INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES ET SERIES

PLAN

Dans ce chapitre, on introduit les intégrales généralisées (ou impropres), puis les séries. Les deux ont des propriétés de convergence analogues.

I : Intégrales généralisées ou impropres

1- Définition et exemples

Les fonctions sont définies sur des intervalles I ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non. On supposera les fonctions continues par morceaux.

Si I est un segment $[a, b]$, on appelle fonction **continue par morceaux** sur I une fonction f pour laquelle il existe un subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b$ telle que :

- sur tout intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, f est continue
- $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\lim\limits_{x\to a_k,\, x > a_k} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to a_{k+1},\, x < a_{k+1}} f(x)$ existe

On peut alors définir $\int_a^b f(t)\, dt$ en la définissant comme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\, dt$, où $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\, dt$ est elle-même calculée en intégrant la fonction continue qui prolonge f sur $[a_k, a_{k+1}]$. (On vérifie que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie).

Si I est un intervalle ouvert ou semi-ouvert, on appelle fonction continue par morceaux sur I une fonction continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

DEFINITION

Si f est continue par morceaux sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est **généralisée** *(ou* **impropre***). Elle est* **convergente** *si $\int_a^x f(t)\, dt$ admet une limite finie quand x tend vers b, en restant dans $[a, b[$. $\int_a^b f(t)\, dt$ désigne alors la valeur de cette limite. L'intégrale est* **divergente** *s'il n'y a pas de limite.*

Ci-dessus, b vaut éventuellement $+\infty$ (souvent abrégé en ∞). Dans le cas d'un intervalle du type $]a, b]$, (a éventuellement égal à $-\infty$), on définira :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\, dt \text{ si cette limite existe}$$

et dans le cas d'un intervalle du type $]a, b[$, on posera :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{(x,y) \to (a,b)} \int_x^y f(t)\, dt = \lim_{x \to a} \int_x^c f(t)\, dt + \lim_{y \to b} \int_c^y f(t)\, dt$$ si chacune des deux limites existe. c est un point quelconque de $]a, b[$.

EXEMPLES :

❑ Soit $a > 0$. L'intégrale $\int_0^\infty e^{-at}\, dt$ est convergente :

$$\int_0^\infty e^{-at}\, dt = \frac{1}{a} \lim_{x\to\infty} [-e^{-at}]_0^x$$ la limite étant également notée $[-e^{-at}]_0^{+\infty}$

$= \dfrac{1}{a}$

Si $a \le 0$, l'intégrale est divergente puisque, dans ce cas, e^{-ax} tend vers l'infini quand x tend vers $+\infty$.

❑ L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0, et convergente. En effet ;

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2$$

❑ L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0 et divergente. En effet :

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \left[\ln(t)\right]_x^1 = \text{diverge}$$

mais nous verrons ci-après des critères de convergence rapides à mettre en oeuvre.

Par passage à la limite des bornes de l'intégrale, on montre facilement que les propriétés usuelles de l'intégrale sur un segment sont vérifiées par les intégrales impropres (linéarité, relation de Chasles, changement de variables). On prendra garde cependant aux deux points suivants :

❑ Pour l'intégration par parties pour laquelle l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} uv'$ est transformée en la somme $\left[uv\right]_{\mathrm{I}} - \displaystyle\int_{\mathrm{I}} u'v$, l'intégrale initiale peut être convergente, alors que, séparément $\left[uv\right]_{\mathrm{I}}$ et $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} u'v$ peuvent diverger. Il convient dans ce cas d'intégrer par parties sur des segments J inclus dans I et de ne passer à la limite qu'à la fin du calcul.

❑ De même, dans la propriété de linéarité, il se peut que l'intégrale de $f + g$ converge, mais que séparément, celle de f et celle de g divergent en sens contraire. Pour écrire $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} (f + g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g$, il faut bien être sûr de la convergence des intégrales de f et de g. Considérons par exemple deux réels a et b tels que $0 < a < b$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ (dont le lecteur pourra prouver la convergence une fois arrivé à la fin de la lecture de ce chapitre). La fonction $x \to \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale est strictement positive. Pourtant :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

en faisant le changement de variable $u = ax$ (respectivement $u = bx$) dans la première (respectivement deuxième) intégrale

$= 0$???

L'erreur de raisonnement provient du fait que chacune des deux intégrales $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ est divergente en 0 (ce qu'on pourra montrer là aussi une fois lu ce chapitre). On ne peut donc pas les séparer. L'idée du changement de variable est bonne, mais il est prudent de revenir à la définition de la convergence en 0 (on garde ci-dessous la borne infinie car il y a bien convergence des intégrales en cette borne) :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{ε étant strictement positif}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

la séparation des intégrales est ici valide car chacune converge

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{a\varepsilon}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right) \qquad \text{par changement de variable}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{par la relation de Chasles}$$

Au voisinage de 0, $\dfrac{e^{-u}}{u} \sim \dfrac{1}{u}$. Mettons en évidence cet équivalent :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u} + \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\right)$$

La fonction $u \to \dfrac{e^{-u}-1}{u}$ se prolonge par continuité en 0, donc elle admet une primitive F sur $[0, +\infty[$. On a alors $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u = F(b\varepsilon) - F(a\varepsilon)$, qui tend vers $F(0) - F(0) = 0$ lorsque ε tend vers 0. Donc :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

On retrouve d'ailleurs ce résultat de la façon suivante (nous admettrons qu'on peut permuter l'ordre des deux intégrations dans le calcul ci-dessous. C'est une généralisation du théorème de Fubini au domaine non borné $D = [0, +\infty[\times [a, b]$ portant sur l'intégrale double $\displaystyle\iint_D e^{-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Voir le chapitre sur les intégrales multiples L2/INTMULT.PDF) :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Une démonstration utilisant le théorème de Fubini sur un domaine borné est donnée dans les exercices du chapitre sur les suites et les séries de fonctions L2/SUITESF.PDF.

2- Cas des fonctions positives

Les théorèmes sont énoncés dans le cas où I = $[a, b[$. Le lecteur adaptera aisément le résultat pour les autres formes possibles d'intervalles.
Le fait que les fonctions sont continues par morceaux est sous-entendu.

PROPOSITION (fonctions posivites)
Soit f et g définies sur $[a, b[$, **positives**.

i) *Si, au voisinage de b, $f \leq g$ ou plus généralement, si $f = \mathrm{O}(g)$ et si $\int_{\mathrm{I}} g$ converge alors $\int_{\mathrm{I}} f$ converge.*
Si au voisinage de b, $f \geq g$ et si $\int_{\mathrm{I}} g$ diverge alors $\int_{\mathrm{I}} f$ diverge.

ii) *Si, au voisinage de b, $f \sim g$, alors $\int_{\mathrm{I}} g$ et $\int_{\mathrm{I}} f$ sont* **de même nature** (*toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes*).

Démonstration :
❑ i) : Il existe M et c élément de $[a, b[$ tels que, pour x élément de $[c, b[$, on a : $0 \leq f(x) \leq \mathrm{M}g(x)$, et donc :

$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}\int_c^x g(t)\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}\int_c^b g(t)\mathrm{d}t$ puisque $\int_c^x g(t)\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x majorée par sa limite $\int_c^b g(t)\mathrm{d}t$. En rajoutant $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ qui est un nombre fini, on voit que la quantité $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x et majorée, donc convergente.
La démonstration montre qu'il suffit que f et g soient positives au voisinage de b.
Ainsi, pour que l'intégrale d'une fonction positive converge, il suffit de la majorer par une fonction dont l'intégrale converge. La deuxième partie du i) n'est que la contraposée de la première partie. Pour qu'une intégrale d'une fonction positive diverge, il suffit de la minorer par une fonction positive dont l'intégrale diverge.

❑ ii) : Il suffit de remarquer que sur un voisinage $[c, b[$ de b, on a un encadrement du type $\frac{g}{2} \leq f \leq \frac{3g}{2}$. Si l'intégrale de g converge, il en est de même de celle de $\frac{3g}{2}$ et donc de f, d'après i). De même, si l'intégrale de f converge, celle de $\frac{g}{2}$ aussi, donc celle de g aussi.

3- Fonctions de référence

Pour voir si une intégrale généralisée d'une fonction positive converge, on prend un équivalent au voisinage de la borne problématique pour se ramener à une expression plus simple. On se ramène ainsi à des fonctions plus simples. Les cas les plus fréquents que l'on obtient figurent ci-dessous et servent de fonctions de référence.

PROPOSITION

(i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$. *De manière équivalente, l'intégrale diverge si et seulement si* $\alpha \leq 1$.

(ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$. *De manière équivalente, l'intégrale diverge si et seulement si* $\alpha \geq 1$.

(iibis) $\displaystyle\int_{t_0}^{a} \frac{1}{|t - t_0|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$. *Elle diverge si et seulement si* $\alpha \geq 1$.

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $a > 0$.

(iv) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ *converge*.

En ce qui concerne les cas (i) et (ii), on notera que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ sont toutes deux divergentes, et que, pour $\alpha \neq 1$, l'une des intégrales $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge pendant que l'autre diverge. On notera que c'est la valeur $\alpha = 1$ qui sert de partage entre le cas de convergence et celui de divergence. On réfléchira que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ a plus de chance de converger si la fonction $\dfrac{1}{t^{\alpha}}$ tend rapidement vers 0 quand t tend vers l'infini, permettant de mémoriser la condition de convergence $\alpha > 1$. La condition $\alpha < 1$ s'applique alors à la convergence de l'autre intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$.

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de prendre des primitives de chaque fonction :

❑ (i) : Pour $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$

La limite est finie si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} [\ln(t)]_1^x = \lim_{x\to\infty} \ln(x)$ diverge.

❑ (ii) : Pour $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{x\to 0} (1 - x^{1-\alpha})$

La limite est finie si et seulement si $\alpha < 1$.

Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} [\ln(t)]_x^1 = \lim_{x\to 0} -\ln(x)$ diverge.

❑ (iibis) : on se ramène au cas (ii) par le changement de variable $t - t_0 \to t$.

❑ (iii) : ce cas a été traité en exemple dans le I-1).

❑ (iv) : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \left[t\ln(t) - t\right]_x^1 = \lim_{x\to 0} (-1 - x\ln(x) + x) = -1$.

EXEMPLES :

❑ Considérons $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)}\,\mathrm{d}t$ où P est de degré n et Q de degré m, Q ne s'annulant pas sur $[a, +\infty[$. Le problème de convergence se pose en $+\infty$. On a alors $\dfrac{\mathrm{P}(t)}{\mathrm{Q}(t)} \sim \dfrac{\mathrm{Cte}}{x^{m-n}}$. L'intégrale converge si et seulement si $m - n > 1$.

❑ La **fonction Gamma** est définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. Cherchons son domaine de définition.

En 0, $e^{-t}\, t^{x-1} \sim t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ dont l'intégrale converge si et seulement si $x > 0$.

En $+\infty$, on a $0 \leq e^{-t}\, t^{x-1} \leq \dfrac{1}{t^2}$ puisque $e^{-t}\, t^{x+1}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale converge en $+\infty$ pour tout x.

Ainsi, $\Gamma(x)$ est défini sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Une intégration par parties donne :

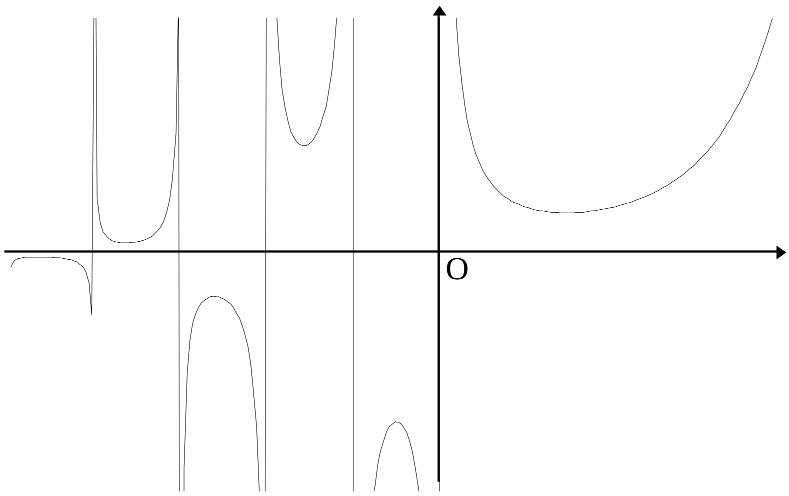
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^x\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\, t^x\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t}\, x t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

Comme $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$, on en déduit par récurrence que, pour n entier, $\Gamma(n+1) = n!$, i.e. :

$$\boxed{\int_0^{\infty} t^n\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!}$$

Ainsi, Γ est une extension aux réels strictement positifs de la factorielle.

La relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ s'écrit aussi, pour x non nul, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$. Le membre de droite est défini pour x élément de $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. On peut donc utiliser cette relation pour définir $\Gamma(x)$ sur $]-1, 0[$. Mais reprenant la même relation avec cette extension de Γ, le membre de droite est cette fois défini sur $]-2, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, permettant d'étendre Γ à $]-2, -1[$. De proche en proche, on définit ainsi Γ sur tout intervalle $]-n-1, -n[$, pour tout n entier naturel. Voici le graphe de la fonction Γ entre -5 et 5 :



4- Cas des fonctions de signe quelconque

f est ici une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

DEFINITION-PROPOSITION

Une intégrale $\int_I f$ *est dite* **absolument convergente** *si* $\int_I |f|$ *converge.* On *dit aussi que f est* **intégrable** *sur I.*

Dans ce cas, $\int_I f$ *converge.*

<u>Démonstration</u> :

Il s'agit de montrer que $\int_I |f|$ converge $\Rightarrow \int_I f$ converge.

❑ Pour f à valeurs réelles, posons :

$$f^+ = \mathrm{Sup}(f,0) = \frac{1}{2}(f + |f|)$$

$$f^- = \mathrm{Sup}(-f,0) = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

de sorte que $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$. En particulier, $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$. On peut donc appliquer à f^+ et à f^- la proposition sur les fonctions positives : si f est intégrable, alors $\int_I |f|$ converge, donc $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ aussi, donc $\int_I f$ aussi avec :

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$$

On a par ailleurs $\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$, de sorte que $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$.

❑ Pour f à valeurs complexes, écrivons $f = g + ih$ avec $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$. On a $|g| \leq |f|$ et $|h| \leq |f|$, donc on peut appliquer à g et h, fonctions à valeurs réelles, le cas ci-dessus démontré : si f est intégrable, alors $\int_{\mathrm{I}} |f|$ converge, donc $\int_{\mathrm{I}} |g|$ et $\int_{\mathrm{I}} |h|$ aussi, donc $\int_{\mathrm{I}} g$ et $\int_{\mathrm{I}} h$ aussi, donc $\int_{\mathrm{I}} f$ aussi, avec $\int_{\mathrm{I}} f = \int_{\mathrm{I}} g + i \int_{\mathrm{I}} h$.

On prendra garde que la propriété démontrée énonce seulement une condition **suffisante** de convergence de f, à savoir vérifier que $\int_{\mathrm{I}} |f|$ converge. Si $\int_{\mathrm{I}} |f|$ diverge, on ne peut rien conclure sur $\int_{\mathrm{I}} f$. Il existe des intégrales qui sont convergentes, sans être absolument convergente. Par exemple, pour $\mathrm{I} = [a, b[$, la limite $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ peut fort bien exister sans qu'aucune des limites suivantes n'existent : $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f^+(t)\, \mathrm{d}t$, $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x f^-(t)\, \mathrm{d}t$, $\lim\limits_{x \to b} \int_a^x |f(t)|\, \mathrm{d}t$. On peut très bien avoir par exemple :

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f^+(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f^-(t)\, \mathrm{d}t = +\infty$$

alors que la différence converge.

EXEMPLES :

❑ $\dfrac{\sin(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ car $\left|\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

❑ Par contre $\dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$. En effet, pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|\mathrm{d}x = \frac{2}{(k+1)\pi}$. On a alors, pour tout entier n :

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\, \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

or on montrera, dans la partie consacrée aux séries, que $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} = +\infty$ (série harmonique divergente). Par conséquent, $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\, \mathrm{d}x$ diverge.

Cependant, $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ converge car, en intégrant par parties, on a, pour tout $x > \pi$:

$$\int_{\pi}^{x} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_{\pi}^{x} - \int_{\pi}^{x} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

Le crochet admet une limite quand x tend vers $+\infty$, et la fonction $\frac{\cos(x)}{x^2}$ est, elle, intégrable sur $[\pi, +\infty[$ (comme l'est la fonction $\frac{\sin(x)}{x^2}$) , donc le membre de droite admet une limite.

❑ Le lecteur pourra généraliser le raisonnement précédent en prouvant que l'intégrale $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ converge, en se ramenant, par une intégration par parties, à la fonction intégrable $\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$.

Le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ est intéressant. En effet, $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, \pi]$ car $\frac{|\sin(t)|}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$, de la forme $\frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$, donc $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ converge. On montre de la même façon que $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ converge. Si on effectue le changement de variable $t = x^2$, on obtient le fait que les deux intégrales $\int_{0}^{\infty} \sin(x^2)\,dx$ et $\int_{0}^{\infty} \cos(x^2)\,dx$ convergent. On sait montrer par ailleurs que ces deux intégrales sont égales et valent $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (intégrales de **Fresnel**), mais la démonstration est trop longue pour figurer ici. On notera que ces deux dernières intégrales donnent des exemples de fonctions dont l'intégrale converge, sans que les fonctions tendent vers 0 en $+\infty$.

❑ Pour z complexe de partie réelle positive, on a $|e^{-t}\,t^{z-1}| = e^{-t}\,t^{\mathrm{Re}(z)-1}$, intégrable pour $\mathrm{Re}(z) > 0$, d'intégrale $\Gamma(\mathrm{Re}(z))$. On pose alors $\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt$, définie pour z complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$.

PROPRIETES

i) *L'ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle* I *forme un espace vectoriel.*

ii) *L'ensemble des fonctions de carré intégrables sur un intervalle* I *forme un espace vectoriel.*

<u>Démonstration</u> :

❑ i) résulte du fait que $|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda|\,|g|$, et donc, si f et g sont intégrables sur I, la fonction $|f| + |\lambda||g|$ est intégrable donc la fonction $f + \lambda g$ aussi

❑ ii) : On a $(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2$. Si on suppose que f et g sont de carré intégrable, on pourra conclure si on montre que fg est intégrable. C'est bien le cas en vertu de l'inégalité :

$$|fg| \leq \frac{f^2 + g^2}{2}$$

provenant du développement de $(|f| - |g|)^2 \geq 0$

Si on se limite au sous-espace vectoriel des fonctions continues de carré intégrables, on peut définir le produit scalaire suivant :

$$<f, g> = \int_{I} f(t)g(t)\,dt$$

II : Séries

1- Définition

DEFINITION :

On appelle **série** $\sum x_n$ *de terme général* x_n, *réel ou complexe, la suite de terme général* $S_n = x_0 + ... + x_n$, *appelée* **somme partielle**.

La série **converge** *si la suite des sommes partielles converge. Dans ce cas, la limite* S *s'appelle* **somme de la série** *et se note* $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. *La quantité* $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n$ *s'appelle* **reste de la série**.

Nous montrons dans le paragraphe suivant que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Cela signifie qu'il ne suffit pas que le terme général x_n d'une série tende vers 0 pour que la série converge. C'est cependant nécessaire. En effet, si une série converge vers S, alors $S_n - S_{n-1}$ tend vers $S - S = 0$. Or $S_n - S_{n-1} = x_n$. Autrement dit, si la suite (x_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum x_n$ diverge. On dit dans ce cas qu'elle **diverge grossièrement**. Ainsi, la série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement et nous n'attribuerons aucune valeur à cette somme (bien qu'Euler ne se soit pas gêné pour le faire. Voir Annexe I).

En raisonnant sur les sommes partielles et en utilisant les théorèmes sur les limites, il est facile de vérifier que l'ensemble des séries convergentes forme un espace vectoriel, et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Si u_n est complexe égal à $x_n + iy_n$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergent et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. On a également $\overline{\sum_{n=0}^{\infty} u_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n}$.

La première question qu'on se pose sur une série est de savoir si elle converge. Contrairement aux intégrales généralisées qu'on peut parfois calculer en passant par un calcul de primitive, il est rare qu'on puisse calculer explicitement les sommes partielles d'une série, et a fortiori leur limite. L'existence de critères de convergence joue donc pour les séries un rôle plus important que pour les intégrales généralisées. Plusieurs de ces critères sont analogues entre séries et intégrales

généralisées, et on suivra le même plan que pour ces dernières : traiter d'abord le cas des séries à termes positifs, puis passer au cas général. Quelques critères supplémentaires sont spécifiques aux séries.
Une fois que l'on sait que la série converge, une autre question est de trouver une expression explicite de sa somme, ou à défaut une valeur approchée. Ces questions sont parfois très délicates. La détermination d'une expression explicite n'est pas toujours possible. Quant à la détermination d'une valeur approchée, elle se heurte parfois à une vitesse de convergence lente. On se reportera à l'annexe III pour des exemples.

2- Exemples de séries

EXEMPLE 1 :

❑ Un premier exemple de série est fourni par le développement décimal d'un réel. On a en effet :

$$x = \mathrm{M} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où M est la partie entière de x, et les a_i des chiffres tels que $\forall\, n, \exists\, m > n, a_m \neq 9$. Cette dernière condition a pour but d'éviter les écritures décimales avec une infinité de 9. Au lieu de 0,9999999999..., on a 1 tout simplement. Sous cette condition, la décomposition de x est unique.

EXEMPLE 2 :

❑ Pour $|x| < 1$, on a $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$. En effet :

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \text{ qui tend bien vers } \frac{1}{1-x} \text{ car } x^{n+1} \text{ tend vers 0.}$$

Cette série s'appelle **série géométrique**. Plus généralement, toujours pour $|x| < 1$:

$$\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} x^n = x^{\mathrm{N}} \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} x^{n-\mathrm{N}}$$

$$= x^{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{en effectuant le changement d'indice } n - \mathrm{N} \to n$$

$$= \frac{x^{\mathrm{N}}}{1-x}$$

On a ainsi, par exemple :

$$1{,}222222222\ldots \times 0{,}8181818181\ldots = \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}\Big) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{81}{100^n}$$

$$= \Big(1 + \frac{2}{10} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\Big) \times \frac{81}{100} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \Big(1 + \frac{2}{9}\Big) \times \frac{81}{99}$$

$$= \frac{11}{9} \times \frac{9}{11} = 1$$

EXEMPLE 3 :

❑ On appelle **série harmonique** la série $\sum \frac{1}{n}$. Elle diverge. Les démonstrations en sont innombrables :

Démonstration 1

Elle est essentiellement due, aux notations près, à Nicolas Oresme (*Questiones super geometriam euclidis*, 1360). La somme partielle, de 1 à $N = 2^k$ est minorée par :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \sum_{p=1}^{k} \sum_{n=2^{p-1}+1}^{2^p} \frac{1}{n} \geq \sum_{p=1}^{k} \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{k}{2} \text{ qui tend vers } +\infty \text{ avec } k$$

Démonstration 2

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \text{nombre de termes} \times \text{plus petit terme} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si la série convergeait vers S, on aurait, en passant à la limite :

$$0 = S - S \geq \frac{1}{2}$$

Démonstration 3

C'est une variante de la précédente. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $D_n = S_{2n} - S_n$. On a évidemment $D_n > 0$.

De plus : $D_n - D_{n-1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0$. Donc la suite (D_n) est strictement croissante et strictement positive, donc elle ne peut tendre vers 0, ce qui serait si la suite (S_n) convergeait. Donc (S_n) diverge.

Démonstration 4

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2n} \text{ avec } \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{2k} \leq \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}$$

Donc $S_n \leq -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2} + S_{2n}$

Si la suite (S_n) convergeait vers une limite S, on aurait :

$$S \leq -\frac{1}{2} + S$$

ce qui est absurde.

Démonstration 5

On a $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x > -1$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{1+k}{k}) = \ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n + 1)$, donc la série diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

<u>Démonstration 6</u>

Elle est due à Mengoli en 1650. Pour tout entier n, on a $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{3}{n}$ donc :

$$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}) + \dots + (\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}) \geq 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + \dots + \frac{3}{3n}$$

$$\geq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

soit $S_{3n+1} \geq 1 + S_n$. Si la suite (S_n) des sommes partielles convergeait vers S, on aurait $S \geq 1 + S$.

<u>Démonstration 7</u>

Elle est due à Jacques Bernoulli. Pour tout entier n, on a :

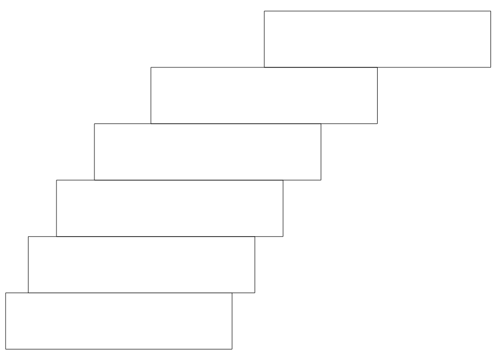
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n^2-n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n} + \frac{n^2-n}{n^2} = 1$$

donc, en regroupant les termes de la série géométrique par paquets entre l'indice n et n^2, on peut dépasser toute quantité donnée. Ainsi :

$$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{25}) \geq 1 + 1 + 1 = 3$$

Les regroupements peuvent être effectués aussi loin que l'on veut.

