt \le \int_0^{\infty} |x|\, t\, e^{-nt}\,dt = \frac{|x|}{n^2}$ terme général d'une série convergente.

REMARQUE : on peut prouver que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{2\mathrm{th}(\pi x)} - \frac{1}{2x}$ dont la limite en l'infini vaut bien $\frac{\pi}{2}$.

Sol.2-6) a) Pour $x > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \frac{1}{x-1}$ d'où le résultat.

b) Pour $x > 0$, $0 \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ et $\sum \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$ est une série télescopique qui converge. Donc $\sum \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt$ converge.

c) Il s'agit de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt = \gamma$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe P tel que, $\forall\ p \geq \mathrm{P}$, $\left|1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{p-1} - \ln(p) - \gamma\right| < \varepsilon$. Quitte à augmenter P, on peut supposer $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{P}}} < \varepsilon$. Pour un tel p :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt &= 1 + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{(p-1)^x} - \int_1^p \frac{1}{t^x}\,dt \\ &= 1 + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{(p-1)^x} + \frac{p^{1-x} - 1}{x-1} \\ &\to 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1} - \ln(p) \qquad \text{quand } x \text{ tend vers } 1\end{aligned}$$

Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que, $\forall\ x \in\ ]1-\alpha, 1+\alpha[$:

$$\left|\sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1} - \ln(p)\right)\right| < \varepsilon$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt - \gamma\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1} - \ln(p)\right)\right| \\ &\qquad + \left|1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1} - \ln(p) - \gamma\right| \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

Quitte à diminuer la valeur de α, on peut supposer $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

Quant au reste $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt$, d'après la majoration télescopique du b), on peut le majorer par $\dfrac{1}{p^x}$.

Pour $x > \dfrac{1}{2}$, on aura alors : $0 \leq \displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{p^x} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{P}}} < \varepsilon$. Pour $x \in\ ]1-\alpha, 1+\alpha[$, on aura bien $x > \dfrac{1}{2}$ puisqu'on a pris $\alpha < \dfrac{1}{2}$, et donc :

$$\left|\sum_{n=p}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt + \sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\,dt - \gamma\right| < 3\varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in\,]1 - \alpha, 1 + \alpha[,\ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\, dt - \gamma \right| < 3\varepsilon$$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x}\, dt = \gamma$.

Sol.2-7) a) On vérifiera que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1 + \frac{1}{n})^{-n-1/2}\, e = \exp(1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}))$$

$$= \exp(-\frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \quad \text{en effectuant un développement limité du ln}$$

$$= 1 - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\Rightarrow \qquad \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) \sim -\frac{1}{12n^2}$$

Comme $\sum \frac{1}{12n^2}$ est une série à termes positifs convergente, il en est de même de $\sum \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$. Comme la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k})$ est égale à $\ln(u_n) - \ln(u_1)$ (reconnaître une somme télescopique), il en résulte que la suite $(\ln(u_n))$ converge et donc aussi la suite (u_n). On note L sa limite.

b) $\prod\limits_{n=1}^{N} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = (2N + 1) \prod\limits_{n=1}^{N} \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} = (2N + 1)\, \frac{(2N)!^2}{4^{2N}\, N!^4}$

$$\sim 2N\, \frac{L^2\, (2N)^{4N}\, e^{-4N}\, 2N}{4^{2N}\, L^4\, N^{4N}\, e^{-4N}\, N^2} = \frac{4}{L^2}$$

Donc, en faisant tendre N vers l'infini, $\frac{2}{\pi} = \frac{4}{L^2}$, donc $L = \sqrt{2\pi}$.

b) $2^{2n+1} = 1 + (2n+1) + \frac{(2n+1)2n}{2} + \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} + \ldots + \frac{(2n+1)2n\ldots(2n-k+2)}{k!} + \ldots$

$$+ \frac{(2n+1)\ldots(n+2)}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (2n+1)2n\ldots(n+1)(1+x)^n(1-x)^n\, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + (2n+1) \binom{2n}{n} \int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$ est exactement la moitié de $\sum\limits_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$, en utilisant le fait que $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$. Donc :

$$2^{2n+1} = 2^{2n} + \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \binom{2n}{n} \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n\, dt \text{ en posant } t = x\sqrt{n}$$

$\Leftrightarrow \qquad 2^{2n} = \dfrac{2n+1}{\sqrt{n}} \dbinom{2n}{n} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n \, dt$

Or $\qquad \dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!^2} \sim \dfrac{L\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}\sqrt{2n}}{L^2\, n^{2n}\, e^{-2n}\, n} = \dfrac{2^{2n}\sqrt{2}}{L\sqrt{n}}$, donc :

$$2^{2n} \sim 2\sqrt{2}\,\frac{2^{2n}}{L}\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n \, dt$$

$\Rightarrow \qquad 1 \sim \dfrac{2\sqrt{2}}{L}\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n \, dt \sim \dfrac{2\sqrt{2}}{L}\int_0^{\infty} \exp(-t^2)\, dt$

en appliquant le théorème de convergence dominée sur la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(t) = \begin{cases} (1 - \frac{t^2}{n})^n \text{ si } 0 \le t \le \sqrt{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, de limite simple $\exp(-t^2)$, et dominée par la fonction intégrable $\exp(-t^2)$.

$\Rightarrow \qquad L = \sqrt{2\pi}$

Sol.2-8) a) En remplaçant n par $2m + 1$ dans l'indice du produit et dans la puissance de 2, on obtient :

$$\sin(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{x+k\pi}{n}) = \sin(x)\, 2^{2m}\prod_{k=1}^{2m}\sin(\frac{x+k\pi}{n})$$

$$= \sin(\frac{x}{n})\, 2^{2m}\prod_{k=1}^{m}\sin(\frac{x+k\pi}{n})\prod_{k=m+1}^{2m}\sin(\frac{x+k\pi}{n})$$

Mais, pour tout k vérifiant $m + 1 \le k \le 2m = n - 1$, on a :

$$\sin(\frac{x+k\pi}{n}) = -\sin(\frac{x+k\pi}{n} - \pi) = -\sin(\frac{x-(n-k)\pi}{n})$$

avec $1 \le n - k \le n - m - 1 = m$, donc en changeant $n - k$ en k dans le deuxième produit, on obtient :

$$\sin(x) = \sin(\frac{x}{n})\, 2^{2m}\prod_{k=1}^{m}\sin(\frac{x+k\pi}{n})\prod_{k=1}^{m}(-\sin(\frac{x-k\pi}{n}))$$

d'où la première égalité.