Terminons par une curieuse propriété. La divergence de la série harmonique permet d'empiler des dominos en équilibre avec un surplomb pouvant s'étendre aussi loin que l'on veut au-delà du domino de base. Si la longueur de chaque domino vaut 2, on décale de haut en bas le domineau inférieur par rapport au domino immédiatement supérieur d'une longueur 1, puis $\frac{1}{2}$, puis $\frac{1}{3}$, etc. On vérifiera que le centre de gravité des n dominos supérieurs se trouve exactement à l'aplomb du bord droit du domino de rang $n + 1$. Comme la série harmonique diverge, en prenant n aussi grand que l'on veut, le domino supérieur peut se trouver décalé d'une quantité aussi grande que l'on veut par rapport au domino inférieur :



EXEMPLE 4 :

❑ Pour tout x, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle en 0 donne :

$$\left| e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}) \right| \leq \mathrm{M} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

où M est un majorant de e^x entre 0 et x. On peut choisir par exemple $\mathrm{M} = \exp |x|$. Le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc, pour tout x :

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

En particulier, $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e}$ et $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}}$. La convergence est très rapide et permet de donner des valeurs approchées de l'exponentielle avec quelques termes de la somme partielle.

L'égalité $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ permet aussi de montrer que e est irrationnel. En effet, montrons que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$.

La première inégalité est triviale puisque $e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > 0$. Pour la seconde inégalité, il s'agit de montrer que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}$. Pour cela :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} (1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ...)$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \qquad \text{(somme d'une série géométrique)}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$. Il suffit de montrer que $\frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!}$ ou que $n + 2 < (n+1)^2$, ou que $n^2 + n - 1 > 0$, ce qui est le cas car $n^2 + n - 1 > n^2 + n - 2 = (n-1)(n+2) \geq 0$.

Réduite au même dénominateur, le rationnel $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est de la forme $\frac{q}{n!}$, q entier, et nous avons donc montré que : $\forall\, n \geq 1, \exists\, q \in \mathbf{N}, \frac{q}{n!} < e < \frac{q+1}{n!}$.

Maintenant, si on suppose e rationnel, de la forme $e = \frac{a}{b} = \frac{a(b-1)!}{b!}$, alors en prenant $n = b$, on obtient $q < a(b-1)! < q + 1$, ce qui est absurde, aucun entier n'étant compris strictement entre deux entiers successifs.

EXEMPLE 5 :

❑ On peut montrer que $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ (voir la partie *Exercices* de ce chapitre) et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Le calcul de ces deux séries constitua un défi au début du XVIIIème et leur somme fut pour la première fois établie par Euler. L'expression remarquable du résultat n'a d'égal que l'étonnement que l'on peut avoir sur la possibilité de l'établir. Cela laisse faiblement entrevoir la joie qu'a dû éprouver Euler (Voir Annexe II).
Plus généralement, on sait calculer la valeur de la série somme des inverses de n'importe quelle puissance paire (voir les exercices du chapitre L3/FOURIER.DOC), mais on ne connaît aucune formule pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (on sait seulement depuis 1978 qu'il s'agit d'un irrationnel).

EXEMPLE 6 :

❑ Montrons que $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)}$. Il en existe plusieurs démonstrations.

Démonstration 1
On montrera d'abord par récurrence (laissée au lecteur) que, pour tout $n \geq 1$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

On remarque ensuite que $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$ est une somme de Riemann associée à la fonction continue $x \in [0, 1] \to \frac{1}{1+x}$, et donc que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln(2)$$

Ainsi, la suite (S_{2n}) des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge vers ln(2). Il en est de même de la suite (S_{2n+1}) puisque $S_{2n+1} = S_{2n} + o(1)$. Par conséquent, il en est de même de la suite complète (S_n), d'où le résultat annoncé.

Démonstration 2
Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction de classe C^n.

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + \ldots + (b-a)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \int_a^b (b-t)^{n-1} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\, dt$$

Prenons $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$, $b = 1$. On a $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et, par récurrence $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$. La formule donne donc :

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \int_0^1 (1-t)^{n-1} (-1)^{n-1} \frac{1}{(1+t)^n} \, dt$$

et l'intégrale est majorée en valeur absolue par $\int_0^1 (1-t)^{n-1} \, dt = \frac{1}{n}$ qui tend vers 0. Donc, en passant à la limite : $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Démonstration 3

On peut encore procéder comme suit. Soit $I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, dt$. On a $I_0 = \ln(2)$ et on peut écrire I_n sous la forme :

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}(1+t) - t^{n-1}}{1+t} \, dt = (-1)^n \int_0^1 t^{n-1} \, dt + I_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n} + I_{n-1}$$

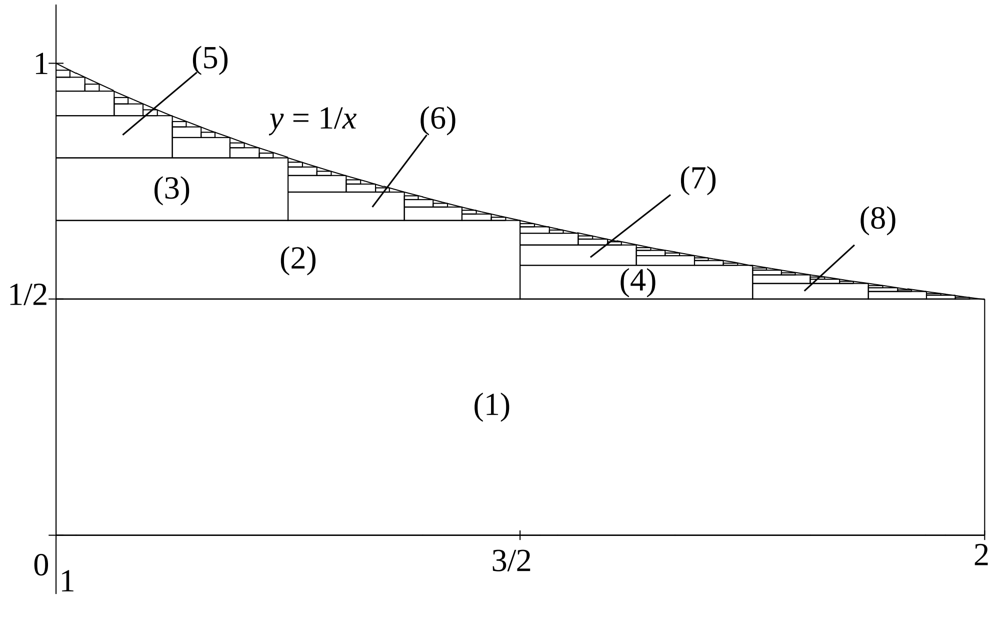
$$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \dots - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + I_0 = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

En outre, on a $0 \leq |I_n| \leq \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0, donc, en passant à la limite, on obtient :

$$0 = \ln(2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Démonstration 4

Mark Finkelstein, dans son ouvrage *Proofs without words*, Roger B. Nelsen, MAA, (1993) donne une preuve sans mot de la formule $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$:



Le lecteur est invité à comprendre en quoi cette figure prouve la formule. Afin de l'aider, nous l'invitons à vérifier que :

$$(1) = (2-1)\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$(2) = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2})\frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$(3) = (\frac{4}{5} - \frac{2}{3})\frac{1}{4} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \qquad (4) = (\frac{4}{7} - \frac{1}{2})\frac{1}{4} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$$

$$(5) = (\frac{8}{9} - \frac{4}{5})\frac{1}{8} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \qquad (6) = (\frac{8}{11} - \frac{2}{3})\frac{1}{8} = \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \text{ etc...}$$

D'une manière générale, à la p-ème étape, on insère les abscisses $\frac{2^p+1}{2^p}, \frac{2^p+3}{2^p}, ..., \frac{2^p+2^p-1}{2^p}$ entre les abscisses 1, $\frac{2^p+2}{2^p}, \frac{2^p+4}{2^p}, ..., \frac{2^p+2^p-2}{2^p}$, 2, donc la longueur de la base de chaque nouveau rectangle est $\frac{1}{2^p}$ et sa hauteur vaut, pour $2k-1 = 1, 3, ..., 2^p - 1$: $\frac{2^p}{2^p+2k-1} - \frac{2^p}{2^p+2k}$ ce qui donne pour aire $\frac{1}{2^p+2k-1} - \frac{1}{2^p+2k}$. Les coordonnées des sommets du rectangle correspondant sont :

$$(\frac{2^p+2k-2}{2^p}, \frac{2^p}{2^p+2k-1}) \qquad (\frac{2^p+2k-1}{2^p}, \frac{2^p}{2^p+2k-1})$$

$$(\frac{2^p+2k-2}{2^p}, \frac{2^p}{2^p+2k}) \qquad (\frac{2^p+2k-1}{2^p}, \frac{2^p}{2^p+2k})$$

A titre de curiosité, où est l'erreur dans le raisonnement suivant ? Nous savons maintenant que :

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + ...$$

On permute les termes de façon à ce que, pour n impair, le terme $-\frac{1}{2n}$ soit placé derrière le terme $\frac{1}{n}$, et pour n pair, le terme $-\frac{1}{2n}$ soit placé devant le terme $\frac{1}{n+1}$. On obtient alors :

$$\ln(2) = \underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}} ... - \frac{1}{4k} + \underbrace{\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}} + ...$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} ... - \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k+2} + ...$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} ... - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + ...)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) \quad ???$$

Cette question devrait s'éclaircir dans la suite de ce chapitre.

3- Séries à termes positifs

PROPOSITION

On suppose que, pour tout n, $u_n \geq 0$ *et* $v_n \geq 0$.

i) *La série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si ses sommes partielles* S_n *sont majorées. Dans ce cas,* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \operatorname{Sup} S_n$.

ii) *Si, pour tout n,* $u_n \leq v_n$*, ou plus généralement, si* $u_n = O(v_n)$ *et si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge. Si pour tout n,* $u_n \geq v_n$ *et si* $\sum v_n$ *diverge, alors* $\sum u_n$ *diverge*

iii) *Si* $u_n \sim v_n$ *au voisinage de* $+\infty$*, alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature (simultanément convergentes ou divergentes).*

Démonstration :

❑ i) : La suite des sommes partielles $S_n = u_0 + ... + u_n$ est une suite croissante. En effet :

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

Cette suite converge si et seulement si elle est majorée et alors, elle converge vers sa borne supérieure.

❑ ii) : On suppose qu'il existe N et M tel que, pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq Mv_n$. Supposons que la série $\sum v_n$ converge. On a alors :

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \leq M \sum_{k=N}^{n} v_k \leq M \sum_{k=N}^{\infty} v_k = M \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k - \sum_{k=0}^{N-1} v_k\right)$$

car la série $\sum v_n$ converge en croissant vers sa limite. Les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ sont également donc majorées et on applique le i).

Le plus souvent, on cherche directement une majoration $u_n \leq v_n$. Pour qu'une série à termes positifs converge, il suffit de la majorer par une série convergente. En prenant la contraposée, pour qu'une série à termes positifs diverge, il suffit de la minorer par une série à termes positifs divergente.

❑ iii) : Au voisinage de l'infini, on a : $\dfrac{v_n}{2} \leq u_n \leq \dfrac{3v_n}{2}$, donc : $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$ d'où l'équivalence.

EXEMPLES :

❑ Soit la série $\sum \dfrac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + 5n - 6}$. Cette série est une série divergente, car son terme général est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ qui est positif, et terme général de la série harmonique divergente.

❑ Considérons la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, dite **série de Riemann**. Nous disposons du résultat suivant :

Les séries $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *convergent si et seulement si* $\alpha > 1$.

Si $\alpha \leq 1$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \geq \dfrac{1}{n}$, et comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Si $\alpha > 1$, alors on remarque que :

$$\frac{1}{1^\alpha} = 1$$

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \leq \frac{2}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$$\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \leq \frac{4}{4^\alpha} = \frac{1}{4^{\alpha-1}}$$

...

$$\frac{1}{(2^p)^\alpha} + \frac{1}{(2^p+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^p+2^p-1)^\alpha} \leq \frac{2^p}{(2^p)^\alpha} = \frac{1}{(2^p)^{\alpha-1}}$$

En majorant la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ par une somme partielle comprenant un nombre de termes supérieur à N de la forme $2^{p+1} - 1$ et en utilisant les inégalités précédentes, on a :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}} = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$ série géométrique de terme général $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ qui converge vers $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$. Les sommes partielles de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ étant majorées, la série converge.

La démonstration ci-dessus est celle donnée par Cauchy dans son *Cours d'analyse* (1821), partie I, ch. VI, p.135-137. On notera que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge exactement quand $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge. Une autre démonstration, donnée dans le paragraphe *comparaison série-intégrale*, explique cette coïncidence.

❑ Soit la série $\sum \frac{n^2+3n+1}{n^4+5n-6}$. Cette série est une série convergente, car son terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est positif, et terme général d'une série de Riemann convergente d'après l'exemple précédent.

❑ La même démonstration s'applique à la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, dont le terme général est lui aussi équivalent à $\frac{1}{n^2}$. De plus, la somme se calcule facilement en remarquant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. On a alors, pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

tous les termes intermédiaires se simplifiant deux à deux. On parle de série **télescopique**. On aurait pu écrire aussi :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$ en effectuant un changement d'indice $n + 1 \to n$

$$= 1 - \frac{1}{N+1}$$ en éliminant les termes communs aux deux sommes.

On en déduit, en faisant tendre N vers $+\infty$, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Plus généralement, on montre, dans la partie *Exercices*, que :

$$\forall\, p \geq 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p!}$$

❑ Voici un autre exemple non trivial série télescopique. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)$. Vérifions que $\arctan\left(\dfrac{1}{n^2 + 3n + 3}\right) = \arctan(n + 2) - \arctan(n + 1)$. Les deux membres sont éléments de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$, celui de gauche car $\dfrac{1}{n^2 + 3n + 3} \in [0, +\infty[$, celui de droite car :

$$0 \leq \arctan(n + 2) - \arctan(n + 1) \leq \arctan(n + 2) < \frac{\pi}{2}$$

Pour monter qu'ils sont égaux, il suffit de comparer leur tangente. Or :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)\right) = \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

$$\tan(\arctan(n + 2) - \arctan(n + 1)) = \frac{(n + 2) - (n + 1)}{1 + (n + 2)(n + 1)} = \frac{1}{n^2 + 3n + 3}$$

On a donc bien le résultat annoncé. On en déduit que, pour tout N :

$$\sum_{n=0}^{N} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right) = \sum_{n=0}^{N} (\arctan(n + 2) - \arctan(n + 1))$$ série télescopique

$$= \arctan(N + 2) - \arctan(1)$$

En passant à la limite quand N tend vers l'infini, on conclut que $\sum \arctan\left(\dfrac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Il faut prendre garde que les séries sont des ***limites*** et non des ***sommes*** finies, sous peine de connaître des déboires cuisants. Donnons de suite un exemple frappant. En 1655, Wallis donne la formule suivante (dont une démonstration est donnée plus bas dans le paragraphe *Produits infinis*) :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}$$

Il s'agit d'un produit infini mais on se ramène à des séries en prenant le logarithme. Livrons-nous à quelques calculs élémentaires... et paradoxaux. Prenons le logarithme du membre de droite :

$$\ln\left(\frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \times ...\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \ln\left(\frac{5}{6}\right) + \ln\left(\frac{7}{6}\right) + \ln\left(\frac{7}{8}\right) + ...$$

somme de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right)$. Son terme général peut s'écrire :

$$\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{(développement limité de ln)}$$

$$= -\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{4n^2} \text{ terme de signe constant}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right)$, ce qui prouve que le membre de droite est défini.

Remarquons maintenant que, 1 étant neutre pour le produit, on devrait aussi bien avoir :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..} \text{ que } \frac{2}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10...} \text{ ou } \frac{2}{\pi} = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9....}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}$$

Mais la formule $\frac{2}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10...}$ est constitué de produits $\frac{3^2}{2^2}$, $\frac{5^2}{4^2}$, $\frac{7^2}{6^2}$, ... tous plus grands que 1, donc le produit augmente et est supérieur à 1, et ne saurait converger vers $\frac{2}{\pi}$, qui est strictement inférieur à 1. D'ailleurs, en prenant les logarithmes, on obtient pour le terme général positif de la série :

$$\ln\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2} = 2\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = 2\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et que les séries sont à termes positifs, la série $\sum \ln\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2}$ diverge également. Ainsi, le fait même de supprimer le facteur 1 pourtant sans intérêt dans un produit (ou de supprimer de la somme ln(1) qui est nul) rend la formule divergente. En fait, il y a eu un réordonnement des termes entre :

$$\ln\left(\frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}\right) = (\ln(1) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(2)) + (\ln(3) - \ln(4) + \ln(5) - \ln(4)) + ...$$

et

$$\ln\left(\frac{3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10...}\right) = (\ln(3) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(2)) + (\ln(5) - \ln(4) + \ln(5) - \ln(4)) + ...$$

Si au contraire, on rajoute 1 pour obtenir la formule $\frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9....}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}$, alors les facteurs sont $\frac{1}{2^2}$, $\frac{3^2}{4^2}$, $\frac{5^2}{6^2}$, ... tous inférieurs à 1, donc le produit sera inférieur au premier facteur $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ alors que $\frac{2}{\pi}$ est strictement supérieur à cette valeur. Aburdité également. En prenant les logarithmes, le terme général devient $\ln\left(\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\right) = -2\ln\frac{2n}{2n-1} = -2\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) \sim -\frac{1}{n}$ là aussi terme général d'une série divergente. Les termes étant négatifs, les sommes partielles de la série divergente de terme général $\ln\left(\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\right)$ tendent vers $-\infty$, ce qui signifie que le produit infini $\frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9....}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}$ est nul (au sens où la limite des produits partiels est nulle), sans qu'aucun facteur ne le soit !!

4- Comparaison série-intégrale

L'analogie entre série et intégrale impropre apparaît de manière encore plus apparente dans le théorème suivant :

THEOREME :

Soit f une fonction positive décroissante sur $[0, +\infty[$, *continue par morceaux sur tout intervalle* $[0, x]$. *Alors* :

(i) *La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale* $\int_0^\infty f(t)\,dt$ *converge.*

(ii) *La suite de terme général* $f(0) + ... + f(n) - \int_0^n f(t)\,dt$ *converge.*

Démonstration :

❑ (i) : f étant décroissante, pour tout n, on a :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq f(n-1)$$

Supposons que $\int_0^\infty f$ converge. On a alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(0) + \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = f(0) + \int_0^n f(t)\,dt \leq f(0) + \int_0^\infty f(t)\,dt$$

donc la série converge, car les sommes partielles (S_n) forment une suite croissante ($f \geq 0$) majorée.

Réciproquement, si la série converge, on peut majorer les intégrales partielles. Si x est un réel de partie entière n, on a :

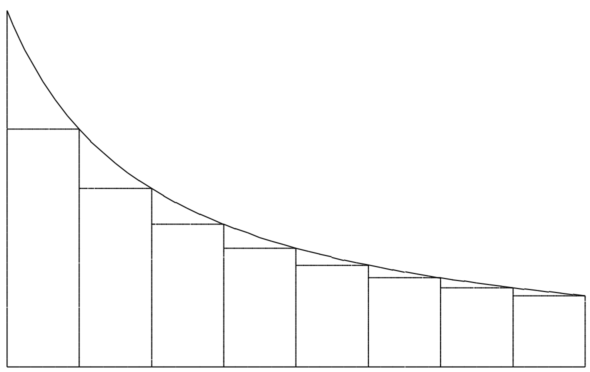
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n+1}\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n+1} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

Comme l'intégrale partielle est une fonction F croissante de x et majorée, elle converge.

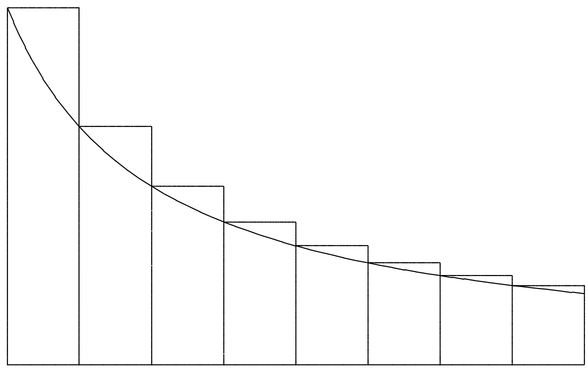
En passant à la limite dans les inégalités ci-dessus, on a l'encadrement :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \leq f(0) + \int_0^\infty f(t)\,dt$$

Ci-dessous les graphiques permettent d'illustrer la démonstration. On considère les termes $f(n)$ comme les valeurs de fonctions en escalier :



$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$



$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

❑ (ii) : Posons $u_n = f(0) + f(1) + ... + f(n) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Cherchons le sens de variation de la suite (u_n).

En utilisant la décroissance de f, on a :

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$$

donc la suite (u_n) décroît. Montrons qu'elle est minorée :

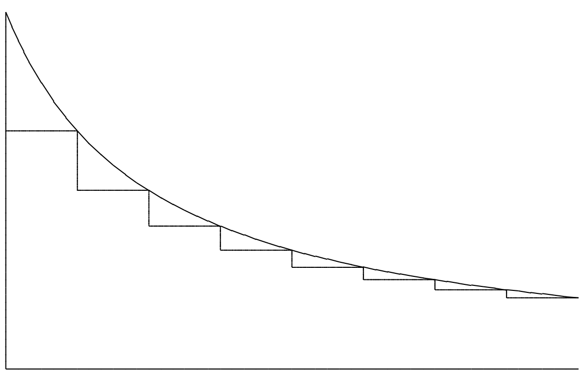
$$u_n = f(0) + f(1) + ... + f(n) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

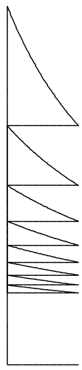
Etant décroissante minorée, la suite (u_n) converge.

On peut interpréter graphiquement la suite (u_n). Les quantités $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k+1)$ sont les aires des triangles curvilignes apparaissant dans la figure ci-dessous à gauche, au dessus des rectangles. Si on les déplace dans la même colonne $[0, 1] \times [0, f(0)]$, $0 \leq k \leq n-1$, leur somme partielle vaut :

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(0) - u_n$$

représentée dans la figure ci-dessous à droite. u_n est donc ce qui reste de cette colonne lorsque l'on enlève les triangles curvilignes. (u_n) décroît, mais reste positive. Les triangles curvilignes, quant à eux, forment une série $\sum \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k+1)$ qui est convergente. Ce résultat s'applique même si, séparément, $\sum f(n)$ et $\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ divergent.





EXEMPLES :

❑ On retrouve le critère de convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, par comparaison avec $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$. Les deux convergent si et seulement si $\alpha > 1$.

❑ Pour $\alpha = 1$, on retrouve le fait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge car elle est de même nature que l'intégrale de $\int_1^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. L'application du (ii) sur l'intervalle $[1, +\infty[$ permet de conclure que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$ converge. Si on note γ sa limite (appelée **constante d'Euler**), on peut alors écrire :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

et en particulier :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln(n) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

Une valeur approchée de la constante est 0.57721566... Le fait que $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$ montre que la série harmonique diverge extrêmement lentement. Le plus petit n tel que $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > 100$ est de l'ordre de $e^{100-\gamma}$, soit 1.5 10^{43}. En 1968, John Wrench a montré que ce nombre valait exactement 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497. Si le calcul de chaque terme de la somme partielle prenait un milliardième de seconde, il faudrait plus de 4×10^{17} milliards d'années pour effectuer le calcul de la somme partielle[1].

❑ La constante d'Euler permet de trouver des sommes de séries. Considérons par exemple la somme de la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, et sa somme partielle S_{2n} :

[1] Julian Havil, *Gamma*, Princeton University Press (2003), p.23.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}}_{I_n} - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{P_n}$$

or $\quad P_n + I_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2n) + \gamma + o(1)$

et $\quad P_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}(\ln(n) + \gamma + o(1))$

donc $\quad I_n = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$

donc $\quad S_{2n} = I_n - P_n = \ln(2) + o(1)$

de sorte que la limite de la suite (S_{2n}) est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$, résultat déjà prouvé plus haut par des moyens plus élémentaires.