La deuxième égalité résulte de la formule suivante, avec $a = \dfrac{x}{n}$ et $b = \dfrac{k\pi}{n}$:

$$-\sin(a+b)\sin(a-b) = \frac{\cos(2a) - \cos(2b)}{2} = \sin^2(b) - \sin^2(a)$$

b) En prenant la limite quand x tend vers 0 du a), on obtient $n = 2^{2m}\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\sin^2(\frac{k\pi}{n})$. On divise ensuite membre à membre l'égalité du a) par cette égalité.

c) Pour tout m, $|u_k(m)| \le v_k$ donc la série $\displaystyle\sum_k u_k(m)$ converge absolument. Il en est de même de $\displaystyle\sum_k u_k$, car, en faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité $|u_k(m)| \le v_k$, on a aussi $|u_k| \le v_k$.

Les hypothèses $\forall\, k, \forall\, m, \left|u_k(m)\right| \leq v_k$ et $\sum v_k$ convergente, expriment le fait que la série de fonctions $m \to \sum\limits_k u_k(m)$ converge normalement (la variable m étant ici entière). On peut donc écrire :

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} u_k(m) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

Puisque, $\sum\limits_k u_k$ converge absolument et que, pour tout m, il en est de même de la série $\sum\limits_k u_k(m)$, les produits infinis $\prod\limits_k (1 + u_k)$ et $\prod\limits_k (1 + u_k(m))$ convergent (voir *Produits infinis* dans le chapitre L2/SERIES.PDF).

Soit p un indice tel que, $\forall\, k \geq p$, $v_k < 1$. En tant que produit fini, $\prod\limits_{k=1}^{p} (1 + u_k(m))$ converge vers $\prod\limits_{k=1}^{p} (1 + u_k)$ quand m tend vers l'infini, et il reste à montrer que $\prod\limits_{k=p+1}^{\infty} (1 + u_k(m))$ converge vers $\prod\limits_{k=p+1}^{\infty} (1 + u_k)$. Comme $\left|u_k\right| \leq v_k < 1$, tous les termes $1 + u_k$ sont strictement positifs, et il en est de même des $1 + u_k(m)$. On peut donc passer aux logarithmes, et montrer que :

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=p+1}^{\infty} \ln(1 + u_k(m)) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \ln(1 + u_k)$$

Il suffit de justifier qu'on peut permuter $\lim\limits_{m\to\infty}$ et $\sum\limits_{k=p+1}^{\infty}$, et pour cela, il suffit de montrer que la série de fonctions $m \to \sum\limits_k \ln(1 + u_k(m))$ converge normalement. C'est bien le cas puisque :

pour $u_k(m) \geq 0$, $0 \leq \ln(1 + u_k(m)) \leq u_k(m) \leq v_k$
pour $u_k(m) \leq 0$, $\left|\ln(1 + u_k(m))\right| = -\ln(1 + u_k(m)) \leq -\ln(1 - v_k)$

donc $\forall\, k, \forall\, m, \left|\ln(1 + u_k(m))\right| \leq v_k - \ln(1 - v_k)$, terme général d'une série convergente car équivalent à $2v_k$.

Dans l'exemple, $u_k(m) = -\dfrac{\sin^2(\frac{x}{n})}{\sin^2(\frac{k\pi}{n})}$ pour $k \leq m$ et 0 sinon. $u_k(m) \to u_k = -\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}$ quand m tend vers l'infini. En utilisant les inégalités $\left|\sin(x)\right| \leq \left|x\right|$ et $\sin(t) \geq \dfrac{2t}{\pi}$ pour $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, on a :

$$\left|u_k(m)\right| \leq \frac{x^2/n^2}{4k^2\pi^2/n^2} = \frac{x^2}{4k^2\pi^2} = v_k \text{ terme général d'une série convergente}$$

Les hypothèses du lemme sont donc bien vérifiées.

Sol.2-9) a) Ne devrait pas poser de difficulté.

b) La fonction $x^n(1 - x)$ a pour dérivée $nx^{n-1} - (n + 1)x^n$ qui s'annule pour $x = \dfrac{n}{n+1}$. Le maximum de la fonction f_n (positive) est obtenu pour cet x et vaut $a_n\,(1 + \dfrac{1}{n})^{-n}\,\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{a_n}{ne}$. Donc $\sum \| f_n \|_\infty$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

c) (a_n) étant décroissante positive, elle converge vers une limite $\lambda \geq 0$.
Si $\lambda > 0$, alors $f_n(x) \geq \lambda x^n(1 - x) \geq 0$, donc :

$$\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \geq \lambda \sum_{n=N}^{\infty} x^n(1 - x) = \lambda x^N \text{ si } x < 1$$

donc $\displaystyle \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \geq \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1[} \lambda x^N = \lambda$

donc $\displaystyle \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)$ ne peut tendre vers 0 quand N tend vers $+\infty$, et la convergence de $\sum f_n$ n'est pas uniforme.

On peut aussi dire que $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = 0$ alors que, pour $x \neq 1$, $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \geq \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1 - x) = \lambda$, donc il n'y a pas continuité en 1 et donc pas de convergence uniforme puisqu'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur un intervalle a une somme continue sur cet intervalle.
Par contre, si (a_n) converge vers 0, alors pour tout ε, il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow 0 \leq a_n < \varepsilon$ et, pour $n \geq N$ et tout x de $[0, 1]$:

$$0 \leq \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} x^k(1 - x) \leq \varepsilon x^n \leq \varepsilon$$

et il y a convergence uniforme.
La différence entre $\sum \dfrac{a_n}{n}$ convergente et $\displaystyle \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ illustre la différence entre convergence normale et convergence uniforme. La première implique la seconde (car si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge avec a_n positive décroissante de limite $\lambda \geq 0$, alors nécessairement $\lambda = 0$ car sinon, $\dfrac{a_n}{n} \geq \dfrac{\lambda}{n}$, terme général d'une série divergente), mais la réciproque est fausse (et il existe des suites (a_n) de limite nulle telle que $\sum \dfrac{a_n}{n}$ diverge, par exemple $a_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$).