❑ On peut également procéder à des encadrements en cas de fonction croissante. Considérons par exemple $\ln(n!)$. On a :

$$\int_{n-1}^{n} \ln(t)\,dt \leq \ln(n) \leq \int_{n}^{n+1} \ln(t)\,dt$$

$\Rightarrow \quad n\ln(n) - 1 - (n-1)\ln(n-1) \leq \ln(n) \leq (n+1)\ln(n+1) - 1 - n\ln(n)$

On somme ensuite les inégalités, de 2 à n pour l'inégalité de gauche, et de 1 à n pour celle de droite :

$\Rightarrow \quad n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$

$\Rightarrow \quad n^n e^{-n} \times e \leq n! \leq (n+1)^{n+1} e^{-n}$

Comme $(n+1)^{n+1} = \exp((n+1)\ln(n+1)) = \exp(\,(n+1)\ln(n) + (n+1)\ln(1 + \frac{1}{n})\,)$

$$= \exp(\,(n+1)\ln(n) + (n+1)(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))\,)$$

$$= \exp(\,(n+1)\ln(n) + 1 + o(1)\,)$$

$$\sim n^{n+1}\, e$$

on en déduit que $\frac{n!}{n^n e^{-n}}$ est compris entre e et $en \times$ qqc qui tend vers 1. Par des méthodes un peu plus compliquées, on peut montrer que $\frac{n!}{n^n e^{-n}} \sim \sqrt{2\pi n}$, ou encore que $\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$ (**Formule de Stirling**), ou enfin que (par ordre décroissant d'importance) :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$$

Pour une démonstration, consulter les exercices du chapitre L2/SUITESF.PDF.

❑ $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge. En effet, la comparaison série-intégrale nous ramène à l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ qui diverge, puisqu'une primitive de $\frac{1}{x\ln(x)}$ est $\ln(\ln(x))$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Le terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ se glisse entre $\frac{1}{n}$, terme général de série divergente, et les $\frac{1}{n^\alpha}$, termes généraux de séries convergentes pour $\alpha > 1$.

5- Convergence absolue

Dans ce paragraphe, u_n est réel de signe quelconque, ou même est complexe. On dispose d'un critère comparable à celui des intégrales d'une fonction de signe quelconque ou à valeurs complexes.

DEFINITION-PROPOSITION

Une série $(\sum u_n)$ est dite **absolument convergente** *si $(\sum |u_n|)$ converge.*

Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration :

❑ Si u_n est réel, on pose :

$$u_n^+ = u_n \text{ si } u_n \geq 0$$
$$= 0 \text{ sinon}$$
$$u_n^- = -u_n \text{ si } u_n \leq 0$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

On a alors :

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^-$$
$$u_n = u_n^+ - u_n^-$$

Les séries $(\sum u_n^+)$ et $(\sum u_n^-)$ sont des séries à termes positifs ou nuls, dont le terme général est majorée par $|u_n|$. Elles sont donc convergentes. Il en est de même de la série $(\sum u_n)$, différence de ces deux séries. On a par ailleurs, en majorant la valeur absolue des sommes partielles et en passant à la limite :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

❑ Si u_n est à coefficients complexes, on écrit $u_n = x_n + iy_n$, avec x_n et y_n réels, et comme $|x_n|$ et $|y_n|$ sont positifs, inférieurs ou égaux à $|u_n|$ et que $\sum |u_n|$ converge, on aura $\sum |x_n|$ et $\sum |y_n|$ convergentes d'après la proposition sur les séries à termes positifs, donc $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergentes d'après le cas des séries absolument convergentes à termes réels traité ci-dessus, donc $\sum u_n$ convergente par combinaison linéaire.

EXEMPLE :

❑ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est absolument convergente, puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. On peut même en calculer la somme si on admet la valeur donnée plus haut de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On a en effet (au besoin en considérant les sommes partielles avant de prendre leurs limites) :

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi, afin de voir si une série est convergente, on regarde si elle est absolument convergente, se ramenant ainsi à des séries à termes positifs. On peut alors appliquer les méthodes d'équivalents, de majorations, de minorations, de comparaison avec les séries de Riemann. Malheureusement, il existe des séries qui sont convergentes sans être absolument convergentes. Pour ces séries, on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^- = +\infty$, mais la série des différences converge. C'est le cas de $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Comme pour les fonctions, l'absolue convergence est donc une ***condition suffisante*** de convergence. La détermination de la convergence d'une série qui n'est pas absolument convergente peut se révéler ardu.

Les séries absolument convergentes forment un espace vectoriel. En effet, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, il en est de même de la somme, puisque :

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$$

et la série $\sum |u_n + v_n|$ converge, son terme général étant majorée par le terme général de la série convergente $\sum |u_n| + |v_n|$. La vérification pour le produit par un scalaire est facile.

6- Règle de D'Alembert

Voici un critère de convergence, particulièrement adapté pour les séries dont les termes utilisent des puissances ou des factorielles.

PROPOSITION

Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls. Alors :

(i) *Si* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$, *la série est absolument convergente.*

(ii) *Si* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l > 1$, *la série est diverge.*

Dans tous les autres cas, on ne sait pas conclure. On notera que les cas où l'on ne sait pas conclure sont fréquents, puisqu'il y figure toutes les séries de Riemann, convergentes ou divergentes. Il conveint donc de ne pas se précipiter sur ce critère mais de privilégier d'abord les critéres de convergence par majoration et de divergence par minoration.

Démonstration :

❑ (i) : Soit q compris entre l et 1. Puisque $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$, il existe N tel que, pour $n \geq N$, on ait

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq q$, donc, par récurrence, $|u_n| \leq |u_N|\, q^{n-N}$ et $|u_n| = O(q^n)$. Le terme général de la série $\sum |u_n|$ se trouve majoré par le terme général d'une série géométrique de raison q inférieure à 1, qui est convergente. La série $\sum |u_n|$ est donc elle-même convergente.

❑ (ii) : Soit q compris entre 1 et l. Puisque $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$, il existe N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq q$, et donc ici, on a $|u_n| \geq |u_N|\, q^{n-N}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, il en est de même de $|u_n|$ et la série diverge grossièrement.

EXEMPLE :

❑ Reprenons la série de l'exponentielle, mais appliquée aux complexes. $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Alors :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \text{ qui, pour tout } z\text{, tend vers } 0.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est donc absolument convergente pour tout z. On appelle **exponentielle complexe** la somme de cette série.

7- Série produit

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On appelle **série produit** (ou **produit de Cauchy**) la série $\sum w_n$ de terme général :

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_kv_{n-k} + \ldots + u_nv_0 = \sum_{k=0}^{n} u_kv_{n-k}$$

PROPOSITION :

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, il en est de même de la série $\sum w_n$ et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

Démonstration :

❑ Si les séries sont à termes positifs, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} w_n \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \times \sum_{n=0}^{N} v_n$$

En effet, $\sum\limits_{n=0}^{N} w_n$ est la somme des $u_i v_j$, où (i,j) parcourt le triangle T_N défini par :

$T_N = \{(i, j), 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N, i + j \leq N\}$

alors que $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{N} v_n$ est la somme des $u_i v_j$, (i, j) parcourant le carré $C_N = [0, N] \times [0, N]$. Comme $T_N \subset C_N$ et qu'on somme des termes positifs ou nuls, le second membre est bien supérieur ou égal au premier. Par ailleurs, tous les termes des séries étant positifs ou nuls, les sommes partielles sont croissantes, donc $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{N} v_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$. La suite des sommes partielles $(\sum\limits_{n=0}^{N} w_n)$ est donc croissante et majorée par $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, donc converge.

On obtient l'égalité demandée en remarquant que, pour tout N :

$$\sum_{n=0}^{N} w_n \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \times \sum_{n=0}^{N} v_n \leq \sum_{n=0}^{2N} w_n$$

Pour la deuxième inégalité, remarquer que le carré C_N est inclus dans le triangle T_{2N} suivant :

$$T_{2N} = \{(i, j), 0 \leq i \leq 2N, 0 \leq j \leq 2N, i + j \leq 2N\}$$

qui est parcouru par les indices des produits $u_i v_j$ de la somme $\sum\limits_{n=0}^{2N} w_n$. Il suffit ensuite de passer à la limite.

❑ Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors, d'après le cas précédent, la série produit $\sum z_n$ des deux séries à termes positifs $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ converge, avec $z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}|$.

Comme $|w_n| = \left| \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|\,|v_{n-k}| = z_n$ et que $\sum z_n$ converge, la série $\sum w_n$ est absolument convergente. Il reste à montrer que sa somme est le produit des sommes des deux séries. On a en effet :

$$\left| \sum_{n=0}^{N} u_n \times \sum_{n=0}^{N} v_n - \sum_{n=0}^{N} w_n \right| = \left| \sum_{(p,q) \in E} u_p v_q \right|$$

où $E = \{(p,q) \mid p+q > N, p \leq N, q \leq N\} = C_N \setminus T_N$. Le membre de droite est majoré par :

$$\sum_{(p,q) \in E} |u_p v_q| = \sum_{n=0}^{N} |u_n| \times \sum_{n=0}^{N} |v_n| - \sum_{n=0}^{N} z_n$$

et cette dernière expression tend vers 0 quand N tend vers l'infini en vertu du résultat précédent sur les séries produit à termes positifs.

Les résultats suivants sont donnés à titre purement indicatif (et on ne doit pas chercher à les retenir ou les utiliser) pour montrer que la situation est moins triviale qu'il ne paraît[2] :

- Il suffit que l'une des séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ soit absolument convergente et l'autre convergente pour que la série produit $\sum w_n$ soit bien égale au produit des deux séries.
- Si les deux séries sont convergentes, mais qu'aucune n'est absolument convergente, il se peut que $\sum w_n$ diverge. Prenons par exemple $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ dont nous montrerons dans le paragraphe suivant la convergence, pour $n \geq 1$. La série-produit a pour terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{p(n-p)}}$. Or $p(n-p)$ est majoré par $\dfrac{n^2}{4}$, donc sa racine est majorée par $\dfrac{n}{2}$. On a donc $|w_n|$ qui est minoré par $\dfrac{2(n-1)}{n}$ et qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la série produit diverge grossièrement.
- Si $\sum u_n$ converge, on peut montrer qu'il existe une série $\sum v_n$ convergente telle que $\sum w_n$ diverge.
- Si les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, la série produit $\sum w_n$ est bien égale au produit des deux séries.
- Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $u_n = O(\dfrac{1}{n})$ et $v_n = O(\dfrac{1}{n})$, alors la série produit $\sum w_n$ est bien égale au produit des deux séries.

8- Séries alternées

On dit que la série $\sum u_n$ est alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant. Le résultat suivant est dû à Leibniz en 1714[3].

PROPOSITION (CRITERE DE LEIBNIZ)

Soit $\sum u_n = \sum (-1)^n v_n$ une série alternée dont le terme général v_n est ***positif***, ***décroît*** *et* ***tend vers 0***. *Alors la série converge. En outre, le reste R_n est majoré en valeur absolue par $|u_{n+1}|$ et est du signe de u_{n+1}.*

<u>Démonstration 1</u> :

❑ On a, en notant $S_n = u_0 + ... + u_n$ les sommes partielles de la série :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0$$
$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n+1} + u_{2n} = -v_{2n+1} + v_{2n} \geq 0$$

Donc la suite (S_{2n}) est décroissante. La suite (S_{2n+1}) est croissante, et $S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1}$ tend vers 0. Les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes (voir L1/SUITES.PDF) et possèdent une limite

---

[2] Plusieurs des résultats énoncés se trouvent dans G. H. Hardy, *Divergent series*, Clarendon Press (1948), rééd. Gabay (1992), ch. X.

[3] "Si tu y prêtes attention, tu remarqueras aisément que lorsque les terme d'une série sont continûment décroissants et alternativement positifs et négatifs, la valeur qu'elle exprime converge et est par conséquent finie". Lettre du 10 janvier 1714 à Jean Bernoulli, *Leibnizens mathematische Schriften*, t. III, p.926.

commune S, ce qui entraîne que la suite complète (S_n) converge vers S. On a également, pour tout n :

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

Donc $u_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$ et comme $S - S_{2n} = R_{2n}$, on a bien $u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$
De même, $u_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} \geq S - S_{2n-1} \geq 0$, et comme $S - S_{2n-1} = R_{2n-1}$, on a bien $u_{2n} \geq R_{2n-1} \geq 0$

Démonstration 2 :
❑ On montre que la suite des sommes partielles $S_n = u_0 + ... + u_n$ est une suite de Cauchy (voir L1/SUITES.PDF). Considérons donc $S_p - S_n$, avec $p \geq n$:

$$\begin{aligned} S_p - S_n &= (-1)^{n+1}v_{n+1} + (-1)^{n+2}v_{n+2} + ... + (-1)^p v_p \\ &= (-1)^{n+1}(v_{n+1} - v_{n+2} + ... + (-1)^{p-n+1}v_p) \end{aligned}$$

donc, puisque la suite (v_n) décroît et est positive, si $p - n$ est pair :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_{n+2} + ... + (-1)^{p-n+1}v_p &= (v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ ... + (v_{p-1} - v_p) \geq 0 \\ &= v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - ... - (v_{p-2} - v_{p-1}) - v_p \leq v_{n+1} \end{aligned}$$

et si $p - n$ est impair :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_{n+2} + ... + (-1)^{p-n+1}v_p &= (v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+3} - v_{n+4}) + \ ... + (v_{p-2} - v_{p-1}) + v_p \geq 0 \\ &= v_{n+1} - (v_{n+2} - v_{n+3}) - (v_{n+4} - v_{n+5}) - ... - (v_{p-1} - v_p) \leq v_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas :

$$0 \leq v_{n+1} - v_{n+2} + ... + (-1)^{p-n+1}v_p \leq v_{n+1}$$

donc :

$$\left| S_p - S_n \right| \leq v_{n+1}$$

Pour ε strictement positif donné, il existe N tel que, pour $n > N$, on a $0 \leq v_{n+1} < \varepsilon$ et donc, pour tout $p \geq n > N$, $\left| S_p - S_n \right| < \varepsilon$.
La suite des sommes partielles est bien de Cauchy, donc elle converge.
On a montré en outre que $(-1)^{n+1}(S_p - S_n) \geq 0$. En faisant tendre p vers l'infini dans cette inégalité ainsi que dans $\left| S_p - S_n \right| \leq v_{n+1}$, on constate que le reste de la série R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ (i.e. celui de u_{n+1}) et majoré en valeur absolue par $v_{n+1} = \left| u_{n+1} \right|$.

EXEMPLES :
❑ Il résulte de cette proposition que, pour tout α strictement positif, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. C'est le cas en particulier de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ déjà rencontré, et de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

❑ L'une des démonstrations de la formule $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ utilisait l'intégrale $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.
Adaptons la même démonstration au cas de l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt &= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n-2}(1+t^2) - t^{2n-2}}{1+t^2}\, dt \\ &= (-1)^n \int_0^1 t^{2n-2}\, dt + I_{n-1} = \frac{(-1)^n}{2n-1} + I_{n-1} \end{aligned}$$

avec $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \qquad I_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-3} + \dots + \frac{1}{3} - 1 + I_0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$

En outre, on a $0 \leq |I_n| \leq \int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1}$ qui tend vers 0, donc, en passant à la limite, on obtient :

$$0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \text{ ou encore } \boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}} \text{ après changement d'indice.}$$

❑ Plus généralement, la même méthode permet de montrer que, pour tout α strictement positif :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$$

Il suffit de prendre $I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{\alpha n}}{1+t^\alpha}\,dt$. On aura $I_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n - \alpha + 1} + I_{n-1}$, etc.

❑ Les théorèmes précédents ne prévoient que deux situations où l'on sait conclure sur la convergence de séries à termes quelconques : les séries absolument convergentes, et les séries alternées vérifiant les hypothèses du critère de Leibniz. Il est cependant possible de conclure dans d'autres cas, mais c'est plus difficile. Nous nous bornerons à un exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$, pour x différent de 0 modulo 2π. Ecrivons $\frac{e^{inx}}{n}$ sous la forme $a_n B_n$ avec $a_n = e^{inx}$ et $B_n = \frac{1}{n}$. Nous allons procéder à une sommation par parties, méthode dite d'**Abel**, analogue à une intégration par parties. On pose :

$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n B_n$ somme partielle de la série $\sum \frac{e^{inx}}{n}$

$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ de sorte que $a_n = A_{n+1} - A_n$

$b_n = B_{n+1} - B_n$

On a alors :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n B_n = \sum_{n=1}^{N} (A_{n+1} - A_n) B_n = \sum_{n=1}^{N} A_{n+1} B_n - \sum_{n=1}^{N} A_n B_n = \sum_{n=2}^{N+1} A_n B_{n-1} - \sum_{n=1}^{N} A_n B_n$$

$$= A_{N+1} B_N - A_1 B_1 + \sum_{n=2}^{N} A_n (B_{n-1} - B_n)$$

$$= A_{N+1} B_N - A_1 B_1 - \sum_{n=2}^{N} A_n b_{n-1}$$

On va utiliser le fait que la suite (A_n) est bornée, et que la suite (B_n) est positive décroissante de limite nulle pour conclure. La suite (A_n) est bornée car :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} e^{ikx} = e^{ix}\,\frac{1 - e^{i(n-1)x}}{1 - e^{ix}}$$

donc $\quad \forall\, n, \left|A_n\right| \leq \dfrac{2}{\left|1 - e^{ix}\right|}$. Posons $M = \dfrac{2}{\left|1 - e^{ix}\right|}$

Par ailleurs, (B_n) convergeant vers 0, $\lim\limits_{N\to\infty} A_{N+1}B_N = 0$. Quant à la série $\sum A_n b_{n-1}$, elle est absolument convergente. En effet :

$$\sum_{n=2}^{N} \left|A_n b_{n-1}\right| \leq M \sum_{n=2}^{N} \left|b_{n-1}\right| = -M \sum_{n=2}^{N} b_{n-1} \qquad \text{car } b_{n-1} \leq 0 \text{, la suite } (B_n) \text{ étant décroissante}$$

$$\leq -M(B_N - B_1) \qquad \text{la somme } \sum_{n=2}^{N} b_{n-1} \text{ étant télescopique}$$

$$\leq MB_1 \qquad \text{car } B_N \geq 0$$

La suite des sommes partielles $\sum\limits_{n=2}^{N} \left|A_n b_{n-1}\right|$ étant croissante et majorée, elle converge. On a donc montré que $\sum \left|A_n b_{n-1}\right|$ converge. Il en résulte que $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ existe. Donc $\sum \dfrac{e^{inx}}{n}$ converge.

En séparant partie réelle et imaginaire, on en déduit également que, pour $x \neq 0 \bmod 2\pi$, les séries $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ et $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$ convergent.

❑ La majoration du reste donnée dans le théorème permet de donner des valeurs approchées de somme de séries. Reprenons le cas de $\ln(2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ et approximons $\ln(2)$ par une somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$. Quelle valeur donner à n pour être certain que $\left|\ln(2) - S_n\right| \leq \dfrac{1}{1000}$? Comme $\ln(2) - S_n = R_n$ et que, ici, $\left|R_n\right| \leq \dfrac{1}{n+2}$, il suffit de prendre n tel que $\dfrac{1}{n+2} \leq \dfrac{1}{1000}$, soit $n \geq 998$. Comme $R_{998} \leq 0$ (signe de $\dfrac{(-1)^{999}}{1000}$), on a :

$$S_{998} - \frac{1}{1000} \leq \ln(2) \leq S_{998}$$

donc une valeur approchée de $\ln(2)$ est $S_{998} - \dfrac{1}{2000}$, milieu de l'intervalle d'encadrement, avec une erreur inférieure à $\dfrac{1}{2000}$. Numériquement, une calculatrice ou un ordinateur donne :

$$\ln(2) \approx 0{,}6931471806$$

$$S_{998} - \frac{1}{2000} \approx 0.6931474305$$

III : Familles sommables

La notion de famille sommable est utile dans certains passages du chapitre L2/PROBA2.PDF.

1- Exemple des séries doubles

Considérons une famille de complexes a_{ij}, $i \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{N}$. On s'intéresse aux deux façons suivantes de calculer la somme des a_{ij} : $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$. Il peut arriver que chacune que ces deux sommes soient définies, mais donnent des résultats différents.

EXEMPLE :

❑ Pour chaque $i \geq 0$, soit $a_{ii} = 1$, $a_{i,i+1} = -1$, tous les autres a_{ij}, $j \neq i$ et $j \neq i + 1$, étant nuls.

On a donc, pour tout i, $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$, et donc $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$.

Par contre on a :

$a_{00} = 1$ et $a_{i0} = 0$ si $i > 0$.

et pour chaque $j > 0$:

$a_{j-1,j} = -1$, $a_{jj} = 1$, les autres a_{ij} étant nuls

donc $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i0} = 1$ et, pour $j > 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = 0$

donc $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = 1$

On constate que $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \neq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$.

On peut représenter les a_{ij} dans un tableau, i étant l'indice de ligne et j l'indice de colonne. Pour tout i, $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ représente la somme de la ligne i et $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ la somme des sommes des lignes. Pour tout j, $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ représente la somme de la colonne j et $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ la somme des sommes de colonnes.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	...	
$i = 0$	1	-1	0	0	...	$\sum_{j=0}^{\infty} a_{0j} = 0$
$i = 1$	0	1	-1	0	...	$\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j} = 0$
$i = 2$	0	0	1	-1	...	$\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} = 0$
$i = 3$	0	0	0	1	...	$\sum_{j=0}^{\infty} a_{3j} = 0$
...	...	...	...	...	...	$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$
	$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i0} = 1$	$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i1} = 0$	$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i2} = 0$	$\sum_{i=0}^{\infty} a_{i3} = 0$	$\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = 0$	

Comme pour la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ qui change de somme si on permute les termes, la série $\sum_{i,j} a_{ij}$ change de somme selon la façon dont on effectue la sommation. Pour éviter ce problème, il convient de rajouter des hypothèses et donner un procédé de sommation qui ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont pris les termes.

2- Cas des familles à termes positifs ou nuls

Soit I un ensemble quelconque (en pratique **dénombrable**, i.e. en bijection avec $\mathbb{N}$, même si cette hypothèse n'est pas utilisée. Pour plus de détails sur les ensembles dénombrables, voir L2/PROBA2.PDF). Soit $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de réels positifs ou nuls. Si J et K sont deux sous-ensembles finis de I tels que $\mathrm{J} \subset \mathrm{K}$, on a $\sum_{i\in \mathrm{J}} a_i \leq \sum_{i\in \mathrm{K}} a_i$ en raison de la positivité des a_i. Plus on prend de termes, plus la somme partielle est grande. Il est donc naturel de poser la définition suivante :

DEFINITION

Soit $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de réels positifs ou nuls. On dit que cette famille est* ***sommable*** *si l'ensemble des sommes* $\sum_{i\in \mathrm{J}} a_i$, J *fini inclus dans* I, *est majoré. On pose alors :*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i = \mathrm{Sup}\ \{\sum_{i\in \mathrm{J}} a_i \mid \mathrm{J} \subset \mathrm{I},\ \mathrm{J}\ \text{fini}\}$$

EXEMPLES :

❑ Cette définition est cohérente avec celle des séries usuelles $\sum a_n$ à termes positifs ou nuls. Les sommes partielles formant une suite croissante, on a en effet :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \text{Sup } \{\sum_{n=0}^{N} a_n \mid N \in \mathbb{N}\} \leq \text{Sup } \{\sum_{i\in J} a_i \mid J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini}\}$$

car l'ensemble $\{\sum_{n=0}^{N} a_n \mid N \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans l'ensemble $\{\sum_{i\in J} a_i \mid J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini}\}$. Mais on a aussi, pour tout J fini :

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

en incluant J dans la partie $[\![0, N]\!]$ avec N égal au plus grand élément de J. Donc :

$$\text{Sup } \{\sum_{i\in J} a_i \mid J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini}\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Finalement, les deux inégalités donnent Sup $\{\sum_{i\in J} a_i \mid J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini}\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

❑ Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs ou nuls, et si $(b_i)_{i\in I}$ est une famille de réels tels que, pour tout i, $0 \leq b_i \leq a_i$, alors $(b_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} b_i \leq \sum_{i\in I} a_i$. En effet, pour toute partie finie J incluse dans I, on a :

$$\sum_{i\in J} b_i \leq \sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

donc les sommes $\sum_{i\in J} b_i$ sont majorées par le nombre $\sum_{i\in I} a_i$. Leur borne supérieure existe donc et vérifie $\sum_{i\in I} b_i \leq \sum_{i\in I} a_i$.

❑ Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs ou nuls, et si J, fini ou non, est inclus dans I, alors $(a_i)_{i\in J}$ est sommable et $\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$. En effet, les sommes finies $\sum_{i\in K} a_i$, $K \subset J$, peuvent être vues comme sommes finies avec $K \subset I$, donc sont majorées par $\sum_{i\in I} a_i$. Leur borne supérieure existe donc et est inférieure ou égale à ce majorant.

❑ Soit $\alpha > 0$. On considère la famille $\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$, m et n étant éléments de $\mathbb{N}^*$. On a ici $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Montrons que, si $\alpha > 1$, la famille est sommable. Soit J fini inclus dans I. Il existe un entier N tel que J soit inclus dans une partie $[\![1, N]\!] \times [\![1, N]\!]$. Pour chaque m de $[\![1, N]\!]$, on a, par comparaison série-intégrale :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \le \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{(m^2+t^2)^\alpha}\,dt = \int_0^N \frac{1}{(m^2+t^2)^\alpha}\,dt$$

$$\le \int_0^\infty \frac{1}{(m^2+t^2)^\alpha}\,dt$$

L'intégrale est convergente car la fonction $t \to \dfrac{1}{(m^2+t^2)^\alpha}$ est positive ou nulle et, au voisinage de l'infini, $\dfrac{1}{(m^2+t^2)^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^{2\alpha}}$ avec $2\alpha > 1$. Donc $t \to \dfrac{1}{(m^2+t^2)^\alpha}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Effectuons le changement de variable $t = mu$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(m^2+t^2)^\alpha}\,dt = \frac{1}{m^{2\alpha-1}} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^\alpha}\,du$$

On a $2\alpha - 1 > 1$ car $\alpha > 1$, donc $\sum \dfrac{1}{m^{2\alpha-1}}$ est convergente. Finalement :

$$\sum_{(m,n)\in J} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \le \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \le \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^{2\alpha-1}} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^\alpha}\,du \le \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\alpha-1}} \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^\alpha}\,du$$

Donc les $\displaystyle\sum_{(m,n)\in J} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ sont bornées, et la famille $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)$ est sommable.

Pour $\alpha = 1$ et a fortiori pour $\alpha < 1$, la famille n'est pas sommable. En effet :

$$\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m^2+n^2} \ge \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{m^2+t^2}\,dt = \sum_{m=1}^{N} \int_1^{N+1} \frac{1}{m^2+t^2}\,dt$$

$$\ge \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} \int_1^{N+1} \frac{1}{1+u^2}\,du = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} (\arctan(N+1) - \arctan(1))$$

Le minorant tend vers l'infini quand N tend vers l'infini puisque la série harmonique diverge, de sorte que les sommes $\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{m^2+n^2}$ ne sont pas majorées.

On peut donner une autre formulation d'une famille sommable. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $S = \displaystyle\sum_{i\in I} a_i$. Le fait que S soit la borne supérieure des sommes finies entraîne que :

$$\forall \text{ J fini} \subset \text{K fini} \subset \text{I}, \sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in K} a_i \leq S$$

et $$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ J fini} \subset \text{I}, \sum_{i\in J} a_i > S - \varepsilon$$

A fortiori, on aura :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ J fini} \subset \text{I}, \forall \text{ K fini} \supset \text{J}, S - \varepsilon < \sum_{i\in K} a_i \leq S$$

et enfin :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ J fini} \subset \text{I}, \forall \text{ K fini} \supset \text{J}, \left| \sum_{i\in K} a_i - S \right| < \varepsilon \qquad (*)$$

Réciproquement, si (a_i) est une famille de réels positifs ou nuls, et si S' est un réel vérifiant la proposition (*), alors la famille est sommable de somme S'. En effet, prenons un $\varepsilon > 0$. D'après (*), on a $\sum_{i\in K} a_i < S' + \varepsilon$ pour toute partie finie K de I contenant la partie finie J, mais cette majoration est également vérifiée par toute partie finie K puisque :

$$\sum_{i\in K} a_i \leq \sum_{i\in K\cup J} a_i < S' + \varepsilon$$

Ainsi, les sommes finies $\sum_{i\in K} a_i$ sont toutes majorées, donc la famille est sommable. Si $S = \sum_{i\in I} a_i$, S et S' vérifieront tous deux la relation (*). Vérifions qu'alors S = S'. Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists \text{ J fini} \subset \text{I}, \forall \text{ K fini} \supset \text{J}, \left| \sum_{i\in K} a_i - S \right| < \varepsilon$$

et $$\exists \text{ J' fini} \subset \text{I}, \forall \text{ K fini} \supset \text{J'}, \left| \sum_{i\in K} a_i - S' \right| < \varepsilon$$

Donc, en prenant K = J $\cup$ J', on aura simultanément $\left| \sum_{i\in K} a_i - S \right| < \varepsilon$ et $\left| \sum_{i\in K} a_i - S' \right| < \varepsilon$ et donc $|S - S'| < 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien S = S'.

Pour une famille de réels positifs ou nuls, on dispose donc de deux définitions possibles de la sommabilité. L'intérêt de la seconde est qu'elle peut s'appliquer à toute famille de réels, de signe constant ou non, ou même à toute famille de complexes. L'intérêt de la première est qu'elle se base sur de simples majorations, rendant les démonstrations souvent plus faciles.

3- Famille quelconque de complexes

Au vu du paragraphe précédent, on pose la définition suivante :

DEFINITION

Soit $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de complexes. On dit que cette famille est* **sommable** *de* **somme** S *si* :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \mathrm{J} \text{ fini} \subset \mathrm{I},\ \forall\ \mathrm{K} \text{ fini} \supset \mathrm{J},\ \left| \sum_{i\in \mathrm{K}} a_i - \mathrm{S} \right| < \varepsilon$$

On note $\mathrm{S} = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$.

On notera l'analogie de la structure de la proposition avec celle de la définition d'une limite de la somme partielle d'une série. La phrase $\exists$ N, $\forall$ $n \geq$ N est remplacé par $\exists$ J fini $\subset$ I, $\forall$ K fini $\supset$ J. Ainsi, le raisonnement tenu à la fin du paragraphe précédent montre l'unicité de S par un raisonnement comparable à celui qui montre l'unicité de la limite d'une suite, des termes tels que Max(m, n) étant remplacé par une réunion J $\cup$ J' de deux parties, qui n'est autre que la borne supérieure de J et J' pour la relation d'inclusion.

De même, on laisse au lecteur le soin de vérifier que, si $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(b_i)_{i\in \mathrm{I}}$ sont sommables, il en est de même de $(a_i + b_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et de $(\lambda a_i)_{i\in \mathrm{I}}$, avec :

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} (a_i + b_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i + \sum_{i\in \mathrm{I}} b_i$$

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda a_i = \lambda \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$$

Les familles sommables forment donc un espace vectoriel.

La définition de la sommabilité ne donne aucune indication sur l'ordre dans lequel s'effectue la sommation. Plus précisément, on a :

PROPOSITION

Soit I *un ensemble en bijection avec* $\mathbb{N}$, *et* φ *une bijection quelconque entre* $\mathbb{N}$ *et* I. *Soit* $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille sommable de somme* S. *Alors* $\sum a_{\varphi(n)}$ *est convergente et* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$.

Le résultat précédent ne dépend pas de la bijection φ choisie. Changer de bijection revient à changer l'ordre des termes dans la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$. La proposition montre que la somme ne dépend pas de l'ordre des termes (contrairement par exemple à la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ comme on l'a vu plus haut). On dit que la somme $\sum\limits_{i\in I} a_i$ est **commutativement convergente**.

Démonstration :

❑ Pour tout $\varepsilon > 0$, soit J une partie finie de I telle que, pour toute partie K finie de I contenant J, on a $\left|\sum\limits_{i\in K} a_i - S\right| < \varepsilon$. Soit N assez grand pour que $J \subset \{\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(N)\}$. Alors, pour tout $n \geq N$, la partie $K = \{\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(n)\}$ est finie et contient J, donc $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} - S\right| < \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)} = S$, d'où la conclusion.

PROPOSITION

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes.

(i) *$(a_i)_{i\in I}$ est sommable $\Leftrightarrow$ $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable.*

Dans ce cas, $\left|\sum\limits_{i\in I} a_i\right| \leq \sum\limits_{i\in I} |a_i|$.

(ii) *Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, toute sous-famille $(a_i)_{i\in J}$, J fini ou non inclus dans I, l'est également.*

(iii) *Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, et si $(b_i)_{i\in I}$ est une famille telle que, pour tout i, $|b_i| \leq |a_i|$, alors la famille $(b_i)_{i\in I}$ est sommable.*

Le (i) donne un critère simple pour montrer qu'une famille est sommable. On raisonne sur la famille des modules, en cherchant à majorer les sommes finies des modules. Il montre aussi, que, lorsque $I = \mathbb{N}$, il n'y a pas de différence entre famille sommable et série absolument convergente.

Démonstration :

❑ (i), réduction du cas complexe au cas réel : On se amène au cas réel en séparant partie réelle et imaginaire. En effet, si (a_i) est une famille sommable de complexes, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ J fini} \subset I, \forall \text{ K fini} \supset J, \left|\sum_{i\in K} a_i - S\right| < \varepsilon$$

et a fortiori, puisque $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, on aura :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ J fini} \subset I, \forall \text{ K fini} \supset J, \left|\sum_{i\in K} \mathrm{Re}(a_i) - \mathrm{Re}(S)\right| < \varepsilon$$

Donc la famille $(\mathrm{Re}(a_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable. De même pour la partie imaginaire. Réciproquement, si $(\mathrm{Re}(a_i))_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mathrm{Im}(a_i))_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables, il en sera de même de $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$, combinaison linéaire des deux.
Si on parvient à montrer l'équivalence annoncée dans la proposition pour les familles réelles, on aura alors, dans le cas complexes :

$$\begin{aligned}(a_i)_{i\in\mathrm{I}} \text{ sommable} &\Leftrightarrow (\mathrm{Re}(a_i))_{i\in\mathrm{I}} \text{ et } (\mathrm{Im}(a_i))_{i\in\mathrm{I}} \text{ sommables}\\ &\Leftrightarrow (|\mathrm{Re}(a_i)|)_{i\in\mathrm{I}} \text{ et } (|\mathrm{Im}(a_i)|)_{i\in\mathrm{I}} \text{ sommables}\\ &\Leftrightarrow (|a_i|)_{i\in\mathrm{I}} \text{ sommable}\end{aligned}$$

Dans la dernière équivalence, le sens $\Rightarrow$ utilise $|a_i| \leq |\mathrm{Re}(a_i)| + |\mathrm{Im}(a_i)|$, et le sens $\Leftarrow$ utilise $|\mathrm{Re}(a_i)| \leq |a_i|$ et $|\mathrm{Im}(a_i)| \leq |a_i|$.

❑ (i) $\Leftarrow$: Supposons donc les a_i réels. L'implication $(|a_i|)_{i\in\mathrm{I}}$ sommable $\Rightarrow$ $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sommable se calque sur la démonstration de $\sum a_n$ absolument convergente $\Rightarrow \sum a_n$ convergente.
On suppose donc $(|a_i|)_{i\in\mathrm{I}}$ sommable. Pour tout i, on pose :

$$\begin{aligned} a_i^+ &= a_i \text{ si } a_i \geq 0\\ &= 0 \text{ sinon}\\ a_i^- &= -a_i \text{ si } a_i \leq 0\\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}$$

On a alors :

$$|a_i| = a_i^+ + a_i^-$$
$$a_i = a_i^+ - a_i^-$$

Comme, pour tout i, $0 \leq a_i^+ \leq |a_i|$ et $0 \leq a_i^- \leq |a_i|$ et que $(|a_i|)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, $(a_i^+)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(a_i^-)_{i\in\mathrm{I}}$ sont sommables, donc $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ aussi, comme combinaison linéaire de $(a_i^+)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(a_i^-)_{i\in\mathrm{I}}$. On a de plus :

$$-\sum_{i\in\mathrm{I}} |a_i| \leq -\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i^- \leq \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i^+ - \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i^- \leq \sum_{i\in\mathrm{I}} a_i^+ \leq \sum_{i\in\mathrm{I}} |a_i|$$

donc $\left|\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\right| \leq \sum_{i\in\mathrm{I}} |a_i|$

❑ (i) $\Rightarrow$: Supposons les a_i réels, et $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sommable, de somme S. Si l'ensemble des a_i^+ non nuls est fini, on a évidemment $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i^+$ fini. Supposons donc que l'ensemble des a_i^+ non nuls soit infini. $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ étant sommable, soit $\varepsilon > 0$ et J fini tel que, pour tout K fini contenant J, $\left|\sum_{i\in\mathrm{K}} a_i - \mathrm{S}\right| < \varepsilon$. Cette inégalité précédente est vérifiée pour K réunion de J et d'un ensemble fini L quelconque disjoint de

J d'indices i tels que $a_i^+ \neq 0$ (et donc tels que $a_i^+ = a_i$). Lorsque L varie, les sommes $\sum_{i \in J \cup L} a_i$ sont donc bornées, et il en est de même des sommes :

$$\sum_{i \in L} a_i^+ = \sum_{i \in L} a_i = \sum_{i \in J \cup L} a_i - \sum_{i \in J} a_i$$

Il en résulte que les sommes finies de termes a_i^+ sont majorées, donc que la famille $(a_i^+)_{i \in I}$ est sommable.
De même, la famille $(a_i^-)_{i \in I}$ est sommable et il en est de même de $(|a_i|)_{i \in I}$ comme combinaison linéaire de $(a_i^+)_{i \in I}$ et de $(a_i^-)_{i \in I}$.

❑ ii) : La propriété (ii) a déjà vue pour les séries à termes positifs. Dans le cas général, on s'y ramène grâce au (i) :

$(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow$ $(|a_i|)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow$ $(|a_i|)_{i \in J}$ sommable $\Rightarrow$ $(a_i)_{i \in J}$ sommable

❑ iii) :

$(a_i)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow$ $(|a_i|)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow$ $(|b_i|)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow$ $(b_i)_{i \in I}$ sommable

La deuxième implication est vraie, comme on l'a vu par comparaison de familles de réels positifs ou nuls.

On dispose enfin de la proposition suivante, montrant qu'on a toute latitude dans la façon de regrouper les termes pour calculer la somme d'une famille sommable $(a_i)_{i \in I}$.

THEOREME DE SOMMATION PAR PAQUETS
Soit $(a_i)_{i \in I}$ *une famille de complexes. On suppose que* I *est partitionné en une famille* $(I_m)_{m \in M}$.

(i) *Si* $(a_i)_{i \in I}$ *est sommable de somme* S, *alors, pour tout* m *élément de* M, $(a_i)_{i \in I_m}$ *est sommable de somme* S_m,*et la famille* $(S_m)_{m \in M}$ *est sommable de somme* S.

(ii) $(a_i)_{i \in I}$ *est sommable* $\Leftrightarrow$ *pour tout* m *élément de* M, $(|a_i|)_{i \in I_m}$ *est sommable de somme* T_m,*et la famille* $(T_m)_{m \in M}$ *est sommable.*

Le (i) traduit le fait que, si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, et si $I = \bigcup_{m \in M} I_m$, union disjointe, alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{m \in M} \sum_{i \in I_m} a_i$$

<u>Démonstration</u> :
❑ (i) : Supposons $(a_i)_{i \in I}$ sommable de somme S. Pour tout m de M, comme $I_m \subset I$, $(a_i)_{i \in I_m}$ est sommable. On note S_m sa somme. Montrons maintenant que la famille $(S_m)_{m \in M}$ est sommable de somme S.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une partie finie J telle que, pour K fini contenant J, $\left|\sum_{i\in K} a_i - S\right| < \varepsilon$. J est recouvert par un nombre fini de I_m, m décrivant une certaine partie finie N de M. Nous allons vérifier que cette partie finie N est celle qui intervient dans la définition de la sommabilité de $(S_m)_{m\in M}$. Soit P une partie finie de M contenant N. Pour chaque m de P, il existe J_m fini inclus dans I_m tel que :

$$\left|\sum_{i\in J_m} a_i - S_m\right| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{Card(P)}}$$

et, au besoin en rajoutant les éléments manquant de $J \cap I_m$, on peut supposer $J \cap I_m \subset J_m \subset I_m$. Notons $K = \bigcup_{m\in P} J_m$, union disjointe puisque les I_m sont disjoints. K contient également J puisque :

$$J = \bigcup_{m\in N} (J \cap I_m) \subset \bigcup_{m\in P} (J \cap I_m) \subset \bigcup_{m\in P} J_m = K$$

On a alors :

$$\left|\sum_{m\in P} S_m - S\right| = \left|\sum_{m\in P} (S_m - \sum_{i\in J_m} a_i) + \sum_{i\in K} a_i - S\right|$$

$$\leq \sum_{m\in P} \left|S_m - \sum_{i\in J_m} a_i\right| + \left|\sum_{i\in K} a_i - S\right|$$

$$< 2\varepsilon$$

ε étant quelconque, l'inégalité précédente montre que la famille (S_m) est sommable, de somme S.

❑ (ii) $\Rightarrow$: Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(|a_i|)_{i\in I}$ également, et il suffit d'appliquer le (i) à la famille $(|a_i|)_{i\in I}$.

❑ (ii) $\Leftarrow$: Pour montrer que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, on montre que $(|a_i|)_{i\in I}$ l'est, et pour cela, on montre que toute somme finie $\sum_{i\in J} |a_i|$ est majorée par le nombre $\sum_{m\in M} T_m$. Soit N une partie finie de M telle que $J \subset \bigcup_{m\in N} I_m$. Pour tout m de N, on a $\sum_{i\in J\cap I_m} |a_i| \leq \sum_{i\in I_m} |a_i| = T_m$ donc :

$$\sum_{i\in J} |a_i| = \sum_{m\in N} \sum_{i\in J\cap I_m} |a_i| \leq \sum_{m\in N} T_m \leq \sum_{m\in M} T_m$$

EXEMPLES :

❑ Dans le (ii), l'usage des modules est indispensable. Il ne suffit pas que, pour tout m élément de M, $(a_i)_{i\in \mathrm{I}_m}$ soit sommable de somme S_m,et la famille $(\mathrm{S}_m)_{m\in \mathrm{M}}$ sommable de somme S pour conclure que la famille $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable. Prenons $\mathrm{I} = \mathbf{N}$, $a_n = (-1)^n$, et pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\mathrm{I}_m = \{2m, 2m + 1\}$. Alors $\mathrm{S}_m = 0$ pour tout m, donc $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n\in \mathrm{I}_m} a_n = 0$, mais $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas sommable puisque $\sum |a_n|$ diverge.

❑ Dans le cas des séries doubles, pour montrer que $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$, il suffit de montrer que la famille (a_{ij}) est sommable. Les deux sommes seront alors égales à $\sum_{i,j} a_{ij}$, la première somme correspondant à la partition $\mathbf{N}^2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{i\} \times \mathbf{N}$, la seconde à la partition $\mathbf{N}^2 = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathbf{N} \times \{j\}$.
D'après (ii), pour montrer cette sommabilité, il suffit par exemple de montrer que, pour tout i, la série $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|$ converge et est majorée par un nombre M_i tel que la série $\sum \mathrm{M}_i$ converge.

❑ Si on reprend l'exemple de la série double $\frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}$, m et n étant éléments de $\mathbf{N}^*$, $\alpha > 0$, on conclut à sa sommabilité un peu plus rapidement que nous ne l'avons fait plus haut, en appliquant le (ii) sans avoir recours aux parties finies. Pour tout m, $\sum_n \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha}$ est sommable puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^{2\alpha}}$, avec $2\alpha > 1$. On a ensuite :

$$\mathrm{T}_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{(m^2 + t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{1}{(m^2 + t^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m^{2\alpha-1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^\alpha}\,\mathrm{d}u$$

Comme $2\alpha - 1 > 1$, $\sum \frac{1}{m^{2\alpha-1}}$ converge, donc $\sum \mathrm{T}_m$ aussi.

❑ On peut redonner une démonstration de la proposition sur les séries produits sous la forme suivante. Si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(v_j)_{j\in \mathrm{J}}$ sont deux familles sommables (et donc $(|u_i|)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(|v_j|)_{j\in \mathrm{J}}$ également), alors $(u_i\, v_j)_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}}$ est sommable et :

$$\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} u_i\, v_j = \sum_{i\in \mathrm{I}} u_i \times \sum_{i\in \mathrm{I}} v_i$$

En effet, appliquant (ii), on partitionne $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ en la réunion des $\mathrm{I}_m = \mathrm{I} \times \{m\}$, $m \in \mathrm{J}$. Pour chaque m, $(|u_i v_m|)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable de somme $\mathrm{T}_m = |v_m| \times \sum_{i\in\mathrm{I}} |u_i|$, et la famille $(\mathrm{T}_m)_{m\in\mathrm{J}}$ est sommable de somme $\sum_{i\in\mathrm{I}} |u_i| \times \sum_{m\in\mathrm{I}} |v_m|$. Donc $(|u_i v_j|)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ est sommable et $(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ également.

L'application de (i) à la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ avec la même partition que ci-dessus donne la conclusion.

Dans le cas où $\mathrm{I} = \mathrm{J} = \mathbf{N}$, on a alors $\sum_{(n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} u_n v_m = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n$, mais on peut aussi partitionner $\mathbf{N}^2$ en la réunion de ses diagonales $\mathrm{I}_n = \{(k, n-k) \mid 0 \le k \le n\}$, n décrivant $\mathbf{N}$ et l'on retrouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} u_n v_m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

❑ Soit (ω_1, ω_2) un couple de complexes non nuls et non colinéaires. Soit I la famille $(m\omega_1 + n\omega_2)$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}$, non tous deux nuls. Alors, pour tout z complexe non élément de I, la famille $\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)_{\omega\in\mathrm{I}}$ est sommable. En effet, posons $r = |z|$. Laissons de côté les ω de I de module inférieur à $r + 1$ (qui sont en nombre fini), et montrons que la famille des $\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$, pour ω dans I de module supérieur ou égal à $r + 1$, est sommable. On a :

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{2z\omega - z^2}{(z-\omega)^2\omega^2}\right| \le \frac{2r|\omega| + r^2}{(|\omega| - r)^2\,|\omega|^2}$$

$$\le \frac{3r|\omega|}{(|\omega| - r)^2\,|\omega|^2} = \frac{3r}{(|\omega| - r)^2\,|\omega|} \le \frac{3r(r+1)}{|\omega|^3}$$

La dernière inégalité résulte du fait que, pour $|\omega| \ge r + 1$, $\frac{|\omega|}{|\omega| - r} \le r + 1$. Il suffit donc de montrer que la famille des $\frac{1}{|\omega|^3}$ est sommable. Pour tout m et n non tous deux nuls, il existe θ tel que $m = \sqrt{m^2 + n^2}\cos(\theta)$ et $n = \sqrt{m^2 + n^2}\sin(\theta)$. La fonction $\theta \in [0, 2\pi] \to |\cos(\theta)\omega_1 + \sin(\theta)\omega_2|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ et ne s'y annule pas, car ω_1 et ω_2 sont linéairement indépendants. Elle admet donc un minimum ρ strictement positif. Pour tout $(m, n) \ne (0, 0)$, on a donc $|m\omega_1 + n\omega_2| \ge \sqrt{m^2 + n^2}\,\rho$, et donc :

$$\frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^3} \le \frac{1}{(m^2 + n^2)^{3/2}\,\rho^3}$$

Or on a vu que la famille $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, était sommable pour $\alpha > 1$. On a ici $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$.

On partitionne I en :

- les (m, n) tels que $m \geq 1$, $n \geq 1$
- les (m, n) tels que $m \geq 1$, $n \leq -1$
- les (m, n) tels que $m \leq -1$, $n \geq 1$
- les (m, n) tels que $m \leq -1$, $n \leq -1$
- les (m, n) tels que $m = 0$, $n \geq 1$
- les (m, n) tels que $m = 0$, $n \leq -1$
- les (m, n) tels que $m \geq 1$, $n = 0$
- les (m, n) tels que $m \leq -1$, $n = 0$

et l'on constate que chaque sous-famille des $\dfrac{1}{|\omega|^3}$ sur chacune des parties précédentes est sommable.

La famille complète est donc sommable. La fonction $z \to \dfrac{1}{z^2} + \sum\limits_{w} \left(\dfrac{1}{(z-w)^2} - \dfrac{1}{w^2}\right)$ s'appelle **fonction de Weierstrass**. Elle est dotée de trop nombreuses propriétés pour qu'on puisse les énoncer ici.

4- Produits infinis

DEFINITION

*Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de complexes non nuls. On dit que le produit $\Pi\, a_n$ converge si la suite $\left(\prod\limits_{n=0}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite **non nulle**. On note alors $\prod\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ cette limite.*

Si les a_n sont strictement positifs, en appliquant le logarithme, on a :

$$\Pi\, a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \ln(a_n) \text{ converge}$$

Le cas où $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{n=0}^{N} a_n = 0$ correspond à celui où $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $-\infty$. C'est la raison pour laquelle on demande que la limite soit non nulle.

Si le produit infini converge, alors on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n} a_k}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} a_k} = 1$. Ainsi, il est nécessaire que le terme général a_n tende vers 1 pour que le produit converge. C'est pourquoi on utilise souvent les notations $\Pi\,(1 + u_n)$ avec (u_n) une suite de limite nulle.

EXEMPLES :

❑ La condition $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ n'est pas suffisante pour que le produit $\Pi\ a_n$ converge, pas plus que la condition $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ n'est suffisante pour que la série $\sum a_n$ converge. Par exemple, $\Pi\ (1 + \frac{1}{n})$ diverge puisque, pour tout N :

$$\prod_{n=1}^{N} (1 + \frac{1}{n}) = \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times ... \times \frac{N}{N-1} \times \frac{N+1}{N} = N + 1$$

quantité qui tend vers l'infini quand N tend vers l'infini. On aurait pu aussi prendre le logarithme et se ramener à la comparaison avec la série harmonique divergente.