Sol.2-10) a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, sur $[1 - \alpha, 1]$, $|f| \leq \varepsilon$. On a alors :

$$|I_n| \leq \int_0^{1-\alpha} |f(x)|\,(1 + x + ... + x^{n-1})\,dx + \int_{1-\alpha}^{1} |f(x)|\,(1 + x + ... + x^{n-1})\,dx$$

$$\leq \| f \|_\infty \int_0^{1-\alpha} \frac{1 - x^n}{1 - x}\,dx + \varepsilon \int_{1-\alpha}^{1} (1 + x + ... + x^{n-1})\,dx$$

$$\leq \| f \|_\infty \int_0^{1-\alpha} \frac{1}{1-x}\,dx + \varepsilon \int_0^1 (1 + x + ... + x^{n-1})\,dx$$

$$\leq \| f \|_\infty \left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\alpha} + \varepsilon\,(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})$$

$$\leq \text{Cte} + \varepsilon\,(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})$$

$$\leq 2\varepsilon\,(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \qquad \text{pour } n \text{ assez grand, puisque } 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \to +\infty$$

Comme $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$, l'inégalité précédente montre que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln(n)} = 0$ et donc $I_n = o(\ln(n))$.

b) En considérant $f(x) - f(1)$, le a) montre que :

$$\int_0^1 (f(x) - f(1))\,(1 + x + ... + x^{n-1})\,dx = o(\ln(n))$$

Or $\displaystyle\int_0^1 f(1)\,(1 + x + ... + x^{n-1})\,dx = f(1)\,(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) \sim f(1)\ln(n)$

donc la somme $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,(1 + x + ... + x^{n-1})\,dx$ est équivalente à $f(1)\ln(n)$

c) Prendre $f(x) = \dfrac{1-x}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$, fonction qui se prolonge par continuité en $x = 1$ avec la valeur $f(1) = \frac{2}{\pi}$. Donc, d'après b), $J_n \sim \frac{2}{\pi}\ln(n)$.

6- Solutions sur les intégrales dépendant d'un paramètre

Sol.3-1) a) Par récurrence, pour tout n, $\dfrac{\partial^n}{\partial x^n} \dfrac{e^{-t}}{1+xt} = (-1)^n\, n!\, \dfrac{t^n e^{-t}}{(1+xt)^{n+1}}$. Cette dérivée n-ème vérifie l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall\, x \geq 0,\ \forall\, t \geq 0,\ \left| (-1)^n\, n!\, \frac{t^n e^{-t}}{(1+xt)^{n+1}} \right| \leq n!\, t^n\, e^{-t}, \text{ fonction intégrable sur } [0, +\infty[$$

Donc, pour tout n, f est de classe C^n sur $[0, +\infty[$, donc f est C^∞ sur $[0, +\infty[$.

b) De plus :

$$f^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = \int_0^\infty (-1)^n\, n!\, \frac{t^n e^{-t}}{(1+xt)^{n+1}}\,dt$$

donc $\displaystyle f^{(n)}(0) = \int_0^\infty (-1)^n\, n!\, t^n e^{-t}\,dt = (-1)^n\,(n!)^2$ en intégrant n fois par parties

donc le développement limité de f à droite de 0 à tout ordre n est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k!\, x^k + o(x^n)$$

Euler se permettait d'attribuer à la série divergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n!$ la valeur $f(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$. Voir l'Annexe I du chapitre L2/SERIES.PDF.

Sol.3-2) a) Ne devrait pas poser de difficultés.
b) On montre que f est C^2 sur $]0, +\infty[$ en montrant qu'elle est C^2 sur tout intervalle $]a, b[$ avec $0 < a < b$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+t^2}\,e^{it} = \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}\,e^{it}$$

et $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{x}{x^2+t^2}\,e^{it} = \frac{-6xt^2+2x^3}{(t^2+x^2)^3}\,e^{it}$$

Cette dernière dérivée vérifie l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall\, x \in\,]a, b[,\ \forall\, t,\ \left|\frac{-6xt^2+2x^3}{(t^2+x^2)^3}\right| \leq \frac{6bt^2+2b^3}{(t^2+a^2)^3}$$

la fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'équivalente à $\frac{6b}{t^4}$ en l'infini. Par conséquent, f est C^2 sur tout intervalle $]a, b[$ inclus dans $]0, +\infty[$, donc C^2 sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}\,e^{it}\,dt \text{ et } f''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-6xt^2+2x^3}{(t^2+x^2)^3}\,e^{it}\,dt$$

c) $\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{2tx}{(x^2+t^2)^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{6xt^2-2x^3}{(t^2+x^2)^3}$

d) Donc $f''(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x, t)\,e^{it}\,dt = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\,e^{it}\,dt$ en intégrant par parties

$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t)\,e^{it}\,dt$ en intégrant de nouveau par parties

$= f(x)$

Donc il existe a et b tels que : $\forall\, x > 0,\ f(x) = ae^x + be^{-x}$.
e) Effectuer le changement de variables $t = ux$.
f) f est bornée, car, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \pi$. Donc $a = 0$ et $f(x)$ est de la forme be^{-x}.

De plus, $x \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du$ est continue sur $\mathbb{R}$ (l'hypothèse de domination est vérifiée avec la fonction dominante $\frac{1}{1+u^2}$) donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \pi$$

donc $b = \pi$ et : $\forall\, x > 0,\ f(x) = \pi e^{-x}$.
On notera que $x \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,e^{it}\,dt$ n'est pas continue en 0. Pour $x = 0$, cette intégrale est en effet nulle, donc différente de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ qui vaut π.

En prenant la partie réelle de $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2}\,du$ et en utilisant la parité du cosinus, on obtient, pour $x > 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,du = \frac{\pi e^{-x}}{2}$$

Le membre de gauche étant une fonction paire de x, on a, pour $x < 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,du = \frac{\pi e^{x}}{2}$. On cherchera dans la solution où l'on a utilisé l'hypothèse $x > 0$ pour trouver l'expression de f.
On trouvera une autre façon de calculer cette intégrale au moyen d'une intégrale curviligne dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF.

Sol.3-3) a) F est définie continue pour $x \geq 0$. Pour le montrer, utiliser l'hypothèse de domination suivante.

$$0 \leq \frac{\sin(t)^2}{t^2} e^{-xt} \leq \begin{cases} 1 \text{ pour } t \in \,]0, 1[\\ \dfrac{1}{t^2} \text{ pour } t \geq 1 \end{cases} \quad \text{fonction définie par morceaux, intégrable sur }]0, +\infty[.$$

F est C^2 sur $]0, +\infty[$ car C^2 sur tout intervalle $]a, +\infty[$, $a > 0$. En effet :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin(t)^2}{t^2} e^{-xt} = -\frac{\sin(t)^2}{t} e^{-xt}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sin(t)^2}{t^2} e^{-xt} = \sin(t)^2 e^{-xt}$$

avec l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall x > a, \forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\sin(t)^2}{t^2} e^{-xt} \leq e^{-at}$$

b) Pour tout $x > 0$:

$$F''(x) = \int_0^{\infty} \sin(t)^2 e^{-xt}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2} e^{-xt}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-xt} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{(2i-x)t}\,dt\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\frac{1}{x-2i}$$

$$= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \mathrm{Cte}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F'(x) = -\int_0^{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(t)^2}{t} e^{-xt}\,dt = 0$ en appliquant le théorème de convergence dominée, avec l'hypothèse de domination : $\forall x \geq 1, \forall t \in \,]0, +\infty[\, \left|\dfrac{\sin(t)^2}{t} e^{-xt}\right| \leq e^{-t}$. Comme on a :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) = 0$$

on en déduit que Cte = 0 et donc que :

$$F'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4)$$

Donc F est une primitive de $\frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2 + 4)$. On trouve une telle primitive en intégrant par partie :

$$\int \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4)\,dx = \frac{1}{2}(x\ln(x) - x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) + \frac{1}{4}\int \frac{2x^2}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x\ln(x) - x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) + \frac{1}{4}\int 2 - \frac{8}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan(\frac{x}{2}) + \text{Cte}$$