❑ On a de même :

$$\prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n}) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times ... \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

quantité qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini. On a ainsi $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 0$, produit considéré comme divergent vers 0. On aurait pu, là aussi, prendre le logarithme pour conclure.

❑ On a déjà rencontré plus haut la **formule de Wallis**, où l'on a montré la convergence du produit infini :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}$$

Montrons cette formule. Soit P_n le produit partiel $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}$. On a $P_0 = 1$ (produit vide), et pour tout $n \geq 1$, $P_n = \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} P_{n-1}$.

Considérons maintenant les **intégrales** dites **de Wallis**, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$. On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, et, pour $n \geq 2$, une intégration par parties, avec $u = \sin^{n-1}(t)$ et $v' = \sin(t)$, donne :

$$I_n = [-\sin^{n-1}(t)\cos(t)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\, dt$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)(1 - \sin^2(t))\, dt$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

donc $\quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

donc $\quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$

On en déduit par récurrence les valeurs des intégrales de Wallis :

$$\mathrm{I}_{2n} = \boxed{\frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)} \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\, \mathrm{d}t}$$

et $$\mathrm{I}_{2n+1} = \boxed{\frac{2 \times 4 \times ... \times (2n)}{3 \times 5 \times ... \times (2n+1)} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\, \mathrm{d}t}$$

donc $\mathrm{P}_n = \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \dfrac{2}{\pi}$. Remarquons enfin que, pour tout n :

$$\sin^{2n+1}(t) \leq \sin^{2n}(t) \leq \sin^{2n-1}(t)$$

donc, en intégrant entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\mathrm{I}_{2n+1} \leq \mathrm{I}_{2n} \leq \mathrm{I}_{2n-1}$$

donc $1 \leq \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \leq \dfrac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n}$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = 1$

et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \dfrac{2}{\pi} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = \dfrac{2}{\pi}$

qui est bien le résultat annoncé.

On dispose du critère de convergence suivant, ainsi qu'une formule développant le produit infini en somme de série.

PROPOSITION

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une suite de complexes. Pour toute partie finie* Q *incluse dans* $\mathbf{N}$, *on pose* $u_\mathrm{Q} = \prod\limits_{i\in\mathrm{Q}} u_i$ (*et* $u_\varnothing = 1$). *Si la série* $\sum u_n$ *est* **absolument convergente**, *alors* :

(i) $\Pi\,(1 + u_n)$ *converge.*

(ii) *La famille* (u_Q), Q *fini inclus dans* $\mathbf{N}$, *est sommable.*

(iii) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) = \sum\limits_{\mathrm{Q}\text{ fini, }\mathrm{Q}\subset\mathbf{N}} u_\mathrm{Q}$

Dans le (i), si l'un des u_n vaut -1, $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) = 0$. Mais, si $\sum u_n$ converge absolument, la suite (u_n) tend vers 0, donc il existe un rang au-delà duquel $u_n \neq -1$. Quitte à se placer au-delà de ce rang, on peut supposer $\forall\, n, u_n \neq -1$.

Une réciproque du (ii) est triviale : si la famille $(u_\mathrm{Q})_{\mathrm{Q}\text{ fini}\,\subset\,\mathbf{N}}$ est sommable, alors $(|u_\mathrm{Q}|)_{\mathrm{Q}\text{ fini}\,\subset\,\mathbf{N}}$ aussi, et donc $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ aussi, puisque c'en est une sous-famille correspondant aux cas où Q est un singleton $\{n\}$. Par conséquent $\sum u_n$ est absolument convergente, et les affirmations précédentes s'appliquent également.

Le (iii) signifie que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$ se développe en la somme infinie (sommée dans l'ordre que l'on veut) des termes constitués de 1 (pour Q = ∅), de tous les termes u_i (pour Q égal à un singleton), de tous les termes u_iu_j (pour Q égal à un doublet $\{i, j\}$), de tous les termes $u_iu_ju_k$ (pour Q égal à un triplet $\{i, j, k\}$), et d'une manière générale, de tous les termes $u_{i_1}u_{i_1}...u_{i_N}$, $i_1 < i_2 < ... < i_N$, N quelconque. Il n'y a pas dans ce développement de produit infini de u_i, ces produits infinis étant nuls.

Démonstration :

❑ On commence par montrer la proposition dans le cas où les u_n sont des réels positifs ou nuls, les démonstrations pouvant se faire par majoration, sans recours aux ε.

(i) : En passant aux logarithmes, $\Pi\ (1 + u_n)$ converge ⇔ $\sum \ln(1 + u_n)$ converge. Or, les u_n étant positifs ou nul, l'hypothèse affirme que $\sum u_n$ converge, donc la suite u_n converge vers 0, donc $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ quand n tend vers l'infini. Leurs termes généraux étant positifs ou nuls, les deux séries $\sum \ln(1 + u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature, convergentes.

(ii) : Montrons que, pour toute famille finie $\mathcal{J}$ dont les éléments sont des parties Q finies incluses dans $\mathbf{N}$, la somme $\sum_{Q\in\mathcal{J}} u_Q$ est majorée par $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$, ce qui montrera la sommabilité de la famille des (u_Q). Les éléments i des parties $Q \in \mathcal{J}$ sont en nombre fini, donc il existe un entier N tels que ces indices i soient élément de [0, N]. Autrement dit : $\forall\ Q \in \mathcal{J}$, $Q \subset [0, N]$. On remarquera que :

$$\sum_{Q\subset[0,N]} u_Q = 1 + u_0 + ... + u_N + u_0u_1 + u_0u_2 + ... + u_{N-1}u_N + u_0u_1u_2 + ... + u_0u_1...u_N$$

la somme de droite étant obtenue en prenant d'abord Q = ∅, puis Q parcourant les singletons $\{i\}$, puis les doublets $\{i, j\}$, puis les triplets, etc..., jusqu'à la partie complète [0, N]. Or ce membre de droite n'est autre que le développement de $(1 + u_0)...(1 + u_N)$. Ainsi :

$$\sum_{Q\in\mathcal{J}} u_Q \leq \sum_{Q\subset[0,N]} u_Q = (1 + u_0)...(1 + u_N) \leq \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$$

Outre la sommabilité de la famille des (u_Q), cela prouve aussi l'inégalité :

$$\sum_{Q \text{ fini},\, Q\subset\mathbf{N}} u_Q \leq \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$$

puisque, pour des quantités positives ou nulles, $\sum_{Q \text{ fini},\, Q\subset\mathbf{N}} u_Q$ est la borne supérieure des $\sum_{Q\in\mathcal{J}} u_Q$ lorsque $\mathcal{J}$ varie dans l'ensemble des familles finies dont les éléments sont des parties finies Q de $\mathbf{N}$.

(iii) : Pour tout entier N, considérons la famille finie $\mathcal{J} = \mathcal{P}([0, N])$. On a :

$$\prod_{n=0}^{N} (1 + u_n) = \sum_{Q\subset[0,N]} u_Q = \sum_{Q\in\mathcal{J}} u_Q \leq \sum_{Q \text{ fini}, Q\subset\mathbf{N}} u_Q \leq \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$$

donc $\displaystyle\prod_{n=0}^{N} (1 + u_n) \leq \sum_{Q \text{ fini}, Q\subset\mathbf{N}} u_Q \leq \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$

et en faisant tendre N vers l'infini, on obtient $\displaystyle\sum_{Q \text{ fini}, Q\subset\mathbf{N}} u_Q = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$.

❑ Passons maintenant au cas général, où les u_n sont complexes. On suppose donc que $\sum |u_n|$ converge.

(i) : On passe à la forme trigonométrique. Comme, pour tout N :

$$\prod_{n=0}^{N} (1 + u_n) = \prod_{n=0}^{N} (|1 + u_n| \exp(i\arg(1 + u_n))) = \prod_{n=0}^{N} |1 + u_n| \times \exp(i \sum_{n=0}^{N} \arg(1 + u_n))$$

pour montrer que $\Pi\ (1 + u_n)$ converge, il suffit de montrer que $\Pi\ |1 + u_n|$ converge et que $\sum \arg(1 + u_n)$ (pour un bon choix d'arguments) converge.

Posons $u_n = r_n \exp(i\theta_n)$, avec $r_n = |u_n|$ et donc $\sum r_n$ convergente, et en particulier $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. On a :

$$1 + u_n = 1 + r_n \exp(i\theta_n) = 1 + r_n\cos(\theta_n) + ir_n\sin(\theta_n)$$

donc $|1 + u_n| = \sqrt{(1 + r_n\cos(\theta_n))^2 + r_n^2\sin^2(\theta_n)} = \sqrt{1 + 2r_n\cos(\theta_n) + r_n^2} = 1 + r_n\cos(\theta_n) + o(r_n)$

donc $\ln(|1 + u_n|) = \ln(1 + r_n\cos(\theta_n) + o(r_n)) = r_n\cos(\theta_n) + o(r_n)$

donc $\big|\ln(|1 + u_n|)\big| = |r_n\cos(\theta_n) + o(r_n)| \leq 2r_n$ pour n assez grand

Comme $\sum r_n$ converge, $\sum \ln(|1 + u_n|)$ converge (absolument) donc $\Pi\ |1 + u_n|$ converge.

Passons aux arguments. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + u_n = 1$ donc on peut choisir $\arg(1 + u_n)$ de façon qu'il tende vers 0 quand n tend vers l'infini. On a alors :

$$\arg(1 + u_n) = \arctan\left(\frac{r_n\sin(\theta_n)}{1 + r_n\cos(\theta_n)}\right) = \arctan(r_n\sin(\theta_n) + o(r_n)) = r_n\sin(\theta_n) + o(r_n)$$

donc $|\arg(1 + u_n)| = |r_n\sin(\theta_n) + o(r_n)| \leq 2r_n$ pour n assez grand

donc $\sum \arg(1 + u_n)$ converge (absolument).

Le produit $\Pi\ (1 + u_n)$ est donc bien convergent.

(ii) Comme $\sum |u_n|$ converge (et en particulier $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$), on a aussi $\sum \ln(1 + |u_n|)$ converge, les deux séries étant à termes positifs ou nuls et $\ln(1 + |u_n|) \sim |u_n|$. Donc $\Pi\ (1 + |u_n|)$ converge. Appliquant le cas réel positif ou nul de la présente proposition, on en conclut que la famille $(|u_Q|)$, Q fini inclus dans $\mathbf{N}$, est sommable, et il en est de même de la famille des (u_Q).

(iii) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la définition de la sommabilité, il existe une famille finie $\mathcal{J}$ dont les éléments sont des parties finies Q de $\mathbf{N}$ telle que, pour toute famille finie $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{J}$, elle aussi ayant pour éléments des parties finies de $\mathbf{N}$, on a :

$$\left| \sum_{\text{Q fini, Q} \subset \mathbf{N}} u_Q - \sum_{Q \in \mathcal{K}} u_Q \right| < \varepsilon$$

Par ailleurs, pour un entier N assez grand, on a $\left| \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) - \prod_{n=0}^{N} (1 + u_n) \right| < \varepsilon$. Quitte à augmenter N, on peut supposer que $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}([0, N])$ et on peut donc prendre $\mathcal{K} = \mathcal{P}([0, N])$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{Q \in \mathcal{K}} u_Q = \prod_{n=0}^{N} (1 + u_n)$$

On a alors simultanément :

$$\left| \sum_{\text{Q fini, Q} \subset \mathbf{N}} u_Q - \prod_{n=0}^{N} (1 + u_n) \right| < \varepsilon$$

et $$\left| \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) - \prod_{n=0}^{N} (1 + u_n) \right| < \varepsilon.$$

donc $$\left| \sum_{\text{Q fini, Q} \subset \mathbf{N}} u_Q - \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) \right| < 2\varepsilon$$

et, ε étant quelconque, $\displaystyle \sum_{\text{Q fini, Q} \subset \mathbf{N}} u_Q = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n)$

EXEMPLE :

❑ Soit $s > 1$. Pour tout $n \geq 1$, notons p_n le n-ème nombre premier et considérons :

$$u_n = \frac{1}{p_n^{\ s} - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n^{\ k}}\right)^s$$

Pour Q = $\{n_1, ..., n_q\}$ fini inclus dans $\mathbf{N}$, $u_Q = \prod_{n \in Q} u_n$ est un produit fini de séries convergentes à termes positifs. On peut développer ce produit comme un produit de Cauchy, facteur après facteur, donnant comme résultat une série convergente à termes positifs, donc sommable et on peut y ranger les termes dans l'ordre que l'on veut. Or le terme quelconque du produit de Cauchy final est, avec des puissances $k_1, k_2, ..., k_q$ quelconques non nulles :

$$\left(\frac{1}{p_{n_1}^{\ k_1}}\right)^s \left(\frac{1}{p_{n_2}^{\ k_2}}\right)^s ... \left(\frac{1}{p_{n_q}^{\ k_q}}\right)^s = \left(\frac{1}{p_{n_1}^{\ k_1}} \frac{1}{p_{n_2}^{\ k_2}} ... \frac{1}{p_{n_q}^{\ k_q}}\right)^s$$

de la forme $\frac{1}{m^s}$ avec $m = p_{n_1}^{k_1} p_{n_2}^{k_2} ... p_{n_q}^{k_q}$, entier ayant dans sa décomposition en facteurs premiers tous les facteurs premier p_{n_1}, p_{n_2}, ..., p_{n_q}, avec des puissances k_1, ..., k_q quelconques non nulles. Quand Q décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$, et que, pour chaque Q, k_1, ..., k_q décrivent l'ensemble $[\![1, +\infty [\![$, les nombres m décrivent l'ensemble des nombres entiers (1 est obtenu pour Q vide). $\sum\limits_{\text{Q fini, Q} \subset \mathbf{N}} u_\text{Q}$ n'est donc rien d'autre que $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ qui converge car $s > 1$. La famille (u_Q) est donc sommable. Il en résulte que $\Pi\ (1 + u_n)$ converge et que :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

L'égalité s'écrit encore :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^{\ s}}{p_n^{\ s} - 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ou enfin :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^{\ s}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

La fonction $\zeta : s \to \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ s'appelle aujourd'hui **la fonction zeta de Riemann**. Sa relation avec les nombres premiers sera promise à un bel avenir et donnera lieu à une célèbre conjecture, la conjecture de Riemann, qui résiste depuis 150 ans aux efforts des mathématiciens. Cette conjecture est l'un des sept problèmes du millénaire, et est dotée d'un prix d'un million de dollars[4].

❑ Pour $s = 1$, si $\sum \frac{1}{p_n - 1}$ convergeait, on aurait de même $\Pi\ (1 + \frac{1}{p_n - 1}) = \Pi\ \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$ convergent, avec, par le même raisonnement :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$$

Comme $\sum \frac{1}{m}$ diverge, l'hypothèse est fausse et il en résulte que $\sum \frac{1}{p_n - 1}$ diverge vers $+\infty$, ainsi que $\Pi\ \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$, tandis que son inverse $\Pi\ (1 - \frac{1}{p_n})$ diverge vers 0. Par équivalence entre $\frac{1}{p_n - 1}$ et $\frac{1}{p_n}$ quand n tend vers l'infini, on en conclut que $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge, résultat loin d'être évident et déjà connu d'Euler (th.19 de *Variae observationes circa series infinitas* que nous évoquons en Annexe I).

[4] www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis

D'autres démonstrations[5] montrent que $\prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{1}{p_n})$ est la densité asymptotique de l'ensemble des entiers non divisible par p_1, ..., p_N. Il est facile de voir que la densité asympotique de l'ensemble des entiers divisibles par p_n est $\frac{1}{p_n}$, celle de l'ensemble des entiers non divisibles par p_n étant alors $1 - \frac{1}{p_n}$. Tout se passe donc comme si les événements "ne pas être divisible par p_n" étaient des événements indépendants. Quand N tend vers l'infini, on obtient la densité asymptotique de l'ensemble des entiers divisibles par aucun nombre premier, qui est nulle, d'où l'on déduit que $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_n}) = 0$.

Annexe I : Historique

1- La longue émergence de notion de convergence

A la fin du XVIIème et tout le long du XVIIIème, la notion de somme infinie de termes se développe largement. Elle est en effet issue du développement des fonctions en série, sans que le nombre de termes du développement soit clairement précisé. De nos jours, on parle de développement limité avec écriture explicite d'un reste, mais à l'époque cela ne génait personne d'écrire que :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$$

ou bien

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

Inversement, une somme infinie étant donnée, il s'agissait d'en déterminer la somme sans que les notions de convergence soient clairement énoncées. Ainsi, Jacques Bernoulli, Leibniz, Euler tenaient le raisonnement suivant pour calculer S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +... . On regroupe les termes sous la forme :

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - S$$

donc $S = \frac{1}{2}$. Il est amusant de voir que cette valeur est cohérente avec la formule rencontrée plus haut $\int_0^1 \frac{1}{1 + t^\alpha} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$ lorsqu'on prend $\alpha = 0$.

La méthode précédente était largement acceptée à l'époque, bien que la même, appliquée aux puissances de 2, suscitât des réticences. Cela donne en effet :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + ... = 1 + 2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + ...) = 1 + 2S \text{ donc } S = -1 \text{ !?!}$$

On obtient le même résultat à l'aide du développement

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

en posant $x = 2$. Cependant, de nos jours, un tel développement est considéré comme divergent et la somme 1 + 2 + 4 + 8 + ... comme non définie[6].

[5] Par exemple : Juan Pablo Pinasco, New Proof's of Euclid's ans Euler's Theorems, *Amer. Math. Monthly*, vol.116, n°2 (février 2009), 172-174.

[6] On trouvera cependant, dans un exercice du chapitre L3/QUOTIENT.PDF, l'exemple de l'anneau 2-adique, dans lequel 1 + 2 + 4 + 8 + ... = – 1.

A la fin du XVIIIème, Laplace objectait que les raisonnements précédents étaient dénués de sens car on a par exemple :

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - x^{11} + ...$$

qui, pour $x = 1$, donne la valeur $\frac{2}{3}$ et non $\frac{1}{2}$ à $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ ce qui aurait pu clore le débat, mais Lagrange répliquait que la somme S' précédente était plutôt $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 0 - 1 + ...$ qui vaut bien $\frac{2}{3}$ selon le raisonnement suivant :

$$\begin{array}{lll}
3S' = & 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \text{etc.} & \text{premier } S' \\
& \quad + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \text{etc.} & \text{deuxième } S' \\
& \qquad + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + & \text{troisième } S' \\
= & 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \text{etc.} & \text{en ajoutant colonne par colonne} \\
= & 2 &
\end{array}$$

C'est au début du XIXème que Bolzano, Cauchy, Abel critiquent l'utilisation de séries divergentes. Cauchy[7] écrit en 1821 :

> *Je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple* [...] *qu'une série divergente n'a pas de somme.* [...] *Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence ; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelques attention.*

Abel[8] écrit en le 16 janvier 1826 à Holmboe :

> *Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder la moindre démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont produit tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter*
>
> $$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$
>
> *n étant un entier positif ?*

Se dégage alors une présentation des séries qui correspondent aux standard modernes, la somme d'une série étant la limite de la suite des sommes partielles. La plupart des résultats énoncés dans la partie II de ce chapitre sont dus à Cauchy.

2- Un calcul d'Euler

On trouvera ci-dessous des exemples de calcul, typiques du XVIIIème, où l'on utilise sans souci des séries divergentes. Le théorème 2 de *Variae observationes circa series infinitas* d'Euler (1737) rapporte un résultat dû à Goldbach[9] :

$$\ln(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + ...$$

---

[7] Augustin-Louis Cauchy, *Analyse Algébrique, cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* (1821), rééd. Jacques Gabay (1989), p.iv-v.

[8] Niels Abel, Oeuvres complètes, tome I, p.257.

[9] L. Bibiloni, P. Viader, J. Paradis, On a Series of Goldbach and Euler, *Amer. Math. Monthly*, vol. 113, n°3 (mars 2006), 206-220, doi.org/10.1080/00029890.2006.11920299

où les dénominateurs valent 1 de moins que les puissances supérieures ou égales à 2 de nombres pairs ($2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 4^2 = 16$, $2^5 = 32$, $6^2 = 36$, $2^6 = 4^3 = 64$, ...). Voici la démonstration qu'en donne Euler :

Il pose :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \ldots \qquad \left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{ en notation moderne}\right)$$

Euler **sait** que cette série **diverge**. Néanmoins, Euler traite les séries divergentes comme les autres séries en leur attribuant une somme, ici infinie, qu'il manipule formellement. Comme :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \qquad \left(1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ en notation moderne}\right)$$

on a, en simplifiant les termes communs aux deux séries :

$$x - 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \ldots$$ (les dénominateurs sont les dénominateurs autres que les puissances de 2, et donc aussi de 4, de 8...)

Puis :

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \ldots$$ (série géométrique de raison $\frac{1}{6}$)

Donc :

$$x - 1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \ldots$$ (les dénominateurs sont les dénominateurs autres que les puissances de 2, 4, 6, 8)

Puis :

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$ (série géométrique de raison $\frac{1}{9}$)

Donc :

$$x - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \ldots$$ (les dénominateurs sont les dénominateurs autres que les puissances de 2, 4, 6, 8, 10)

On continue indéfiniment. On obtient alors :

$$x - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \ldots = 0 \text{ ou encore } x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots \qquad (1)$$

Chaque dénominateur vaut 1 de moins qu'un nombre pair (2, 6, 10, 12, ...) qui n'est pas puissance d'un autre nombre pair plus petit.

Par ailleurs :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \ldots$$

et $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$

$\Rightarrow$ $x + \ln(2) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$(les dénominateurs sont tous les impairs) (2)

En retranchant (1) à (2), on obtient :

$$\ln(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots$$

où les dénominateurs sont les impairs autre que ceux qui précèdent un nombre pair qui n'est pas puissance d'un autre nombre pair plus petit, i.e. les dénominateurs restants sont les impairs qui précèdent un nombre puissance au moins égale à 2 d'un nombre pair. CQFD.

Une telle démarche est totalement invalide aujourd'hui. Il est cependant bon de remarquer que le résultat est, lui, parfaitement exact. On se reportera aux exercices pour une démonstration moderne.

Autre exemple. Euler pose cette fois (théorème 7 de *Variae observationes circa series infinitas*) :

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ...$$

On divise par 2 :

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ...$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + ... \text{ (on a supprimé les dénominateurs multiples de 2)}$$

On divise le résultat précédent par 3 :

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + ...$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}\frac{2}{3}x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + ... \text{ (on a supprimé les dénominateurs multiples de 3)}$$

On divise le résultat précédent par 5 :

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{5}x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + ...$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{5}x = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + ... \text{ (on a supprimé les dénominateurs multiples de 5)}$$

En opérant de même avec 7, on obtiendra :

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}x = 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + ...$$

puis $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{10}{11}x = 1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + ...$

et en continuant indéfiniment :

$$\frac{1.2.4.6.10.12.16...}{2.3.5.7.11.13.17...}x = 1$$

ou encore :

$$\frac{2.3.5.7.11.13.17...}{1.2.4.6.10.12.16...} = x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ...$$

Au numérateur, apparaissent les nombres premiers, et au dénominateur, les nombres précédents les nombres premiers, ce qu'on pourrait noter :

$$\prod_{p \text{ premier}} \frac{p}{p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

De fait, nous avons rencontré ce type d'expression à la fin de la partie sur les produits infinis, où nous avons montré que :

$$\forall s > 1, \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^s}{p^s - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

propriété qu'Euler énonce lui-même dans le théorème 8 avec s entier.

Comme $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$ converge vers 2 (exercice laissé au lecteur), et que $\prod_{p \text{ premier}} \frac{p}{p-1}$ diverge, il y a selon les termes d'Euler, en infinité (sic), plus de nombres premiers que de carrés. De fait, on sait depuis 1896 que le nombre de nombres premiers inférieurs à N est équivalent à $\frac{\mathrm{N}}{\ln(\mathrm{N})}$, bien supérieur au nombre de carrés, équivalent à $\sqrt{\mathrm{N}}$.

3- La persistence des séries divergentes

Indiquons cependant que la formule $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = \frac{1}{2}$ serait vraie si on prenait comme définition de la somme d'une série non pas la limite des sommes partielles comme nous le faisons, mais la limite de leur moyenne (dite limite au sens de Cesaro, les sommes partielles prenant alternativement les valeurs 1 et 0, leur moyenne tend vers $\frac{1}{2}$). Euler a également cherché à donner un sens à la somme de la série $1 - 1! + 2! - 3! + 4! + ...$ Sans se soucier du fait que la série $y = x - 1!\, x^2 + 2!\, x^3 - 3!\, x^4 + ...$ n'est jamais convergente pour $x \neq 0$, il la dérive terme à terme et obtient formellement l'équation différentielle $x^2y' + y = x$. Or cette équation a effectivement une seule solution telle que $y(0) = 0$, donnée par l'expression :

$$y(x) = e^{1/x} \int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-u}}{1 + xu}\, \mathrm{d}u \quad \left(\text{avec } u = \frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right)$$

Euler considère donc que $y(1)$ est la somme qu'il cherche, soit approximativement 0,596347, valeur qu'il obtient également par d'autres méthodes. Il existe enfin des situations aussi bien en mathématiques qu'en physique dans lesquelles on obtient des séries divergentes au sens usuel et pour lesquels il faut bien attribuer une somme. Citons par exemple le cas suivant. On peut montrer que (formule de Stirling à tout ordre) :

$$\ln(n!) = (n + \frac{1}{2})\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{b_2}{1.2.n} + \frac{b_4}{3.4.n^3} + ...+ \frac{b_{2p}}{(2p-1).2p.n^{2p-1}} + o(\frac{1}{n^{2p}})$$

à tout ordre p, où les b_{2p} sont les nombres dits de Bernoulli. A p fixé, la précision est d'autant meilleure que n est grand, mais à n fixé, il est illusoire de prendre davantage de termes car la série diverge lorsque p tend vers l'infini. Ce problème est particulièrement ennuyeux car on souhaiterait bien que, n étant donné, la formule de Stirling donne une valeur de $\ln(n!)$ à une précision arbitraire !!

Vers la fin du XIXème se posait toujours le problème suivant. Etant donné une suite (a_n), comment donner un sens à la somme S des a_n ? Voici un bref résumé de quelques méthodes :

- La méthode usuelle, celle que nous avons étudiée, qui consiste à prendre la limite des sommes partielles. Elle date de Cauchy, dans la première moitié du XIXème :

$$\mathrm{S} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

- La méthode de Cesaro, qui consiste à prendre la limite des *moyennes* des sommes partielles :

$$\mathrm{S} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{S}_k}{n+1} \text{ où } \mathrm{S}_k = a_0 + ... + a_k$$

- La méthode d'Abel qui consiste à multiplier a_k par r^k avant de faire tendre r vers 1 :

$$S = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, r^n = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n\, r^n$$

- La méthode de Borel, consistant à utiliser le fait que $n! = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^n\, dt$ pour définir :

$$S = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, t^n\, dt$$

en espérant que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, t^n$ converge au sens usuel. Bornons-nous à signaler que la méthode usuelle est la plus simple, mais pas la plus efficace. En effet, les méthodes de Césaro et d'Abel sont plus puissantes : dans le cas où la méthode usuelle donne une valeur à S, il en est de même de ces deux méthodes (avec la même valeur de S). Mais ces deux méthodes attribuent des valeurs à des sommes de séries que nous qualifions usuellement de divergentes, par exemple, la valeur $\frac{1}{2}$ à la série $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Quant à la méthode de Borel, elle attribue à cette série la valeur $\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^n\, dt$ or $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^n$ n'est autre que e^{-t} de sorte que l'intégrale devient $\int_0^{\infty} e^{-2t}\, dt = \frac{1}{2}$ là aussi.

3- Semi-convergence

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente sans être absolument convergente. Elle est dite **semi-convergente**.
En 1829, dans un article sur les séries trigonométriques, Dirichlet relève une erreur chez Cauchy. Dans un article de 1823, ce dernier utilise le fait que, si le quotient de u_n sur $\frac{\sin(nx)}{n}$ tend vers 1, alors $\sum u_n$ converge puisque $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge (la preuve de cette convergence est donnée plus haut dans ce chapitre). L'erreur, communément commise de nos jours par tout étudiant débutant dans l'étude des séries, est de croire que $\sum u_n$ converge lorsque la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que $\sum v_n$ converge. Rappelons que ce résultat est vrai si les séries sont **positives**, mais si ce n'est pas le cas, le résultat peut être faux. Dirichlet donne un contre-exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (d'après le critère de convergence de Leibniz), mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ diverge en raison de la présence de la série harmonique, alors même que le quotient des termes de même rang tend vers 1.
En 1854, dans son mémoire sur les séries trigonométriques, Riemann définit, à la suite de Dirichlet, deux types de séries, celles que nous nommons maintenant série absolument convergente et semi-convergente :

> *En janvier 1829, parut dans le* Journal de Crelle *un mémoire de Dirichlet, où la possibilité de la représentation par les séries trigonométriques se trouvait établie en toute rigueur pour les fonctions qui sont, en général, susceptibles d'intégration, et qui se présentent pas une infinité de maxima et de minima. Il arriva à la découverte du chemin*

à suivre pour arriver à la solution de ce problème, par la considération que les séries infinies se partagent en deux classes suivant qu'elles restent convergentes ou non convergentes, lorsqu'on rend leurs termes tous positifs. Dans les premières, les termes peuvent être intervertis d'une manière quelconque ; dans les deux autres, au contraire, la valeur dépend de l'ordre des termes. Si on désigne, en effet, dans une série de seconde classe, les termes positifs successifs par a_1, a_2, a_3, ..., et les termes négatifs par $-b_1$, $-b_2$, $-b_3$, ..., il est clair que $\sum a$, ainsi que $\sum b$, doit être infinie ; car, si ces deux sommes étaient finies l'une et l'autre, la série serait encore convergente lorsqu'on donnerait à tous les termes le même signe ; si une seule était infinie, la série serait divergente. Il est clair maintenant que la série, en plaçant les termes dans un ordre convenable, pourra prendre une valeur donnée C ; car, si l'on prend alternativement des termes positifs de la série jusqu'à ce que sa valeur soit plus grande que C, puis des termes négatifs jusqu'à ce que sa valeur soit moindre que C, la différence entre cette valeur et C ne surpassera jamais la valeur du terme qui précède le dernier changement de signe. Or les quantités a, aussi bien que les quantités b, finissant toujours par devenir infiniment petites pour des valeurs croissantes de l'indice, les écarts entre la somme de la série et C deviendront encore infiniment petits, lorsqu'on prolongera assez loin la série, c'est-à-dire que la série converge vers C.

C'est aux seules séries de la première classe que l'on peut appliquer les lois des sommes finies ; elles seules peuvent être considérées comme l'ensemble de leurs termes ; celles de la seconde classe ne le peuvent pas : circonstance qui avait échappé aux mathématiciens du siècle dernier, principalement par la raison que les séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes d'une variable appartiennent, généralement parlant (c'est-à-dire à l'exception de certaines valeurs particulières de cette variable), à la première classe.

Nous avons vu plus haut qu'en permutant l'ordre des termes de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, on peut la faire converger ou bien vers ln(2) ou bien vers $\frac{1}{2}$ ln(2). L'explication de ce phénomène est donnée ci-dessus par Riemann. Il résulte du fait que la série n'est pas absolument convergente. La somme va dépendre de l'ordre dans lequel sont pris les termes. Ce phénomène ne se produit pas avec les séries absolument convergentes ou les séries sommables.

Annexe II : Accélération de convergence

Cette annexe a pour but d'illustrer une difficulté relative au calcul approché des sommes des séries convergentes. En effet, la convergence peut être tellement lente que le calcul d'une somme partielle, même avec un nombre élevé de termes, ne donnera qu'une faible idée de la valeur de la somme complète de la série. Nous donnons ici deux exemples, l'un historique, l'autre plus moderne.

1- La série $\sum \frac{1}{n^2}$

Vers 1700, on savait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ divergeait et que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergeait, mais on désespérait de trouver la valeur $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ de la somme de cette dernière série, ou même une valeur approchée de cette somme, en raison de la lenteur de convergence de la série. Posons en effet

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (somme partielle de la série) et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (reste de la série). Au moyen d'une comparaison série-intégrale, on a :

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = R_n \leq \int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

donc $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$.

On peut donc prendre comme valeur approchée de R_n la quantité $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}$ avec une erreur majorée par $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}$. Une valeur approchée de S avec cette erreur est alors $S_n + \frac{1}{2n(n+1)}$. Si on souhaite que cette erreur soit majorée par $0{,}5 \times 10^{-10}$, il convient de prendre $n = 10^5$, ce qui était impraticable pour un calcul à la main comme on le faisait à l'époque.

Des procédés d'accélération de convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ ont été proposés par Stirling en 1730 et Euler en 1731 dans le but de déterminer une valeur approchée de la somme de la série.

Donnons une ébauche de la démarche de Stirling[10]. Posons $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$. Stirling se propose de déterminer deux nombres p et q et une suite (T_n) négligeable devant (R_n), tels que $R_{n-1} = \frac{n+p}{q} u_n + T_{n-1}$. Comme $\lim_{n\to\infty} T_{n-1} = \lim_{n\to\infty} R_{n-1} - \frac{n+p}{q} u_n = 0$, en peut remplacer T_{n-1} par la somme de sa série télescopique $\sum_{k=n}^{\infty} v_k$, avec $v_k = T_{k-1} - T_k$. On a alors :

$$R_{n-1} = \frac{n+p}{q} u_n + T_{n-1}$$

$$R_n = \frac{n+1+p}{q} u_{n+1} + T_n$$

donc, en retranchant membre à membre et en tenant compte de $R_{n-1} - R_n = u_n$ et $T_{n-1} - T_n = v_n$, on obtient :

$$u_n = \frac{n+p}{q} u_n - \frac{n+1+p}{q} u_{n+1} + v_n$$

donc $v_n = u_n + \frac{n+1+p}{q} u_{n+1} - \frac{n+p}{q} u_n = \frac{(q-1)n^2 + (2q-2p-1)n + q - p}{qn^2(n+1)^2}$

Pour que $\sum v_n$ converge le plus vite possible, il est avantageux de prendre p et q tels que $\begin{cases} q-1=0 \\ 2q-2p-1=0 \end{cases}$, soit $q = 1$ et $p = \frac{1}{2}$. On obtient $v_n = \frac{1}{2n^2(n+1)^2}$, de sorte que :

[10] Jacobo Stirling, *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum* (1730), prop.10 et 11, exemple 1, p.51-55. https://gallica.bnf.fr/ark:12148/bpt6k62011b/f60.image

$$\forall n, \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{n + \frac{1}{2}}{n^2} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k^2(k+1)^2}$$

En particulier :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2(n+1)^2}$$

Un encadrement du reste $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k^2(k+1)^2}$ par comparaison série-intégrale permet de montrer qu'on obtient une valeur approchée de la série à 10^{-10} près en prenant $n = 180$ (au lieu de $n = 100000$ vu auparavant). Le progrès est spectaculaire, mais cela reste encore pénible pour un calcul à la main. Stirling itère son procédé pour accélérer à son tour le calcul de $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k^2(k+1)^2}$. Après avoir procédé à plusieurs itérations de ce type, il parvient à se ramener à $n = 12$ et donne une quinzaine de décimales de la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, mais il ne reconnaît pas $\dfrac{\pi^2}{6}$. A noter que l'itération répétée de la méthode de Stirling, appliquée à la somme totale $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et pas seulement à son reste conduit à la curieuse formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2\binom{2n}{n}}$ (le $\dfrac{3}{2}$ trouvé précédemment est le premier terme de cette seconde série). Nous donnons une preuve que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}$ dans les exercices du chapitre consacré aux séries entières L2/SERIENTR.PDF.

Quant à Euler, il montre[11] que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (\ln(2))^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\, n^2}$. Voyons comment il procède. On admettra que $\ln(1 + t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, t^n}{n}$ pour tout t élément de $]-1, 1[$, (voir le chapitre sur les séries entières L2/SERIENTR.PDF). Il considère l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^{1/2} -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{1} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Le lecteur vérifiera la convergence des deux intégrales et leur égalité au moyen du changement de variable $t \to 1 - t$. En développant le ln en série, la première intégrale s'écrit :

---

[11] Euler, *Opera Omnia*, Ser. I, Vol 14, pp. 25-41, [E20 : De summatione innumerabilium progressionum]. https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/20/

$$I = \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/2} \frac{t^{n-1}}{n}\,dt$$

On admettra qu'on peut permuter ici symbole de série et symbole d'intégration, et de même ci-dessous. Cette question fait l'objet du chapitre *Suites et séries de fonctions* dans L2/SUITESF.PDF.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n^2}$$

Pour la deuxième intégrale, on développe $\frac{1}{1-t}$ en la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$:

$$I = -\int_{1/2}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \ln(t)\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_{1/2}^{1} t^n \ln(t)\,dt$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{1/2}^{1} \qquad \text{en intégrant par parties}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}(n+1)} + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - (\ln(2))^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\,n^2} \qquad \text{car } \ln(\tfrac{1}{2}) = \ln(1-\tfrac{1}{2}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$$

$$= S - (\ln(2))^2 - I$$

donc $S = (\ln(2))^2 + 2I = (\ln(2))^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\,n^2}$

Or la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\,n^2}$ converge beaucoup plus vite que la série initiale. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}\,k^2}$ et $\frac{1}{2^{k-1}\,k^2}$. On a :

$$0 \leq R_n \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2^n\,n}$$

obtenu avec une comparaison série-intégrale pour la dernière majoration. On constate que, pour $n = 30$, on a $0 \leq R_{30} < \frac{1}{2} \times 10^{-10}$. On obtient 10 décimales de S avec l'approximation :

$$S \approx (\ln(2))^2 + S_{30}$$

Le calcul, faisable à la main avec de la patience, donne :

$$S_{30} \approx 1{,}16448105293 \qquad \Rightarrow \qquad S \approx 1{,}64493406685$$

Pour $0 \leq R_n \leq 0{,}5 \times 10^{-15}$, on prendra $n = 46$.

$S_{46} \approx 1.164481052930025 \quad \Rightarrow \quad S \approx 1.6449340668482264$

valeur qu'on pourra comparer avec $\frac{\pi^2}{6}$. On donne une démonstration exacte de cette valeur dans les exercices, mais il est intéressant de voir comment a procédé[12] Euler en 1735, quatre ans après en avoir trouvé une valeur approchée. Compte tenu que sinus s'annule en $\pm k\pi$, pour tout k entier, et traitant la fonction sinus comme un polynôme de degré infini, il pose que :

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

(On peut prouver que cette formule est effectivement exacte pour tout x réel). Euler développe ensuite le produit donnant le sinus en somme comme il le ferait d'un produit fini. On obtient, selon les puissances croissantes de x :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{x^5}{\pi^4} \sum_{n<m} \frac{1}{n^2m^2} + \dots$$

qu'on peut comparer au développement limité du sinus $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots.$

D'où l'on tire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On en tire également le fait que $\sum_{n<m} \frac{1}{n^2m^2} = \frac{\pi^4}{120}$. Or $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + 2 \sum_{n<m} \frac{1}{n^2m^2}$ donc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{60} = \frac{\pi^4}{90}$$

Dans ses travaux, Euler a poursuivi les calculs jusqu'à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}}$ pour laquelle il a trouvé la valeur $\frac{1315862\,\pi^{26}}{11094481976030578125}$. Les méthodes développées depuis Euler ne permettent de n'obtenir que les valeurs de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ avec α un nombre entier pair, et aucune formule explicite pour α entier impair n'a été trouvée jusqu'à ce jour. Mais curieusement, on sait calculer les sommes des séries alternées $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour un tel nombre α entier impair. Ainsi Euler établit que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

[12] Euler, *Opera Omnia*, Ser. I, Vol 14, pp. 73-86, [E41 : De summis serierum recipprocarum]. https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/41/

2- Les séries de Kempner

Considérons la série harmonique dont on retire les entiers possédant dans leur développement décimal un chiffre donné m. On obtient ainsi une série, dite de **Kempner**[13], ce dernier en ayant eu l'idée en 1914. Par exemple, pour $m = 2$, on obtient la série :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{34} + \dots$$

Alors cette série converge. En effet, entre 10^p et $10^{p+1} - 1$, les entiers possèdent $p + 1$ chiffres (dont le premier est non nul), de sorte qu'il y a 8×9^p entiers répondant à la question (8 choix pour le premier chiffre et 9 pour les p chiffres qui suivent). La somme de la série entre ces deux bornes est encadrée par $8 \times \frac{9^p}{10^{p+1}}$ et $8 \times \frac{9^p}{10^p}$, qui sont les termes de séries convergentes.

Cependant la convergence est extrêmement lente. Supposons que l'on souhaite une valeur approchée de la somme à 10^{-6} près. Il serait naïf de croire qu'il suffit de calculer la somme jusqu'à $n = 10^6$ (ce qui représente donc la somme de près de 1.000.000 de termes) et de négliger le reste. En effet, négligeons le reste à partir de 10^p. Ce reste R_p est encadré par la somme des $\frac{8 \times 9^k}{10^{k+1}}$ et $\frac{8 \times 9^k}{10^k}$, k variant de p à l'infini. Ainsi :

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{8 \times 9^k}{10^{k+1}} \leq R_p \leq \sum_{k=p}^{\infty} \frac{8 \times 9^k}{10^k}$$ les deux séries encadrantes étant géométriques

donc $$\frac{8 \times 9^p}{10^{p+1}} \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \leq R_p \leq \frac{8 \times 9^p}{10^p} \frac{1}{1 - \frac{9}{10}}$$

donc $$\frac{8 \times 9^p}{10^p} \leq R_p \leq \frac{8 \times 9^p}{10^{p-1}}$$

Pour $p = 6$, le reste R_p est donc compris entre 4 et 43 !!! Par ailleurs, si l'on choisit p de façon que cet encadrement soit inférieur à 10^{-6}, on obtient $p = 173$. Il faudrait donc calculer la somme jusqu'à $n = 10^{173}$, soit plus d'un milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de termes, ☹ ce qui représente une tâche insurmontable dépassant en temps, et de loin, l'âge de l'univers.

Il a fallu attendre la fin des années 1970 pour qu'on parvienne à donner des valeurs approchées de la somme[14], selon une méthode due à R. Baillie, et dont nous donnons le schéma, sans pouvoir apporter nécessairement toutes les justifications voulues, en particulier sur la majoration des erreurs de calcul commises. On note :

$S(m) = \{n \in \mathbb{N}^*$, n ne possède pas le chiffre m dans son développement décimal$\}$

$S(i, m) = \{n \in S(m)$, n possède i chiffres dans son développement décimal$\}$

$$s(i, j, m) = \sum_{x \in S(i,m)} \frac{1}{x^j}$$

$S(m)$ est la réunion disjointe des $S(i,m)$. La somme de la série de Kempner que l'on cherche est :

[13] A. J. Kempner, A curious convergent series, *Amer. Math. Monthly*, vol.21, n°2, (février 1914), 48-50, doi.org/10.1080/00029890.1914.11998004

[14] R. Baillie, Sums of reciprocals of integers missing a given digit, 86:5, *Amer. Math. Monhtly*, (1979), 372-374. doi.org/10.1080/00029890.1979.11994810

$$t(m) = \sum_{x\in S(m)} \frac{1}{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{x\in S(i,m)} \frac{1}{x} = \sum_{i=1}^{\infty} s(i,1,m)$$

Les $S(i,m)$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$S(i + 1,m) = \bigcup_{x\in S(i,m)} \{10x, 10x + 1, 10x + 2, ..., 10x + 9\} \setminus \{10x + m\}$$

donc :

$$s(i + 1,j,m) = \sum_{x\in S(i,m)} \sum_{k=0,k\neq m}^{9} \frac{1}{(10x + k)^j}$$

On établit maintenant une relation de récurrence entre les $s(i, j, m)$. En admettant que le développement limité de la fonction $x \to (1 + x)^\alpha$ soit valide jusqu'à l'infini sous forme de série (voir L1/DLTAYLOR.PDF et L2/SERIENTR.PDF), on a, en appliquant ce développement à $\frac{k}{10x}$ avec $\alpha = - j$:

$$\frac{1}{(10x + k)^j} = \frac{1}{(10x)^j} (1 + \frac{k}{10x})^{-j} = \frac{1}{(10x)^j} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-j}{n} \frac{k^n}{(10x)^n}$$

donc $$s(i + 1,j,m) = \sum_{x\in S(i,m)} \sum_{k=0,k\neq m}^{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(10x)^j} \binom{-j}{n} \frac{k^n}{(10x)^n}$$

$$= \sum_{x\in S(i,m)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-j}{n} \frac{1}{(10x)^{j+n}} \sum_{k=0,k\neq m}^{9} k^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x\in S(i,m)} \frac{a(j,n,m)}{x^{j+n}}$$

où l'on a posé $a(j,n,m) = \binom{-j}{n} \frac{1}{10^{j+n}} \sum_{k=0,k\neq m}^{9} k^n$.

Donc $$s(i + 1,j,m) = \sum_{n=0}^{\infty} a(j,n,m)\, s(i,j + n,m)$$

Le calcul effectif de la valeur approchée de $t(m) = \sum_{i=1}^{\infty} s(i,1,m)$ que l'on cherche se fait comme suit :

Pour $i \leq 4$, on calcule directement les $s(i,j,m)$ par la formule $\sum_{x\in S(i,m)} \frac{1}{x^j}$ pour les valeurs de j qui seront nécessaires.

Pour $5 \leq i \leq 30$, on calcule les $s(i,j,m)$ et en particulier $s(i,1,m)$ en utilisant la relation de récurrence, en approximant le calcul de $s(i,j,m)$ par la somme partielle $\sum_{n=0}^{9} a(j,n,m)\, s(i - 1,j + n,m)$.

Pour $i \geq 31$, on approxime $\sum_{i=31}^{\infty} s(i,1,m)$ par $9 \times s(30,1,m)$.

Le lecteur courageux qui mettra en oeuvre cette méthode pourra vérifier qu'on obtient :

$t[0] = 23{,}103\ 447\ 909\ 420\ 541\ 616...$

Annexe III : Quelques sommes de séries

On donne ci-dessous quelques sommes de séries. Les démonstrations ne sont pas fournies et certaines peuvent dépasser le niveau de 2ème année d'enseignement supérieur :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2\mathrm{th}(\pi)} + \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2} = \frac{\pi}{2z\mathrm{th}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{2\mathrm{sh}(\pi)} + \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2+n^2} = \frac{\pi}{2z\mathrm{sh}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^7} = \frac{61\pi^7}{184320}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \qquad \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^4}{960}$$

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Dire si les intégrales suivantes convergent :

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\ln(x)}{1+x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^{\alpha}}\,dx$, pour $\alpha > 0$

c) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$. Calculer cette intégrale lorsqu'elle converge.

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\sin^n(x)\,dx$

e) Discuter suivant les valeurs des réels α et β l'existence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(1+t^{\beta})}\,dt$

Exo.2) a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$ existe.

b) La calculer en considérant $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$ et en effectuant un changement de variable dans l'une des deux intégrales.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle J = \int_0^{\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2+b^2}\,dx$, où a et b sont strictement positifs.

Exo.3) a) Prouver que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan(\theta)}\,d\theta$ est convergente et déduire sa valeur du a).

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(t)}{t(1+t^2)}\,dt$ est convergente et déduire sa valeur du b).

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\,dx$ est définie pour tout réel a. Calculer cette intégrale d'abord pour $a = \pm 1$, puis pour les autres valeurs de a (dans ce dernier cas, passer par l'intermédiaire de sommes de Riemann).

Exo.4) On étudie dans cet exercice le comportement de fonctions f intégrables sur $[0, +\infty[$. On donne d'abord un exemple où f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, puis on ajoute des hypothèses sur f pour que cette conclusion deviennent vraie.

a) Montrer que la fonction $\displaystyle x \to \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$, mais que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\,dx$ est convergente. On pourra montrer pour cela que la fonction $\displaystyle X \to \int_0^{X} \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\,dx$ est croissante majorée sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que, si f est lipschitzienne et intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d) Montrer que, si f est uniformément continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (lemme de **Barbalat**).

e) Montrer que, si f une fonction positive ou nulle décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $f(x) = o(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$.

Exo.5) Les deux questions sont indépendantes :

a) Montrer que, pour tout n entier, les deux intégrales suivantes sont convergentes et égales :

$$\int_0^\infty \frac{u^n e^{-u}}{1+u}\,du \qquad\qquad n!\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1+u)^{n+1}}$$

b) Mêmes questions pour $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(2t)}}\,dt$.

Exo.6) On commence par deux questions préliminaires

a) Pour n entier et t élément de $]0, 2\pi[$, montrer que :

$$1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) + ... + 2\cos(nt) = \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

b) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(xt)\,dt = 0$.

Ces deux questions vont maintenant nous servir à montrer deux égalités non évidentes :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(intégrale de Dirichlet)}$$

et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ existe, puis conclure sur l'égalité demandée en considérant $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t}\right) \sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt$.

d) Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en considérant $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{t(\pi-t)}{\sin(t)} \sin((2n+1)t)\,dt$.

Exo.7) a) Soit f et g des fonctions intégrables sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles, g étant strictement positive. Montrer que, si $f = o(g)$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_x^\infty f(t)\,dt = o(\int_x^\infty g(t)\,dt)$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que, si $f \sim g$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_x^\infty f(t)\,dt \sim \int_x^\infty g(t)\,dt$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Soient f et g deux fonctions continues par morceaux de $[0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$, g étant strictement positive, et $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ étant divergente. Montrer que, si $f = o(g)$ en $+\infty$, alors $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = o(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t)$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que, si $f \sim g$ en $+\infty$, alors $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Enoncer des théorèmes analogues pour les séries.