Comme pour F', on montre que $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} e^{-xt}\,dt = 0$. Comme :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan(\frac{x}{2}) = \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{4}\ln(1+\frac{4}{x^2}) - \arctan(\frac{x}{2})$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

on en déduit que Cte $= \frac{\pi}{2}$ et que :

$$F(x) = \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{2}$$

c) D'où :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)^2}{t^2}\,dt = F(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{\sin(t/2)^2}{t^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin(u)^2}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2} \quad \text{en posant } t = 2u$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty \frac{\sin(xt/2)^2}{t^2} e^{-t}\,dt$$

$$= x\int_0^\infty \frac{\sin(u)^2}{u^2}\exp(-\frac{2u}{x})\,du \qquad \text{en posant } t = \frac{2u}{x}$$

$$= x\,F(\frac{2}{x})$$

$$= \ln(\frac{2}{x}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{4}{x^2}+4) - x\arctan(\frac{1}{x}) + \frac{\pi}{2}x$$

$$= \ln(2) - \ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(4) + \ln(1+x^2) - \ln(x^2)) - x(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)) + \frac{\pi}{2}x$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Si on remplace t par $\frac{t}{x}$ avec $x > 0$, on obtient :

$$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,dt = x\int_0^\infty \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-t/x}\,dt$$

Puis, si on remplace x par $\dfrac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

donc $$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-tx}\, dt = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + x\ln(x)$$

On retrouve la valeur $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$ trouvée plus haut, en faisant tendre x vers 0 et en vérifiant une hypothèse de domination pour la fonction $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-tx}$ (laissée au lecteur).

Sol.3-4) a) Soit $\mathrm{G}(x, y, z) = \displaystyle\int_y^z f(x,t)\, dt$. Alors $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x, \varphi(x), \psi(x))$. Voir le chapitre L1/CALCDIF1.PDF pour la dérivation d'une fonction composée de plusieurs variables :

$$\Rightarrow \quad \mathrm{F}'(x) = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}(x,\varphi(x),\psi(x)) \times \varphi'(x) + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}(x,\varphi(x),\psi(x)) \times \psi'(x)$$

$$= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt + \psi'(x)\, f(x,\psi(x)) - \varphi'(x)\, f(x,\varphi(x))$$

Pour justifier que $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(x,y,z) = \displaystyle\int_y^z \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$, il convient de vérifier une hypothèse de domination sur un rectangle $[a, b] \times [y, z]$ tel que $a < x < b$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ étant continue sur le fermé borné $[a, b] \times [y, z]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y est bornée et il suffit de prendre comme fonction dominante une constante majorant $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur ce rectangle.

b) En appliquant le a) :

$$\mathrm{H}'(x) = \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\, dt + \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$$

En utilisant la décomposition en éléments simples :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = -\frac{x}{1+x^2}\,\frac{1}{1+xt} + \frac{1}{1+x^2}\,\frac{x+t}{1+t^2}$$

On obtient :

$$\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\, dt = -\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\arctan(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2(1+x^2)}$$

donc $\quad \mathrm{H}'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}\arctan(x) + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2(1+x^2)}$

donc $\quad \mathrm{H}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\arctan(x) + \mathrm{Cte}$

(si on ne voit pas la primitive de H' directement, on peut effectuer une intégration par parties sur $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x^2)}{2(1+x^2)}\,dx$ par exemple)

Comme H(0) = 0, Cte = 0 et $H(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\arctan(x)$

c) Pour $x = 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{8}\ln(2)$

Sol.3-5) a) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{it})\,dt$. F est C^1 sur $[0, +\infty[$. En effet :

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp(-xe^{it}) = -\exp(it - xe^{it})$$

et $\forall x \geq 0$, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|-\exp(it - xe^{it})| = \exp(-x\cos(t)) \leq 1$ fonction intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc :

$$\forall x \geq 0,\ F'(x) = -\int_0^{\pi/2} \exp(it - xe^{it})\,dt$$

Or la dérivée par rapport à t de $\exp(-xe^{it})$ est $-ix\exp(it - xe^{it})$. Donc, pour $x > 0$, une primitive de $-\exp(it - xe^{it})$ par rapport à t est $\dfrac{1}{ix}\exp(-xe^{it})$, donc :

$$F'(x) = \frac{1}{ix}\left[\exp(-xe^{it})\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{e^{-ix} - e^{-x}}{ix}$$

On peut vérifier que l'expression précédente de F' se prolonge en 0 par la valeur $\dfrac{1-i}{i}$, qui est bien la valeur de $F'(0) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{it}\,dt = -\frac{i-1}{i}$.

Donc, sachant que $F(0) = \dfrac{\pi}{2}$:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t)\,dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{e^{-it} - e^{-t}}{it}\,dt$$

En prenant la partie réelle de chaque membre de l'égalité $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{it})\,dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{e^{-it} - e^{-t}}{it}\,dt$, on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \exp(-x\cos(t))\cos(x\sin(t))\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

Pour permuter dans l'intégrale de gauche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2}$, on doit vérifier une hypothèse de domination sur la fonction $(x, t) \in [0, \infty[\times [0, \frac{\pi}{2}] \to \exp(-x\cos(t))\cos(x\sin(t))$. Une fonction majorante n'est pas difficile à trouver (on peut prendre une constante puisqu'on intègre sur un intervalle borné). On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-x\cos(t))\cos(x\sin(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} \lim_{x\to+\infty} \exp(-x\cos(t))\cos(x\sin(t))\,dt = 0$$

alors que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$. D'où le résultat.

A titre de curiosité, si on prend la partie imaginaire de $\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{it})\,dt = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{e^{-it} - e^{-t}}{it}\,dt$ puis si on fait tendre x vers l'infini, on prouvera que $\int_0^\infty \frac{\cos(t) - e^{-t}}{t}\,dt = 0$.

b) $\int_0^Y \left(\int_0^X e^{-xy}\sin(y)\,dx\right) dy = \int_0^Y \frac{1 - e^{-Xy}}{y}\sin(y)\,dy$

$$\int_0^X \left(\int_0^Y e^{-xy}\sin(y)\,dy\right) dx = \mathrm{Im} \int_0^X \left(\int_0^Y e^{-xy+iy}\,dy\right) dx = \mathrm{Im} \int_0^X \frac{1 - e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$$

$$= \int_0^X \frac{1}{x^2+1}\,dx - \mathrm{Im} \int_0^X \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$$

$$= \arctan(X) - \mathrm{Im} \int_0^X \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$$

Ainsi : $\int_0^Y \frac{1 - e^{-Xy}}{y}\sin(y)\,dy = \arctan(X) - \mathrm{Im} \int_0^X \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$

Si X tend vers l'infini, on obtient $\int_0^Y \frac{\sin(y)}{y}\,dy = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Im} \int_0^\infty \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$. Il convient de vérifier une hypothèse de domination pour l'intégrale $\int_0^Y \frac{1 - e^{-Xy}}{y}\sin(y)\,dy$ afin de permuter $\lim_{X\to\infty}$ et $\int_0^Y$:

$$\forall X \geq 0, \forall y \in [0, Y], \left|\frac{1 - e^{-Xy}}{y}\sin(y)\right| \leq \left|1 - e^{-Xy}\right| \leq 1 \text{ fonction intégrable sur } [0, Y].$$

Puis on fait tendre Y vers l'infini et on obtient $\int_0^\infty \frac{\sin(y)}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$. Il convient de vérifier une hypothèse de domination pour pouvoir écrire $\lim_{Y\to+\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx = \int_0^\infty \lim_{Y\to+\infty} \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$.

$$\forall Y \geq 1, \forall x \geq 0, \left|\frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\right| = \frac{e^{-xY}}{\sqrt{x^2+1}} \leq e^{-x} \text{ fonction intégrable sur } [0, +\infty[$$

On aurait pu commencer par faire tendre Y vers l'infini dans $\int_0^Y \frac{1 - e^{-Xy}}{y}\sin(y)\,dy$ et $\arctan(X) - \mathrm{Im} \int_0^X \frac{e^{-xY+iY}}{x-i}\,dx$, ce qui donne :

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-Xy}}{y}\sin(y)\,dy = \arctan(X)$$

puis X vers l'infini, ce qui donnerait $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$, mais l'hypothèse de domination de $\dfrac{1 - e^{-\mathrm{X}y}}{y}\sin(y)$ est impossible à vérifier si y varie dans $[0, +\infty[$ au lieu de $[0, \mathrm{Y}]$, la fonction majorante $\dfrac{|\sin(y)|}{y}$ n'étant pas intégrable sur $]0, +\infty[$. On rencontre une difficulté analogue dans le c) qui suit.

c) On montre que l'intégrale est une fonction C^1 de x sur $]0, +\infty[$ en montrant qu'elle est C^1 sur tout intervalle $]a, +\infty[$, $a > 0$. Pour cela, vérifions l'hypothèse de domination sur la dérivée de $e^{-tx}\dfrac{\sin(t)}{t}$ par rapport à x. On a $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{-tx}\dfrac{\sin(t)}{t}\right) = -\,e^{-tx}\sin(t)$, donc :

$$\forall x > a,\ \forall t \in\,]0, +\infty[,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\right)\right| \leq e^{-ta} \text{ fonction intégrale sur }]0, +\infty[.$$

Par conséquent :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty -\,e^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \exp((i-x)t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{x-i} = -\,\frac{1}{x^2+1}$$

donc $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Cte} - \arctan(x)$.

Plus généralement, nous utiliserons plus loin le calcul de primitive suivant :

$$\int e^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\int \exp((i-x)t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{Im}\,\frac{\exp((i-x)t)}{i-x}$$
$$= -\,\mathrm{Im}\,\frac{\exp((i-x)t)(i+x)}{1+x^2}$$
$$= -\,\mathrm{Im}\,\frac{(e^{-xt}\cos(t) + ie^{-xt}\sin(t))(i+x)}{1+x^2}$$
$$= -\,\frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{1+x^2}$$

Ainsi, une primitive de $t \to e^{-tx}\sin(t)$ est la fonction $t \to -\,\dfrac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{1+x^2}$.

Dans l'égalité $\displaystyle\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Cte} - \arctan(x)$, on obtient la valeur de Cte en faisant tendre x vers l'infini. Pour permuter $\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ et $\displaystyle\int_0^\infty$, il suffit de vérifier que $e^{-tx}\dfrac{\sin(t)}{t}$ satisfait une hypothèse de domination. C'est le cas avec, par exemple :

$$\forall x > 1,\ \forall t \in\,]0, +\infty[,\ \left|e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}\right| \leq e^{-tx} \leq e^{-t} \text{ fonction intégrable sur }]0, +\infty[$$

On a donc :

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = 0$$

$$= \lim_{x\to\infty} \text{Cte} - \arctan(x) = \text{Cte} - \frac{\pi}{2}$$

donc Cte $= \frac{\pi}{2}$ et $\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Faire tendre x vers 0 dans l'égalité précédente est délicat car il n'est pas possible de trouver une hypothèse de domination dans ce cas. Ecrivons :

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \int_0^{\pi/2} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt + \int_{\pi/2}^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ vérifie une hypothèse de domination avec :

$$\forall x > 0,\ \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \left| e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq 1$$

Intégrons par parties $\int_{\pi/2}^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$, avec $u' = e^{-tx} \sin(t)$, $v = \frac{1}{t}$. On a vu plus haut qu'on peut prendre $u = -\frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{1 + x^2}$. Donc, pour $x > 0$:

$$\int_{\pi/2}^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \left[-\frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{t(1 + x^2)} \right]_{t=\pi/2}^{t=\infty} - \int_{\pi/2}^\infty \frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{t^2(1 + x^2)}\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{xe^{-x\pi/2}}{1 + x^2} - \int_{\pi/2}^\infty \frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{t^2(1 + x^2)}\, dt$$

Or l'intégrale $\int_{\pi/2}^\infty \frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{t^2(1 + x^2)}\, dt$ vérifie une hypothèse de domination (remarquer qu'on a augmenté le degré en t du dénominateur). En effet :

$$\forall x > 0,\ \forall t \geq \frac{\pi}{2},\ \left| \frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{t^2(1 + x^2)} \right| \leq \frac{1 + x}{t^2(1 + x^2)} \leq \frac{M}{t^2} \text{ intégrable sur } [\frac{\pi}{2}, +\infty[$$

où M est un majorant de la fonction bornée $x > 0 \to \frac{1 + x}{1 + x^2}$.