Exo.8) Soit $\lfloor\ \rfloor$ la fonction partie entière.

a) Montrer que l'intégrale suivante converge : $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{d}x$

b) Montrer que $\mathrm{I} = 1 - \gamma$, où γ est la constante d'Euler, égale à $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

Exo.9) a) Montrer que, pour tout $a > 0$, l'intégrale $\int_a^\infty e^{-ix} \frac{a^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente (i est le complexe de carré – 1).

b) Montrer que, lorsque a tend vers $+\infty$, $\int_a^\infty e^{-ix} \frac{a^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \sim \frac{e^{-ia}}{i}$.

c) Montrer que $\int_a^\infty e^{-ix} \frac{a}{x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente et que $\int_a^\infty e^{-ix} \frac{a}{x}\,\mathrm{d}x \sim \frac{e^{-ia}}{i}$ quand a tend vers $+\infty$.

d) Dans son cours de physique[15], Richard Feynman attribue également la valeur $\frac{e^{-ia}}{i}$ à l'intégrale divergente $\int_a^\infty e^{-ix}\,\mathrm{d}x$ en prenant une primitive et en donnant la valeur 0 à $e^{-i\infty}$!! Vérifier que la valeur donnée par Feynman s'obtient en convenant que :

$$\int_a^\infty e^{-ix}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b e^{-it}\,\mathrm{d}t + \int_b^{\lambda b} e^{-it} \frac{\lambda b - t}{\lambda b - b}\,\mathrm{d}t$$

où λ est strictement supérieur à 1. Dans le membre de droite, on a multiplié e^{-ix} par 1 sur l'intervalle $[a, b]$ et par le facteur d'atténuation $t \in [b, \lambda b] \to \frac{\lambda b - t}{\lambda b - b}$ qui décroît de 1 à 0.

Exo.10) Quelle est la nature des séries suivantes ?

a) $\sum \frac{\arctan(n)}{n}$ b) $\sum \frac{\exp(\arctan(n))}{1 + n^2}$

[15] Le cours de Physique de Feynman, Mécanique 2, InterEditions, Paris (1979), p.63.

c) $\arccos(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha})$ avec $\alpha > 0$ d) $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \frac{n}{\ln(n)}}$

Exo.11) Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})$. On pourra montrer au préalable que $\tan(x) = \text{cotan}(x) - 2\text{cotan}(2x)$, pour $x \neq 0 \bmod \frac{\pi}{2}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\frac{2}{n^2})$. On pourra d'abord montrer que : $\forall\ n \geq 3$, $\tan(\sum_{k=3}^{n} \arctan(\frac{2}{k^2})) = \frac{n^2 - n - 2}{n^2 + 3n}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}})$. Il est possible qu'on soit amené à utiliser la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n))$. Il en sera de même pour le e) et le f).

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3 - (2n+1)}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$, où a_n est le nombre de chiffres égaux à 1 dans l'écriture binaire de n. Par exemple, $13 = 1101_b$ donc $a_{13} = 3$. On pourra chercher une relation simple entre a_{2n} et a_n, et entre a_{2n+1} et a_n.

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4})$

Exo.12) a) En 1827, Louis Olivier écrit dans un mémoire[16] que, pour toute suite (u_n) positive, on a $\lim_{n\to\infty} nu_n = 0 \Leftrightarrow \sum u_n$ converge. Montrer que l'implication $\Rightarrow$ est fausse en donnant un contre-exemple.

b) En 1828, Niels Abel[17] montre qu'il impossible qu'il puisse exister un critère de convergence d'une série basé simplement sur l'existence d'une suite (a_n) strictement positive telle

[16] Louis Olivier, *Remarques sur les séries infinies et leur convergence*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (1827), Volume 2, page 33.
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0002&DMDID=dmdlog8

[17] Niels Abel, *Note sur un mémoire de M. L. Olivier, ayant pour titre "Remarques sur les séries infinies et leur convergence"*, Oeuvres complètes, t.1, p.399 (Journal de Crelle, 1828)
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2437b/f414.image.r=.langFR

que, pour toute suite (u_n) positive, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{a_n} = 0 \Leftrightarrow \sum u_n$ converge. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle suite existe. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que $\sum a_n$ diverge, que $\sum \dfrac{a_n}{S_{n-1}}$ converge et que ces deux affirmations sont contradictoires (on pourra considérer la série $\sum \ln(1 + \dfrac{a_n}{S_{n-1}})$).

c) En 1870, Joseph Bertrand[18] affirme que l'implication $\Leftarrow$ d'Olivier, à savoir "$\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$" est vraie. Montrer que ce n'est pas le cas en donnant un contre-exemple[19].

d) Montrer néanmoins que l'implication précédente est vraie si on suppose (u_n) positive décroissante, propriété énoncée par Catalan[20] en 1860, mais sans preuve.

Exo.13) Décomposition factorielle d'un réel.

a) Soit x un réel élément de $[0, 1]$. Montrer que x peut se mettre sous la forme $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{a_k}{k!}$, où, pour tout k, a_k est un entier vérifiant $0 \leq a_k \leq k - 1$. A quelle condition sur x y a-t-il unicité de la décomposition ?

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos(n!2\pi x) - \cos(2\pi \dfrac{a_{n+1}}{n+1})) = 0$.

c) En déduire que tout nombre entre -1 et 1 est limite d'une suite de terme général $\cos(n!2\pi x)$, pour un x bien choisi.

Exo.14) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+1} = \dfrac{1}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2(-1)^n}{(n^2+1)(n^2+n+2)(n^2-n+2)}$. Pour cela, on pourra vérifier que :

$$\frac{1}{n^2+1} - \frac{2}{(n^2+1)(n^2+n+2)(n^2-n+2)} = \frac{1}{2(n^2-n+2)} + \frac{1}{2(n^2+n+2)}$$

b) Quelle valeur donner à n pour obtenir dix décimales de la somme S de la série à l'aide de la somme partielle de n termes de la première série, respectivement de la deuxième ? Utiliser la deuxième somme pour donner les dix décimales demandées, et comparer avec une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{2\mathrm{sh}(\pi)} + \dfrac{1}{2}$. Une preuve que cette expression est égale à la somme de la série peut se faire au moyen du chapitre L3/FOURIER.PDF.

Exo.15) Soit c un réel strictement positif et (u_n) une suite positive vérifiant la relation :

$$\forall\, n \geq 1,\ u_n = cu_{n-1} + n^2$$

Montrer que :

[18] Joseph Bertrand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t.1, Gauthier-Villars (Paris), 1864-1870, p.239 http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99558p/f297.image.r=.langEN

[19] Un tel contre-exemple est donné par Giuseppe Peano, *Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale* (1884).

[20] Eugène Catalan, *Traité élémentaire des séries* (1860), p.17 https://archive.org/stream/traitlmentaired01catagoog#page/n31/mode/2up

a) Si $c = 1$, $u_n = O(n^3)$
b) Si $c > 1$, $u_n = O(c^n)$
c) Si $c < 1$, $u_n = O(n^2)$
Pour cela, on cherchera à déterminer l'expression générale de u_n dans chaque cas.

Exo.16) Soit (u_n) une suite réelle.

a) A-t-on : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow (u_n)$ converge ?

b) A-t-on : $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0 \Rightarrow (u_n)$ converge ?

c) A-t-on : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0$?

d) A-t-on : $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} - u_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$?

e) A-t-on : $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge $\Rightarrow (u_n)$ converge ?

f) A-t-on : (u_n) converge $\Rightarrow \sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ?

g) A-t-on : (u_n) converge $\Rightarrow \sum |u_{n+1} - u_n|$ converge ?

h) Montrer que : $\exists\, (v_n)$ croissante et convergente, $\exists\, (w_n)$ décroissante et convergente telles que, $\forall n$, $u_n = v_n + w_n \Rightarrow \sum |u_{n+1} - u_n|$ converge.

i) Montrer la réciproque du h)

Exo.17) Soit (a_n) une suite réelle telle que, pour tout n, $a_n \neq -1$.

a) Montrer que :

$$\left[\begin{array}{l} \sum a_n \text{ converge} \\ \sum a_n^2 \text{ converge} \end{array}\right. \Rightarrow \ \Pi\,(1 + a_n) \text{ converge vers une limite non nulle}$$

b) Montrer que l'implication peut être fausse si on suppose seulement la convergence de $\sum a_n$.

c) L'implication du a) reste-t-elle vraie pour une suite complexe ?

Exo.18) Soit x_0 un réel strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$, et (x_n) la suite définie par la relation de récurrence : $\forall\, n$, $x_{n+1} = x_n^2 + \dfrac{1}{4}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

b) Montrer que : $\exists\, c$, $x_n = c^{2^n} + o(1)$ quand n tend vers l'infini.

c) Montrer que $\dfrac{c}{x_0}$ tend vers 1 quand x_0 tend vers $+\infty$.

Exo.19) Soient α un réel ou un complexe, et (x_n) une suite réelle ou complexe. On définit la suite (y_n) telle que, pour tout $n \geq 1$, $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$.

a) Pour tout $n \geq 0$, exprimer x_n en fonction de $x_0, y_1, \ldots, y_n$, n et α.

b) En déduire que, si $|\alpha| < 1$, alors : (y_n) converge $\Rightarrow (x_n)$ converge.

c) Montrer que, si $|\alpha| > 1$, alors : (y_n) converge et (x_n) bornée $\Rightarrow (x_n)$ converge. (On pourra exprimer x_n en fonction de $y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \ldots$).

Exo.20) Soit P l'ensemble des nombres pairs qui ne sont pas puissances (supérieures ou égales à 2) d'un autre nombre (les premiers éléments de P sont 2, 6, 10, 12, ...) et I = P $\times$ [[1, +∞]] $\times$ [[2, +∞]].

a) Montrer que la famille $(\frac{1}{a^{nk}})$, $(a, n, k) \in$ I, est une famille sommable.

b) En calculant $\sum_{(a,n,k)\in \mathrm{I}} \frac{1}{a^{nk}}$ de deux façons différentes, démontrer l'égalité suivante, découverte par Euler (Voir Annexe I-2) :

$$\ln(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$$

où les dénominateurs valent 1 de moins que les puissances supérieures ou égales à 2 de nombres pairs ($2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 4^2 = 16$, $2^5 = 32$, $6^2 = 36$, $2^6 = 4^3 = 64$, etc.).

c) Montrer de même que l'on a $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \dots$, où les dénominateurs valent 1 de moins que les puissances d'entiers, au moins égales à 2 ($2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $3^2 = 9$, $2^4 = 4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $3^3 = 27$, etc.).

Exo.21) Montrer que $\frac{1+z}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1} = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ pour } |z| < 1 \\ -1 \text{ pour } |z| > 1 \end{array} \right.$.

2- Solutions

Sol.1) a) L'intégrale est généralisée en +∞. En effet, en 0, la fonction $\frac{x\ln(x)}{1+x^2}$ se prolonge par continuité par la valeur nulle et $\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ est donc une simple intégrale d'une fonction continue sur le segment [0, 1]. Pour $x \geq 1$, la fonction $\frac{x\ln(x)}{1+x^2}$ est positive et on peut procéder par minoration et équivalence. Pour $x \geq e$, $\ln(x) \geq 1$, donc, au voisinage de +∞, $\frac{x\ln(x)}{1+x^2} \sim \frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$ fonction dont l'intégrale en +∞ diverge. Par conséquent $\int_0^\infty \frac{x\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ diverge également.

b) L'intégrale est généralisée en 0 et en +∞. Au voisinage de ces deux bornes, la fonction à intégrer est de signe constant. On peut donc procéder par équivalence.

Au voisinage de 0, $\frac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha} \sim \ln(x)$, fonction intégrable sur]0, 1], donc $\frac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha}$ est intégrable sur]0, 1].

Au voisinage de +∞, si $\alpha \leq 1$, $\frac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha} \geq \frac{\ln(x)}{1+x} \geq \frac{1}{1+x}$ fonction dont l'intégrale diverge en +∞. Donc l'intégrale de $\frac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha}$ diverge en +∞. Si $\alpha > 1$, pour x assez grand $\ln(x) \leq (1+x)^{(\alpha-1)/2}$, donc $\frac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha} \leq \frac{1}{(1+x)^{(\alpha+1)/2}} \sim \frac{1}{x^{(\alpha+1)/2}}$ fonction de référence avec $\frac{\alpha+1}{2} > 1$. La fonction $\frac{1}{x^{(\alpha+1)/2}}$ est donc intégrable au voisinage de $+\infty$ et il en est donc de même de la fonction $\dfrac{1}{(1+x)^{(\alpha+1)/2}}$ qui lui est équivalente, et de la fonction $\dfrac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha}$ qui est inférieure à cette dernière.

Ainsi $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

c) L'intégrale est généralisée aux deux bornes. La fonction $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ étant positive, on peut procéder par équivalence. Au voisinage de a :

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,\frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,\frac{1}{(x-a)^\alpha} \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2}$$

Comme $\dfrac{1}{2} < 1$, la fonction $\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable au voisinage de a, donc $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ aussi.

On procède de même au voisinage de b. Donc $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$ converge. On a alors :

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{-x^2+(b+a)x-ab}}\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}\,dx$$

$$= \left[\arcsin\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)\right]_a^b = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$$

L'intégrale ne dépend pas de a ni de b, ce qu'on peut aussi mettre en évidence par le changement de variable $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\sin(\theta)$. On obtient en effet :

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{(1+\sin(\theta))(1-\sin(\theta))}}\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi$$

d) La fonction $e^{-x}\sin^n(x)$ changeant de signe si n est impair, on passe par les valeurs absolues :

$$\left|e^{-x}\sin^n(x)\right| \le e^{-x}$$

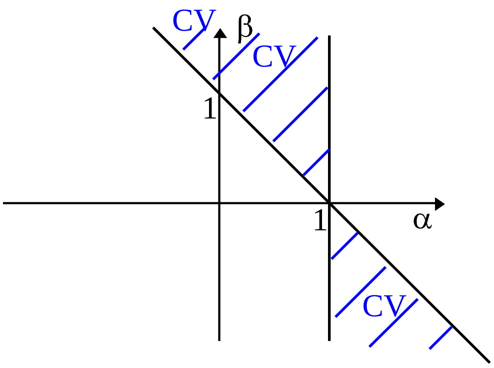
Comme e^{-x} est intégrable sur $[0, +\infty[$, il en est de même de $e^{-x}\sin^n(x)$.

e) Si $\beta > 0$, alors $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t^\beta)} \sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ en 0 et $\sim \dfrac{1}{t^{\alpha+\beta}}$ en $+\infty$. Il y a convergence si et seulement si $\alpha < 1$ et $\alpha + \beta > 1$

Si $\beta = 0$, alors l'intégrale diverge.

Si $\beta < 0$, alors $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t^\beta)} \sim \dfrac{1}{t^{\alpha+\beta}}$ en 0 et $\sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$. Il y a convergence si et seulement si $\alpha > 1$ et $\alpha + \beta < 1$

Ci-dessus, on a hachuré le domaine de convergence.



Sol.2) a) Sur $]0, 1]$, $\dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$ est de signe constant et équivalent en 0 à la fonction $\ln(x)$ qui est intégrable sur $]0, 1]$. Donc $\dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Quand x tend vers $+\infty$, $0 \leq \dfrac{\ln(x)}{x^2+1} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1} \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$, cette dernière fonction étant intégrable sur $[1, +\infty[$ car l'exposant $\dfrac{3}{2}$ est strictement supérieur à 1. Donc $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$, qui lui est équivalente, est intégrable sur $[1, +\infty[$, et $\dfrac{\ln(x)}{x^2+1}$, fonction positive majorée par une fonction intégrable, l'est également.

Les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$ étant convergentes, il en est de même de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx$.

b) Si on effectue le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ dans la première intégrale, on obtient l'opposé de la deuxième. Donc $I = 0$.

c) Posons $x = bt$. $J = \displaystyle\frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\ln(abt)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\ln(ab)}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{\ln(ab)}{b} \times \frac{\pi}{2}$

Sol.3) a) Les deux intégrales convergent car, par exemple pour la première, $\ln(\sin(t))$ est de signe constant sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$ et équivalente en 0 à la fonction intégrable $\ln(t)$. On procèdera de même pour la deuxième intégrale au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$.

<u>Méthode 1</u> :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\,du \text{ en posant } u = \frac{\pi}{2} - t. \text{ Par ailleurs :}$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) - \ln(2)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt - \frac{\pi}{2}\ln(2) \qquad \text{en faisant le changement de variable } 2t \to t$$

or $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$ par la changement de variable $t \to \pi - t$, donc :

$$2\mathrm{I} = \mathrm{I} - \frac{\pi}{2}\ln(2) \Rightarrow \mathrm{I} = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Méthode 2 :
On peut aussi procéder au moyen de sommes de Riemann, mais les intégrales étant généralisées, il convient de prendre des précautions. On a :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,\mathrm{d}x \qquad \text{au moyen du changement de variable } t = \frac{\pi x}{2}$$

On utilise le fait que la fonction $x \in\ ]0, 1] \to \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))$ est croissante pour encadrer l'intégrale. Commençons par la majoration :

$$\int_0^1 \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\sin(\frac{k\pi}{2n}))\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(\sin(\frac{k\pi}{2n})) = \frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n}))$$

Or, il a été prouvé dans les exercices du chapitre sur les nombres complexes L1/COMPLEXE.PDF que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$. Donc, en remplaçant n par $2n$:

$$\prod_{k=1}^{2n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{4n}{2^{2n}}$$

donc $$\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) \times \sin(\frac{\pi}{2}) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \frac{4n}{2^{2n}}$$

Comme $\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \sin(\pi - \frac{k\pi}{2n}) = \sin(\frac{(2n-k)\pi}{2n})$ et que $2n - k$ décrit $[\![n + 1, 2n - 1]\!]$ lorsque k décrit $[\![1, n - 1]\!]$, les deux produits $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n})$ et $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n})$ sont égaux (et positifs), donc :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{2n}) = \sqrt{\frac{4n}{2^{2n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{2^n}$$

donc $\displaystyle\frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{n}\sin(\frac{k\pi}{2n})) = \frac{1}{n}\ln(\frac{2\sqrt{n}}{2^n}) = \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln(n)}{2n} - \ln(2)$ quantité qui tend vers $-\ln(2)$ quand n tend vers l'infini.
Procédons à la minoration de l'intégrale :

$$\int_0^1 \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx$$

$$\geq \int_0^{1/n} \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx + \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \ln(\sin(\frac{(k-1)\pi}{2n}))\,dx$$

$$\geq \int_0^{1/n} \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} \ln(\sin(\frac{(k-1)\pi}{2n}))$$

$$\geq \int_0^{1/n} \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \ln(\sin(\frac{k\pi}{2n})) \text{ en changeant d'indice}$$

$$\geq \int_0^{1/n} \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx + \frac{1}{n} \ln(\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})) \text{ en changeant d'indice}$$

Comme l'intégrale de $\ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))$ est convergente en 0, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{1/n} \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx = 0$. Par ailleurs, $\frac{1}{n} \ln(\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n}))$, qui est égal à $\frac{1}{n} \ln(\prod_{k=1}^{n} \sin(\frac{k\pi}{2n}))$, converge vers $-\ln(2)$.

$\int_0^1 \ln(\sin(\frac{\pi x}{2}))\,dx$ étant encadrée par deux suites qui convergent vers $-\ln(2)$, on en déduit que $-\ln(2)$ est sa valeur. Donc $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

b) L'intégrale est convergente car $\frac{\theta}{\tan(\theta)}$ se prolonge par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. Il s'agit donc en fait d'une intégrale simple sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On intègre par parties en prenant $u = \theta$ et $v' = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ de primitive $v = \ln(\sin(\theta))$. On obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan(\theta)}\,d\theta = \Big[\theta\ln(\sin(\theta))\Big]_0^1 - \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta))\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln(2)$$

Ci-dessus, on a abrégé par $\Big[\theta\ln(\sin(\theta))\Big]_0^1$ la quantité $\lim\limits_{x\to 0} \Big[\theta\ln(\sin(\theta))\Big]_x^1$.

c) La fonction $\frac{\arctan(t)}{t(1+t^2)}$ se prolonge par continuité en 0. En $+\infty$, c'est un $O(\frac{1}{t^3})$, donc la fonction est intégrable. Si on pose $t = \tan(\theta)$, on retrouve l'intégrale b). Donc $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(t)}{t(1+t^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Dans le chapitre L2/SUITESF.PDF traitant des intégrales dépendant d'un paramètre, on montre plus généralement que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$ pour $x \geq 0$.

d) $1 - 2a\cos(x) + a^2 = (a - \cos(x))^2 + \sin^2(x) \geq 0$ et ne peut s'annuler que pour $x = 0$ ou π et $a = \pm 1$. L'intégrale n'est donc généralisée que pour $a = 1$ (en $x = 0$), ou bien $a = -1$ (en $x = \pi$).
Dans le premier cas, on a, au voisinage de 0 :

$$\ln(1 - 2a\cos(x) + a^2) = \ln(2 - 2\cos(x)) = \ln(x^2 + o(x^2)) = 2\ln(x) + \ln(1 + o(1)) \sim 2\ln(x)$$

La fonction $2\ln(x)$ est de signe constant au voisinage de 0, et est intégrable. Il en est donc de même de $\ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)$.
On procède de même pour $a = -1$, au voisinage de π.
Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\,dx$ converge, quel que soit a.
Pour $a = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\,dx &= \int_0^{\pi} \ln(2 - 2\cos(x))\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \ln(4\sin^2(\frac{x}{2}))\,dx \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \ln(4\sin^2(t))\,dt \quad \text{en posant } t = \frac{x}{2} \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \ln(4) + \ln(\sin^2(t))\,dt \\
&= \pi\ln(4) + 4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt \\
&= \pi\ln(4) - 4 \times \frac{\pi}{2}\ln(2) = 0
\end{aligned}$$

Pour $a = -1$, on obtiendra de même :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\,dx &= \int_0^{\pi} \ln(2 + 2\cos(x))\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \ln(4\cos^2(\frac{x}{2}))\,dx \\
&= \pi\ln(4) + 4\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour $a \neq \pm 1$, l'intégrale est une intégrale simple, limite de ses sommes de Riemann.

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1 - 2a\cos(\frac{k\pi}{n}) + a^2)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + a^2\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^{n} (a - e^{ik\pi/n})(a - e^{-ik\pi/n})\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{(a^{2n} - 1)(a + 1)}{a - 1} \text{ en utilisant la relation } z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1} (z - e^{ik\pi/n})$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } |a| < 1 \\ \pi \ln(a^2) \text{ sinon} \end{cases}$$

Sol.4) a) La fonction ne tend pas vers 0 puisqu'elle prend la valeur 1 aux points $x = k\pi$.
La fonction étant positive, l'intégrale partielle $X \to \int_0^X \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\, dx$ est croissante, et il suffit de montrer qu'elle est majorée pour montrer qu'elle converge. Pour cela, prenons n tel que $n\pi \geq X$. On a alors :

$$\int_\pi^X \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\, dx \leq \int_\pi^{n\pi} \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\, dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{1}{1 + (x + k\pi)^3\sin^2(x)}\, dx \qquad \text{par périodicité}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\, dx$$

Prenons un réel a tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$. On a, pour tout $k \geq 1$:

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\, dx$$

l'intégrale sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ étant égale à celle sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ par le changement de variable $x \to \pi - x$

$$= 2\int_0^a \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\, dx + 2\int_a^{\pi/2} \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\, dx$$

$$\leq 2a + 2\int_a^{\pi/2} \frac{1}{k^3\pi^3\sin^2(x)}\, dx$$

$$\leq 2a + \frac{2}{k^3\pi^3} \left[- \text{cotan}(x)\right]_a^{\pi/2}$$

$$\leq 2a + \frac{2\text{cotan}(a)}{k^3\pi^3}$$

Si on prend $a = \frac{1}{k^{3/2}}$, a tend vers 0 quand k tend vers l'infini, donc $\text{cotan}(a) \sim \frac{1}{a} \sim k^{3/2}$ donc $\frac{2\text{cotan}(a)}{k^3\pi^3}$ est un $O(\frac{1}{k^{3/2}})$ donc $\int_0^\pi \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\,dx$ aussi, donc $\sum \int_0^\pi \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\,dx$ est une série convergente, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{1}{1 + k^3\pi^3\sin^2(x)}\,dx$ est défini et est un majorant de $\int_\pi^X \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\,dx$.
Donc $\int_\pi^\infty \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\,dx$ est une intégrale convergente et il en est de même de $\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^3\sin^2(x)}\,dx$.

b) Si la limite est non nulle ou n'existe pas, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (x_n) qu'on peut supposer croissante et tendant vers l'infini telle que $|f(x_n)| > \varepsilon$. Si f est K-lipschitzienne, alors dans l'intervalle $]x_n - \frac{\varepsilon}{2K}, x_n + \frac{\varepsilon}{2K}[$, $|f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$. Donc sur cet intervalle, l'intégrale de $|f|$ vaut au moins $\frac{\varepsilon^2}{2K}$, or cette quantité devrait tendre vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque, si on pose $F(X) = \int_0^X |f(x)|\,dx$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_n-\varepsilon/(2K)}^{x_n+\varepsilon/(2K)} |f(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} F(x_n + \frac{\varepsilon}{2K}) - F(x_n - \frac{\varepsilon}{2K}) = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to\infty} F(x) = 0$$

c) On adapte la démonstration du c). Si la limite est non nulle, il existe $\varepsilon > 0$, et une suite (x_n) qu'on peut supposer croissante et tendant vers l'infini telle que $|f(x_n)| > \varepsilon$. Or, f étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall\ x$, $\forall\ y$, $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc, dans l'intervalle $]x_n - \delta, x_n + \delta[$, $|f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$. donc sur cet intervalle, l'intégrale de $|f|$ vaut au moins $\varepsilon\delta$, or, comme dans le b), cette quantité devrait tendre vers 0 quand n tend vers l'infini[21].

e) Puisque f est positive décroissante, f admet une limite en $+\infty$ et, pour que l'intégrale converge, il faut que cette limite soit nulle. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $x \to \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc :

$\exists\ A > 0$, $\int_A^\infty f(t)\,dt < \varepsilon$ et a fortiori, f étant positive :

$\forall\ t > A$, $\int_A^t f(u)\,du \leq \int_A^\infty f(t)\,dt < \varepsilon$

puis f tend vers 0 donc : $\exists\ B$, $\forall\ t > B$, $0 \leq f(t) < \frac{\varepsilon}{A}$.