Donc :

$$\lim_{x\to 0} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \lim_{x\to 0} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt + \frac{2}{\pi} \frac{xe^{-x\pi/2}}{1 + x^2} - \int_{\pi/2}^\infty \frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{t^2(1 + x^2)}\, dt \right)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \lim_{x\to 0} e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t}\, dt - \int_{\pi/2}^\infty \lim_{x\to 0} \frac{e^{-xt}\cos(t) + xe^{-xt}\sin(t)}{t^2(1 + x^2)}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\, dt - \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\, dt + \int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

en refaisant une intégration par parties inverse

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Sol.3-6) a) Montrons que g est C^1 sur $[0, +\infty[$ La fonction $x \to \frac{1}{1+t^2} \exp(-\frac{x^2(1+t^2)}{2})$ est de classe C^1, de dérivée $-x \exp(-\frac{x^2(1+t^2)}{2})$, et l'on a :

$$\forall x \geq 0, \forall t \in [0, 1], \left| -x \exp(-\frac{x^2(1+t^2)}{2}) \right| \leq x \exp(-\frac{x^2}{2}),$$ fonction bornée sur $\mathbb{R}$ car continue et de limite nulle en $+\infty$. On peut donc prendre comme fonction dominante la constante $\sup_{x\geq 0} x \exp(-\frac{x^2}{2})$, constante qui est intégrable sur le segment $[0, 1]$. Donc g est C^1 et, pour $x > 0$:

$$g'(x) = -x \int_0^1 \exp(-\frac{x^2(1+t^2)}{2})\, dt$$

$$= -\exp(-\frac{x^2}{2}) \int_0^x \exp(-\frac{u^2}{2})\, du \text{ en posant } u = xt$$

$$= -f'(x) f(x)$$

Donc, pour $x > 0$, $g(x) = \text{Cte} - \frac{f(x)^2}{2}$. Les deux fonctions étant continues en 0, on trouve la constante en prenant $x = 0$, ce qui donne :

$$g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4} = \text{Cte} - \frac{f(0)^2}{2} = \text{Cte}$$

Donc Cte $= \frac{\pi}{4}$ et $g(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{f(x)^2}{2}$

b) On fait tendre x vers $+\infty$. Une hypothèse de domination sur g n'est pas difficile à trouver. On en déduit :

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \int_0^1 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+t^2} \exp(-\frac{x^2(1+t^2)}{2})\, dt = 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)^2}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt)^2$$

Donc $\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt = \sqrt{2\pi}$.

Sol.3-7) ❑ On peut intégrer par parties, avec $f'(t) = 2t \exp(-t^2)$ et $g(t) = \frac{1}{2t}$:

$$\int_x^{\infty} \exp(-t^2)\,dt = \int_x^{\infty} f'(t)g(t)\,dt = \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{2t^2}\,dt$$

or $0 \leq \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{2t^2}\,dt \leq \frac{1}{2x^2} \int_x^{\infty} \exp(-t^2)\,dt = o(\int_x^{\infty} \exp(-t^2)\,dt)$ quand x tend vers l'infini.

Donc :

$$\int_x^{\infty} \exp(-t^2)\,dt \sim \int_x^{\infty} \exp(-t^2)\,dt + \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{2t^2}\,dt = \frac{\exp(-x^2)}{2x}$$

Donc $\int_x^{\infty} \exp(-t^2)\,dt \sim \frac{\exp(-x^2)}{2x}$.

❑ On peut aussi effectuer le changement de variable $t = x + u$ dans l'intégrale initiale. On obtient $\exp(-x^2) \int_0^{\infty} \exp(-2xu - u^2)\,du$. On pose ensuite $y = ux$ ce qui donne :

$$\frac{\exp(-x^2)}{x} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{x^2}) \exp(-2y)\,dy$$

On passe à la limite dans l'intégrale au moyen du théorème de convergence dominée. Pour tout y, $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(-\frac{y^2}{x^2}) \exp(-2y) = \exp(-2y)$ et par ailleurs, l'hypothèse de domination est vérifiée :

$\forall x > 0, \forall y \geq 0, 0 \leq \exp(-\frac{y^2}{x^2}) \exp(-2y) \leq \exp(-2y)$ fonction intégrable sur $[0,+\infty[$

La limite de l'intégrale vaut donc $\int_0^{\infty} \exp(-2y)\,dy = \frac{1}{2}$, donc l'équivalent cherché est $\frac{\exp(-x^2)}{2x}$

❑ On peut aussi procéder par encadrement dans l'intégrale $\exp(-x^2) \int_0^{\infty} \exp(-2xu - u^2)\,du$. D'une part :

$$\exp(-x^2) \int_0^{\infty} \exp(-2xu - u^2)\,du \leq \exp(-x^2) \int_0^{\infty} \exp(-2xu)\,du = \frac{\exp(-x^2)}{2x}$$

D'autre part, pour tout $a > 0$, on peut minorer l'intégrale par :

$$\exp(-x^2) \int_0^{a} \exp(-2xu - u^2)\,du \geq \exp(-x^2 - a^2) \int_0^{a} \exp(-2xu)\,du$$

$$\geq \exp(-x^2 - a^2)\,\frac{1 - e^{-2xa}}{2x}.$$

Si on prend $a = \frac{1}{\sqrt{x}}$, le minorant vaut $\exp(-x^2 - \frac{1}{x})\,\frac{1 - \exp(-2\sqrt{x})}{2x} \sim \frac{\exp(-x^2)}{2x}$.

Minorant et majorant étant tous deux équivalents à $\frac{\exp(-x^2)}{2x}$, il en est de même de l'intégrale.

Sol.3-8) On peut supposer $b < a$, car on se ramène à ce cas quitte à changer le signe des deux membres.

a) Si f' est intégrable, f admet une limite en $+\infty$ car $\int_0^{\infty} f'(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - f(0)$.

Posons $L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

❑ D'une part :

$$\int_\varepsilon^X \int_b^a f'(tx)\,dt\,dx = \int_\varepsilon^X \left[\frac{f(tx)}{x}\right]_{t=b}^{t=a} dx$$
$$= \int_\varepsilon^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

D'autre part :

$$\int_b^a \int_\varepsilon^X f'(tx)\,dx\,dt = \int_b^a \left[\frac{f(tx)}{t}\right]_{x=\varepsilon}^{x=X} dt = \int_b^a \frac{f(tX)-f(t\varepsilon)}{t}\,dt$$

Ainsi, $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_b^a \frac{f(tX)-f(t\varepsilon)}{t}\,dt$

Faisons tendre ε vers 0. La limite existe car, à droite, on peut intervertir $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ et $\displaystyle\int_b^a$, la fonction $(\varepsilon, t) \to \dfrac{f(tX)-f(t\varepsilon)}{t}$ vérifiant l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall\, t \in [b, a],\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \left|\frac{f(tX)-f(t\varepsilon)}{t}\right| \le \frac{2\,\|f\|_\infty}{b}$$

où $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f(x)|$. Cette quantité existe car, f étant continue sur $[0, +\infty[$ et admettant une limite en $+\infty$, f est bornée. On obtient alors :

$$\int_0^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_b^a \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(tX)-f(t\varepsilon)}{t}\,dt = \int_b^a \frac{f(tX)-f(0)}{t}\,dt$$

Puis, par un raisonnement analogue, on fait tendre X vers l'infini (avec une hypothèse de domination vérifiée aussi avec $\dfrac{2\,\|f\|_\infty}{b}$), ce qui donne :

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_b^a \lim_{X\to 0} \frac{f(tX)-f(0)}{t}\,dt = \int_b^a \frac{L-f(0)}{t}\,dt = (L-f(0))\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

❑ On peut aussi montrer le résultat par un calcul ne nécessitant que des connaissances plus élémentaires, ce qui ne signifie pas que les calculs soient plus simples.

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx + \lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_\varepsilon^1 \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^1 \frac{f(bx)}{x}\,dx\right) + \lim_{X\to\infty} \left(\int_1^X \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_1^X \frac{f(bx)}{x}\,dx\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{a\varepsilon}^a \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{b\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x}\,dx\right) + \lim_{X\to\infty} \left(\int_a^{aX} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_b^{bX} \frac{f(x)}{x}\,dx\right)$$

par changement de variables

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,dx + \int_b^a \frac{f(x)}{x}\,dx\right) + \lim_{X\to\infty} \left(\int_{bX}^{aX} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_b^a \frac{f(x)}{x}\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{X\to\infty}\int_{bX}^{aX} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,\mathrm{d}x - f(0)\ln(\frac{a}{b}) + \lim_{X\to\infty}\int_{bX}^{aX} \frac{f(x)-L}{x}\,\mathrm{d}x + L\ln(\frac{a}{b})$$

Il suffit de montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\int_{bX}^{aX} \frac{f(x)-L}{x}\,\mathrm{d}x = 0$ pour conclure. Pour la première intégrale, f étant dérivable en 0, $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ est bornée au voisinage de 0. Soit M un majorant. On a alors :

$$\left|\int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon} \frac{f(x)-f(0)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le M(a-b)\varepsilon \qquad \text{qui tend bien vers 0 quand } \varepsilon \text{ tend vers 0}$$

Pour la deuxième, comme $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, pour tout $m > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour $x > A$, $|f(x) - L| < m$. Pour X assez grand pour que $bX > A$, on a :

$$\left|\int_{bX}^{aX} \frac{f(x)-L}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le m\ln(\frac{a}{b})$$

Ainsi, $\forall\, m > 0, \exists\, A, \forall\, X > \frac{A}{b}, \left|\int_{bX}^{aX} \frac{f(x)-L}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le m\ln(\frac{b}{a})$

ce qui est la définition de $\lim_{X\to\infty}\int_{bX}^{aX} \frac{f(x)-L}{x}\,\mathrm{d}x = 0$.

❑ On pourrait considérer les deux membres comme fonction de a, s'annulant quand $a = b$ et ayant même dérivée $\frac{L-f(0)}{a}$. Mais pour le membre de gauche, il faudrait pouvoir écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\,\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f'(ax)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{f(ax)}{a}\right]_{x=0}^{x\to\infty} = \frac{L-f(0)}{a}$$

qui donne bien le résultat attendu, mais la première égalité demande à vérifier une hypothèse de domination sur la fonction $(a, x) \to f'(ax)$ qui n'est guère évidente à trouver.

b) $\frac{\pi}{2}\ln(\frac{a}{b})$

c) $\ln(\frac{b}{a})$

d) Faire le changement de variable $t = e^{-u}$ ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-e^{-u}}{u}\,e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

puis appliquer le c).

On peut aussi remarquer que $\frac{x-1}{\ln(x)}$ est la dérivée de $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. Par ailleurs, $F(0) = 0$ car la fonction $\frac{1}{\ln(t)}$ se prolonge par continuité en 0. Donc $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$, donc :

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt = \lim_{x\to1} F(x) = \lim_{x\to1} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$$

Posons $\varphi(t) = \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ (fonction se prolongeant par continuité en 1). On a alors, pour $x < 1$ par exemple :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\,\frac{1}{t-1}\,dt = \int_{x^2}^{x} \varphi(t)\,\frac{1}{1-t}\,dt$$

On a alors :

$$\min(\varphi)\int_{x^2}^{x} \frac{1}{1-t}\,dt \le F(x) \le \max(\varphi)\int_{x^2}^{x} \frac{1}{1-t}\,dt$$

le min et le max de φ étant pris entre x^2 et x et donc tendant vers la limite de φ en 1 quand x tend vers 1, cette limite valant 1. La limite de F en 1 est donc égale à celle de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,dt$, à savoir :

$$\lim_{x\to1} \ln(x^2-1) - \ln(x-1) = \ln(2)$$

Sol.3-9) $\displaystyle\int_1^A e^{it/A}\,\frac{e^{it}-1}{t} + \frac{1}{t}\,dt = \int_1^A \frac{1}{t}\,(\exp(it\,\frac{A+1}{A}) - \exp(\frac{it}{A}) + 1)\,dt$

$$= \int_1^A \frac{1}{t}\exp(it\,\frac{A+1}{A})\,dt - \int_1^A \frac{1}{t}\,(\exp(\frac{it}{A}) - 1)\,dt$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable $u = t\,\dfrac{A+1}{A}$ et dans la deuxième, on fait le changement de variable $u = \dfrac{t}{A}$. On obtient :

$$\int_{(A+1)/A}^{A+1} \frac{\exp(iu)}{u}\,du - \int_{1/A}^{1} \frac{\exp(iu)-1}{u}\,du$$

Il suffit ensuite de prendre la limite. On pourra montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}\,dt$ est convergente en intégrant par parties.

Sol.3-10) a) $f(x)$ est défini pour tout $x \ge 0$ car, au voisinage de t infini :

$$0 \le \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \le \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{t^{3/2}} \text{ fonction intégrable sur } [1, +\infty[$$

On montre que f est continue sur $[0, +\infty[$ en montrant que, pour tout $a > 0$, f est continue sur $[0, a]$. Pour cela, on a l'hypothèse de domination suivante :

$$\forall\, x \in [0, a],\ \forall\, t \ge 0,\ 0 \le \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} \le \frac{\ln(1+at)}{1+t^2} \text{ fonction intégrable sur } [0, +\infty[$$

b) Notons qu'il ne sert à rien d'effectuer un développement limité de $\ln(1+xt)$ dans l'intégrale au voisinage de $x = 0$ car son premier terme xt donne une intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{xt}{1+t^2}\,dt$ divergente. Nous allons passer par le calcul de f'. Pour cela, on montre que f est C^1 sur $]0, +\infty[$ en montrant qu'elle est C^1 sur tout intervalle $]a, +\infty[$, $a > 0$. On a $\dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\ln(1 + xt)}{1 + t^2} = \dfrac{t}{(1 + xt)(1 + t^2)}$ et l'on dispose de l'hypothèse de domination suivante :

$\forall x > a, \forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \dfrac{t}{(1 + xt)(1 + t^2)} \leq \dfrac{t}{(1 + at)(1 + t^2)}$ fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (c'est un $O(\dfrac{1}{t^2})$ en $+\infty$).

On a donc, pour $x > 0$:

$$f'(x) = \int_0^{\infty} \frac{t}{(1 + xt)(1 + t^2)} \,dt = \frac{1}{1 + x^2} \int_0^{\infty} \frac{t + x}{1 + t^2} - \frac{x}{1 + xt} \,dt$$

$$= \frac{1}{1 + x^2} \left(\frac{\pi x}{2} + \lim_{t \to \infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1 + t^2}}{1 + xt}\right)\right) = \frac{1}{1 + x^2} \left(\frac{\pi x}{2} - \ln(x)\right)$$

On peut alors conclure de deux façons :

❑ Quand x tend vers 0, on a $f'(x) = -\ln(x) + \dfrac{\pi x}{2} + o(x)$. Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x) + x\ln(x) - x - \frac{\pi x^2}{4}$$

g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$, et il s'agit de montrer que $g(x) = o(x^2)$. g est dérivable pour $x > 0$ de dérivée :

$$g'(x) = f'(x) + \ln(x) - \frac{\pi x}{2} = o(x) = x\varepsilon(x)$$

avec ε une fonction telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Le théorème des accroissements finis (voir le chapitre L1/DERIVEE.PDF) permet d'écrire que :

$$\forall x > 0, \exists \theta \in]0, 1[, g(x) = g(x) - g(0) = xg'(\theta x) = x^2\theta\varepsilon(\theta x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \theta\varepsilon(\theta x) = 0$, donc $g(x) = o(x^2)$.

❑ On peut aussi procéder comme suit. Puisque $f(0) = 0$, on a :

$$f(x) = \int_0^x f'(t) \,dt = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} \left(\frac{\pi t}{2} - \ln(t)\right) dt$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln(1 + x^2) - \int_0^x \frac{\ln(t)}{1 + t^2} \,dt$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln(1 + x^2) - \int_0^x \ln(t) \,dt + \int_0^x \frac{t^2 \ln(t)}{1 + t^2} \,dt$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln(1 + x^2) - x\ln(x) + x + \int_0^x \frac{t^2 \ln(t)}{1 + t^2} \,dt$$

Comme $\dfrac{\pi}{4} \ln(1 + x^2) = \dfrac{\pi x^2}{4} + o(x^2)$, il reste à montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2 \ln(t)}{1 + t^2} \,dt = o(x^2)$. Effectuons le changement de variable $t = ux$. On obtient :

$$\int_0^x \frac{t^2 \ln(t)}{1 + t^2} \,dt = x^3 \int_0^1 \frac{u^2 \ln(ux)}{1 + ux^2} \,du = x^3 \int_0^1 \frac{u^2 \ln(u)}{1 + ux^2} \,du + x^3 \int_0^1 \frac{u^2 \ln(x)}{1 + ux^2} \,du$$

On a :

$$\left|\int_0^1 \frac{u^2\ln(u)}{1+ux^2}\,du\right| \leq \int_0^1 u^2\,|\ln(u)| \text{ qui est une constante, donc } x^3\int_0^1 \frac{u^2\ln(u)}{1+ux^2}\,du = O(x^3)$$

$$\left|\int_0^1 \frac{u^2}{1+ux^2}\,du\right| \leq \int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3} \text{ donc } x^3\int_0^1 \frac{u^2\ln(x)}{1+ux^2}\,du = O(x^3\ln(x))$$

Comme $O(x^3) + O(x^3\ln(x)) = O(x^3\ln(x)) = o(x^2)$, le résultat est atteint.

Sol.3-11) a) L'hypothèse de domination pour $\arctan(x\tan(\theta))$ est :

$$\forall x \geq 0,\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ 0 \leq \arctan(x\tan(\theta)) \leq \frac{\pi}{2} \text{ fonction constante intégrable sur } [0, \frac{\pi}{2}[$$

Comme $x \to \arctan(x\tan(\theta))$ est continue pour tout θ, f est bien continue.
Montrons que f est de classe C^1 sur tout intervalle $]a, +\infty[$, $a > 0$. La fonction $x \to \arctan(x\tan(\theta))$ est de classe C^1 et de dérivée $\dfrac{\tan(\theta)}{1+x^2\tan^2(\theta)}$. L'hypothèse de domination est vérifiée au moyen de :

$$\forall x > a,\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ \frac{\tan(\theta)}{1+x^2\tan^2(\theta)} \leq \frac{\tan(\theta)}{1+a^2\tan^2(\theta)} \text{ fonction intégrable sur } [0, \frac{\pi}{2}[\text{ car elle se}$$

prolonge par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$.

b) La dérivée de f vaut alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(\theta)}{1+x^2\tan^2(\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta)+x^2\sin^2(\theta)}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1-(1-x^2)u} \qquad \text{en posant } u = \sin^2(\theta) \\ &= -\frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln(1-(1-x^2)u)\right]_{u=0}^{u=1} \\ &= -\frac{\ln(x)}{1-x^2} \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = -\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,dt$.

c) f est continue en 1, donc, en faisant tendre x vers 1 :

$$\int_0^{\pi/2} \theta\,d\theta = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,dt$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,dt = -\frac{\pi^2}{8}$

D'autre part, en développant $\dfrac{1}{1-t^2}$ en série :

$$-\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} -t^{2n}\ln(t)\,dt$$

Il n'y a pas convergence normale de la série $\sum - t^{2n} \ln(t)$ sur [0, 1] car une étude de fonction donne $\| - t^{2n} \ln(t) \|_\infty = \dfrac{1}{2ne}$. En revanche, $\displaystyle\int_0^1 - t^{2n} \ln(t) \, dt = \frac{1}{(2n+1)^2}$ en intégrant par parties. Donc $\displaystyle\sum \int_0^1 \left| - t^{2n} \ln(t) \right| dt$ converge.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme étant vérifiées, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{8} = - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 - t^2} \, dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} - t^{2n} \ln(t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 - t^{2n} \ln(t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Enfin :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{en séparant les indices pairs des indices impairs}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

donc $\displaystyle \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$

donc $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

◆