[21] Voir aussi : Emmanuel Lesigne, On the behavior at infinity of an integrable function, *Amer. Math. Monthly*, vol.117, n°2 (février 2010), 175-181, doi.org/10.4169/000298910X476095
Bálint Farkas, Sven-Ake Wegner, Variations on Barbalat's lemma, *Amer. Math. Monthly*, vol.123, n°8 (octobre 2016), 825-830.

Alors, pour $t > \text{Max}(A, B)$, f étant décroissante :

$$\varepsilon > \int_A^t f(u)\,du \geq \int_A^t f(t)\,du = (t - A)f(t) = tf(t) - Af(t)$$

donc $\quad 0 \leq tf(t) \leq \varepsilon + Af(t) < 2\varepsilon$

On a montré que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M, \forall\, t > M, |tf(t)| < \varepsilon$$

ce qui est la définition de $tf(t) \to 0$ quand t tend vers l'infini. Donc $f(t) = o(\frac{1}{t})$.

Sol.5) a) Pour la convergence des intégrales, remarquer que les fonctions à intégrer sont positives et majorer e^{-u} par une puissance suffisante de $\frac{1}{u}$ quand u tend vers l'infini.

Notons maintenant I_n et J_n les deux intégrales. Elles sont même valeur initiale $I_0 = J_0$. Montrons qu'elles vérifient la même récurrence :

❑ Pour la première intégrale :

$$I_n = \int_0^\infty \frac{u^n e^{-u}}{1+u}\,du = \int_0^\infty \frac{(u^n + u^{n-1})\,e^{-u}}{1+u}\,du - I_{n-1}$$

$$= \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\,du - I_{n-1}$$

$$= (n-1)! - I_{n-1}$$

❑ Pour la deuxième intégrale, intégrons par parties, avec :

$$f' = \frac{1}{(1+u)^{n+1}} \qquad g = e^{-u}$$

$$f = -\frac{1}{n(1+u)^n} \qquad g' = -e^{-u}$$

Donc $\quad J_n = (n-1)! - J_{n-1}$

Par récurrence, $I_n = J_n$.

REMARQUE :

J_n apparaît naturellement quand on intègre successivement par parties $\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1+u}\,du$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1+u}\,du = 1 - 1 + 2! - 3! + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)! + (-1)^n J_n$$

formule où apparaît la somme partielle divergente $1 - 1 + 2! - 3! + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!$, évoquée dans l'annexe I-2).

I_n apparaît quand on écrit que $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \ldots + (-1)^{n-1}u_{n-1} + \frac{(-1)^n u^n}{1+u}$, d'où l'on tire :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1+u}\,du = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\infty u^k e^{-u}\,du + (-1)^n I_n$$

$$= 1 - 1 + 2! - 3! + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)! + (-1)^n I_n$$

b) Le changement de variables $\sin(t) = \tan(\frac{\theta}{2})$ dans la première intégrale conduit à l'égalité :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$$

En effet, $\cos(t) = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \dfrac{\sqrt{\cos(\theta)}}{\cos(\theta/2)}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\cos(\theta/2)\sqrt{\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$. Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan(\theta/2)}}\ \frac{1}{2\cos(\theta/2)\sqrt{\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{4\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\theta)}}\,\mathrm{d}\theta.$$

On peut également passer par le changement de variables intermédiaire et plus naturel $x = \sin(t)$ qui conduit à $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}}\,\mathrm{d}x$ avant de poser $x = \tan(\dfrac{\theta}{2})$.

Sol.6) a) $1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) + ... + 2\cos(nt) = 1 + e^{it} + e^{-it} + e^{2it} + e^{-2it} + ... + e^{int} + e^{-int}$

$$= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad \text{somme d'une suite géométrique de raison } e^{it}$$

$$= e^{-int}\,\frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}}$$

$$= e^{-int}\,\frac{e^{(2n+1)it/2}}{e^{it/2}}\,\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

On peut aussi procéder par récurrence. Pour cela, on devra vérifier par exemple que :

$$\sin(\frac{(2n+1)t}{2}) + 2\sin(\frac{t}{2})\cos((n+1)t) = \sin(\frac{(2n+3)t}{2})$$

b) On intègre par parties :

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[-f(t)\cos(xt)\Big]_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

Le crochet est borné de même que l'intégrale. Leur produit par $\dfrac{1}{x}$ admet donc une limite nulle.

c) En 0, la fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ se prolonge par continuite. La convergence de l'intégrale en $+\infty$ est montrée dans le cours.

La fonction $f : t \to \dfrac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} - \dfrac{1}{t}$ se prolonge sur $[0, \pi]$ en une fonction C^1. Pour le voir, effectuer des développements limités en 0 de cette fonction et de sa dérivée pour prouver qu'elles admettent une limite en 0 (on trouvera 0 comme limite de la fonction, et $\dfrac{1}{24}$ comme limite de sa dérivée, après un calcul assez fastidieux). On a donc :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right) \sin\frac{(2n+1)t}{2}\,dt \qquad \text{d'après b)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \frac{1}{2} + \cos(t) + ... + \cos(nt)\,dt - \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{t}\,dt \qquad \text{d'après a)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

avec le changement de variable $x = \dfrac{(2n+1)t}{2}$ dans la dernière intégrale

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

D'où le résultat.

D'autres démonstrations de la valeur de l'intégrale de Dirichlet sont données dans les exercices du chapitre L2/SUITESF.PDF et dans le cours du chapitre L2/SERIENTR.PDF. Une dernière démonstration se trouve dans les exercices de L3/FOURIER.DOC.

d) La fonction $f : t \to \dfrac{t(\pi - t)}{\sin(t)}$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur π. Calculer sa dérivée et effectuer courageusement un développement limité pour montrer que sa dérivée se prolonge aussi en 0 par la valeur -1 pour conclure sur le caractère C^1 de f. En π, le calcul est inutile en remarquant que $f(t) = f(\pi - t)$.

On a donc :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{t(\pi - t)}{\sin(t)} \sin((2n+1)t)\,dt \qquad \text{d'après le b)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi t(\pi - t)(1 + 2\cos(2t) + ... + 2\cos(2nt))\,dt \qquad \text{d'après le a)}$$

Il suffit ensuite de vérifier que :

$$\int_0^\pi t(\pi - t)\,dt = \frac{\pi^3}{6}$$

et que (en intégrant par parties) :

$$\forall k \geq 1,\ \int_0^\pi t(\pi - t)\cos(2kt)\,dt = -\frac{\pi}{2k^2}$$

pour obtenir :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^3}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{k^2}$$

soit $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$

Sol.7) a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$, $\exists$ A, $\forall\, t >$ A, $|f(t)| < \varepsilon g(t)$. On a alors, pour $x >$ A :

$$\left| \int_x^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_x^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

On a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{A}, \forall\, x > \mathrm{A}, \left| \dfrac{\int_x^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t} \right| < \varepsilon$

ce qui est la définition de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int_x^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t} = 0$. Donc $\int_x^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(\int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t)$.

Puis :

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \times (1 + \mathrm{o}(1)) = g + \mathrm{o}(g) \Leftrightarrow f - g = \mathrm{o}(g)$$

Donc, d'après ce qui précède :

$$\int_x^{\infty} f(t) - g(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(\int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t)$$

donc $\displaystyle \int_x^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(\int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t) \sim \int_x^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$

b) De même, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ A tel que : $\forall\, t >$ A, $|f(t)| < \varepsilon g(t)$. D'où, pour $x >$ A :

$$\left| \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\mathrm{A}} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{A}}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\mathrm{A}} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon \int_{\mathrm{A}}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \mathrm{Cte} + \varepsilon \int_{\mathrm{A}}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{Cte} + \varepsilon \int_0^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons $\mathrm{G}(x) = \int_0^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$. Comme G($x$) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, il existe B tel que, quel que soit $x >$ B, on a $\dfrac{\mathrm{Cte}}{\mathrm{G}(x)} < \varepsilon$. Donc, pour $x >$ Max(A,B), $\left| \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right| < 2\varepsilon \mathrm{G}(x)$.

On a prouvé que : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{A}, \forall\, x > \mathrm{A}, \left| \dfrac{\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x} g(t)\,\mathrm{d}t} \right| < 2\varepsilon$. Donc $\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(\int_0^{x} g(t)\,\mathrm{d}t)$.

Procéder comme au a) dans le cas où $f \sim g$.

A noter que, si g change de signe, la conclusion peut être fausse : prendre $g(t) = \sin(t)$ et $f(t) = \dfrac{|\sin(t)|}{1+t^2}$. $f = o(g)$ en $+\infty$, mais $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = 1 - \cos(x)$ s'annule une infinité de fois dans tout voisinage de l'infini, alors que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ tend vers une limite strictement positive.

Si $\displaystyle\int_0^\infty g$ converge, c'est également faux. Prendre $g(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$ et $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^3}$. $f = o(g)$ en $+\infty$ mais $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ tend vers 1 alors que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ n'est pas un o(1) puisqu'il ne tend pas vers 0.

c) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes, telles que, $\forall\ n$, $v_n \geq 0$ et $u_n = o(v_n)$. Alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o(\sum_{k=n}^{\infty} v_k)$ quand n tend vers l'infini. Si $u_n \sim v_n$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, telles que $\forall\ n$, $v_n \geq 0$, $\sum v_n$ diverge, et $u_n = o(v_n)$. Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o(\sum_{k=0}^{n} v_k)$ quand n tend vers l'infini. Si $u_n \sim v_n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On adaptera les démonstrations données en a) et b) en remplaçant les $\displaystyle\int_x^\infty$ par $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}$, et les $\displaystyle\int_0^x$ par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$.

Sol.8) a) Pour tout $x > 0$, $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq \dfrac{1}{x} < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1$, donc $0 \leq \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$, d'où l'intégrabilité sur]0, 1].

b) On a, pour tout n entier :

$$\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{1}{x} - k\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\frac{k+1}{k}) - k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\frac{k+1}{k}) - \frac{1}{k+1}$$

$$= \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to 1 - \gamma$$

Sol.9) a) Il suffit de prendre le module de la fonction pour constater qu'elle est intégrable sur $[a, +\infty[$.

b) On intègre deux fois par parties :

$$\int_a^\infty e^{-ix} \frac{a^2}{x^2}\,dx = \frac{e^{-ia}}{i} - \int_a^\infty \frac{e^{-ix}}{i} \frac{2a^2}{x^3}\,dx = \frac{e^{-ia}}{i} + \frac{2e^{-ia}}{a} - \int_a^\infty e^{-ix} \frac{6a^2}{x^4}\,dx$$

$$= \frac{e^{-ia}}{i}\,(1 + \frac{2i}{a} - ie^{ia} \int_a^\infty e^{-ix} \frac{6a^2}{x^4}\,dx)$$

On aura prouvé que l'équivalent est bien $\dfrac{e^{-ia}}{i}$ si on montre que $\dfrac{2i}{a} - ie^{ia}\displaystyle\int_a^{\infty} e^{-ix}\ \dfrac{6a^2}{x^4}\,\mathrm{d}x$ tend vers 0 quand a tend vers l'infini, ce qui est évident pour $\dfrac{2i}{a}$. Quant à l'intégrale, son module est majoré par $\displaystyle\int_a^{\infty} \dfrac{6a^2}{x^4}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{a}$.

c) La fonction $x \to e^{-ix}\,\dfrac{a}{x}$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ puisque son module vaut $\dfrac{a}{x}$ dont l'intégrale diverge en l'infini. On procède donc comme suit. Soit $b > a$. On intègre par parties :

$$\int_a^b e^{-ix}\,\frac{a}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-ia}}{i} - \frac{e^{-ib}a}{ib} - \int_a^b \frac{e^{-ix}}{i}\,\frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

donc, quand b tend vers l'infini :

$$\int_a^{\infty} e^{-ix}\,\frac{a}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-ia}}{i} - \int_a^{\infty} \frac{e^{-ix}}{i}\,\frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

L'intégrale, dans le membre de droite, est celle du a) multipliée par $\dfrac{1}{ia}$. Elle est donc équivalente, d'après le b), à $-\dfrac{e^{-ia}}{a}$ et est négligeable devant $\dfrac{e^{-ia}}{i}$ quand a tend vers l'infini. Donc :

$$\int_a^{\infty} e^{-ix}\,\frac{a}{x}\,\mathrm{d}x \sim \frac{e^{-ia}}{i}$$

d) $\displaystyle\int_a^b e^{-it}\,\mathrm{d}t + \int_b^{\lambda b} e^{-it}\,\frac{\lambda b - t}{\lambda b - b}\,\mathrm{d}t = \Big[ie^{-it}\Big]_a^b + \left[ie^{-it}\,\frac{\lambda b - t}{\lambda b - b}\right]_b^{\lambda b} + \frac{1}{\lambda b - b}\int_b^{\lambda b} ie^{-it}\,\mathrm{d}t$

en intégrant par parties la deuxième intégrale

$$= ie^{-ib} - ie^{-ia} - ie^{-ib} + \frac{1}{\lambda b - b}\Big[-e^{-it}\Big]_b^{\lambda b}$$

$$= -ie^{-ia} + \frac{e^{-ib} - e^{-i\lambda b}}{\lambda b - b}$$

$\to \dfrac{e^{-ia}}{i}$ quand b tend vers l'infini.

Sol.10) a) $\dfrac{\arctan(n)}{n}$ est positif et $\dfrac{\arctan(n)}{n} \sim \dfrac{\pi}{2n}$. Comme $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum \dfrac{\arctan(n)}{n}$.

b) $\dfrac{\exp(\arctan(n))}{1 + n^2}$ est positif et $\dfrac{\exp(\arctan(n))}{1 + n^2} = \mathrm{O}(\dfrac{1}{n^2})$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum \dfrac{\exp(\arctan(n))}{1 + n^2}$.

c) Posons $\theta = \arccos(\dfrac{n^\alpha}{1 + n^\alpha})$. Remarquons que $\theta > 0$ et que θ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a également :

$$\frac{n^\alpha}{1 + n^\alpha} = \cos(\theta)$$

$\Leftrightarrow \qquad n^\alpha = \dfrac{\cos(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \sim \dfrac{2}{\theta^2}$

$\Rightarrow \qquad \theta \sim \dfrac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$ donc la série converge si et seulement si $\alpha > 2$

d) On effectue un développement limité à l'ordre 3 :

$$\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\ln(n)}} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n\ln(n)} + \frac{(-1)^n}{n\ln^2(n)} + o(\frac{1}{n\ln^2(n)})$$

Or $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente par application du critère de convergence des séries alternées, $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente par comparaison avec l'intégrale divergente $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ (une primitive de $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ étant $\ln(\ln(x))$), $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\ln^2(n)}$ est absolument convergente, par comparaison avec l'intégrale convergente $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx$ (une primitive de $\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$ étant $-\dfrac{1}{\ln(x)}$), $\sum o(\dfrac{1}{n\ln^2(n)})$ est absolument convergente par la majoration $\left| o(\dfrac{1}{n\ln^2(n)}) \right| \leq \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$ pour n assez grand, et $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$ étant, comme on vient de la voir, convergente. Trois séries sont convergentes, mais la dernière est divergente, donc leur somme donnera une série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\ln(n)}}$ divergente.

On notera que cela donne un nouvel exemple du raisonnement incorrect consistant à dire que :

$$\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\ln(n)}} \sim \frac{(-1)^n}{n} \text{ et } \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\ln(n)}} \text{ converge}$$

En effet, le critère de convergence par équivalent ne doit s'appliquer que sur des séries dont le terme général est de signe constant.

Sol.11) a) $\sum \dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ converge car :

$$\forall\, k \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \leq \frac{1}{k^3}$$

et $\sum \dfrac{1}{k^3}$.

On a $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)} = \dfrac{1}{2(X+1)} - \dfrac{1}{X+2} + \dfrac{1}{2(X+3)}$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+3}\frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)}$$

Tous les autres termes $\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}$ se simplifient.

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4}$.

On peut aussi procéder plus rapidement comme suit, en remarquant que :

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)} - \frac{1}{(X+2)(X+3)} = \frac{2}{(X+1)(X+2)(X+3)}$$

donc $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)}\right)$

qui est une somme télescopique

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$$

d'où le résultat en passant à la limite.

Le raisonnement précédent se généralise, pour tout $p \geq 1$, en :

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)...(X+p)} - \frac{1}{(X+2)(X+3)...(X+p+1)} = \frac{p}{(X+1)(X+2)...(X+p+1)}$$

ce qui conduira à :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)...(k+p+1)} = \frac{1}{p}\times\frac{1}{p!}$$

Si on renomme $k + 1$ en n, on obtient la formule $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)...(n+p)} = \frac{1}{p}\times\frac{1}{p!}$ annoncée plus haut dans le cours.

b) $\sum \frac{1}{2^n}\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}})$ converge car :

$\forall\, n, \frac{1}{2^n}\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}}) \geq 0$

et $\frac{1}{2^n}\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}}) \sim \frac{\pi}{2^{2n+2}}$, terme général d'une série géométrique convergente.

$$\text{cotan}(x) - 2\text{cotan}(2x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \tan(x)$$

On a donc, pour tout entier N :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\tan(\frac{\pi}{2^{n+2}}) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\left(\text{cotan}(\frac{\pi}{2^{n+2}}) - 2\text{cotan}(\frac{\pi}{2^{n+1}})\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2^n} \text{cotan}\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - \frac{1}{2^{n-1}} \text{cotan}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) \qquad \text{série télescopique}$$

$$= \frac{1}{2^N} \text{cotan}\left(\frac{\pi}{2^{N+2}}\right) - 2\,\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^N} \text{cotan}\left(\frac{\pi}{2^{N+2}}\right)$$

Donc, en passant à la limite quand N tend vers l'infini :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{4}{\pi}$$

c) $\sum \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$ converge, car la série est à termes positifs et que $\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n^2}$, avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.

On montre la relation $\tan\left(\sum_{k=3}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)\right) = \frac{n^2 - n - 2}{n^2 + 3n}$ par récurrence sur n. Pour $n = 3$, elle donne :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{2}{9}\right)\right) = \frac{4}{18} \qquad \text{qui est exact.}$$

Si elle est vraie au rang n, alors, au rang $n + 1$, on a :

$$\tan\left(\sum_{k=3}^{n+1} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)\right) = \tan\left(\sum_{k=3}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right) + \arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\tan\left(\sum_{k=3}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)\right) + \frac{2}{(n+1)^2}}{1 - \tan\left(\sum_{k=3}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)\right) \times \frac{2}{(n+1)^2}}$$

$$= \frac{\frac{n^2 - n - 2}{n^2 + 3n} + \frac{2}{(n+1)^2}}{1 - \frac{n^2 - n - 2}{n^2 + 3n} \times \frac{2}{(n+1)^2}} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \dots = \frac{n^2 + n - 2}{n^2 + 5n + 4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - (n+1) - 2}{(n+1)^2 + 3(n+1)}$$

et la relation est vérifiée au rang $n + 1$.

Par récurrence, on a aussi $0 \leq \sum_{k=3}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right) \leq \frac{\pi}{4}$. C'est trivial pour $n = 3$, et si c'est vrai au rang n, alors $0 \leq \sum_{k=3}^{n+1} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right) = \sum_{k=3}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right) + \arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right) \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, mais comme la tangente de

$\sum_{k=3}^{n+1} \arctan(\frac{2}{k^2}))$ est $\frac{(n+1)^2 - (n+1) - 2}{(n+1)^2 + 3(n+1)} \leq 1$, la quantité $\sum_{k=3}^{n+1} \arctan(\frac{2}{k^2}))$ est nécessairement inférieure ou égale à $\frac{\pi}{4}$.

Par conséquent :

$$\sum_{k=3}^{n} \arctan(\frac{2}{k^2}) = \arctan(\frac{n^2 - n - 2}{n^2 + 3n})$$

et donc, en passant à la limite :

$$\sum_{k=3}^{\infty} \arctan(\frac{2}{k^2}) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Enfin :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\frac{2}{n^2}) = \arctan(2) + \arctan(\frac{1}{2}) + \sum_{n=3}^{\infty} \arctan(\frac{2}{n^2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

d) $\sum (\frac{1}{n} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}})$ converge car $\frac{1}{n} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{n(2n-1)}$ est de signe constant, que $\frac{1}{n(2n-1)} \sim \frac{1}{2n^2}$ et que $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge.

$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}})$ s'écrit aussi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1}$.

La constante d'Euler γ est telle que $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1}) &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1}) \\
&= \lim_{N \to +\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N} - 2(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2N-1}) \\
&= \lim_{N \to +\infty} 2(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N}) - 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2N}) \\
&= \lim_{N \to +\infty} 2(\ln(N) + \gamma + o(1)) - 2(\ln(2N) + \gamma + o(1)) \\
&= -2\ln(2)
\end{aligned}$$

Le raisonnement suivant est incorrect : Les termes $\frac{2}{2n-1}$ ne font intervenir que des dénominateurs impairs, alors que les termes $\frac{1}{n}$ font intervenir aussi bien des dénominateurs pairs (pour n pair) qu'impairs (pour n impair). Un terme $\frac{1}{n}$ pour $n = 2k - 1$ se simplifiera donc avec un terme $-\frac{2}{2n-1}$ pour $n = k$, laissant donc un terme $-\frac{1}{2k-1}$. Les termes $\frac{1}{n}$ avec $n = 2k$ ne se simplifient pas et resteront donc $\frac{1}{2k}$. Il en résulte que la somme cherchée n'est autre que $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ qui vaut – ln(2). L'erreur provient du fait que, dans ce raisonnement, on change l'ordre des termes, ce qui change la valeur de la série.

e) $\sum \frac{1}{(2n+1)^3 - (2n+1)}$ converge, car la série est à termes positifs, que $\frac{1}{(2n+1)^3 - (2n+1)} \sim \frac{1}{8n^3}$ et que $\sum \frac{1}{8n^3}$ converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3 - (2n+1)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1})$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{4} (\ln(N) + \gamma + \ln(N+1) - 1 + \gamma + o(1) - 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1})$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{4} (\ln(N) + \ln(N+1) + 2\gamma - 1 + o(1) + 4 - 4 \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n} + 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n})$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{4} (\ln(N) + \ln(N+1) + 2\gamma + 3 - 4 \ln(2N+1) - 4\gamma + 2 \ln(N) + 2\gamma + o(1))$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{4} (\ln(N) + \ln(N+1) + 3 - 4 \ln(2N+1) + 2 \ln(N) + o(1))$$

$$= -\ln(2) + \frac{3}{4}$$

f) Soit $p = a_n$. On a alors $n \geq 1 + 2 + 4 + ... + 2^{p-1} = 2^p - 1$, donc $2^p \leq n + 1$ donc $a_n \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}$ donc :

$$0 \leq \frac{a_n}{n(n+1)} = O(\frac{1}{n^{3/2}})$$

et la série converge car $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

On a $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = a_n + 1$. Donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k(2k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{(2k+2)(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2k(2k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(2k+2)(2k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{a_k}{2k(2k+1)} + \frac{a_k}{(2k+2)(2k+1)}) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2k(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)}$

Reste à calculer la somme de cette dernière série :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{2N+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2}$$

$= \ln(2N) + \gamma - \ln(N) - \gamma + o(1) \to \ln(2)$ quand N tend vers l'infini

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k(k+1)} = 2\ln(2)$.

g) Soit $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k\, t^{2k}\, dt - \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt - \frac{\pi}{4}$

$$= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

Sous cette expression, on voit que $\sum u_n$ est une série alternée vérifiant le critère de Leibniz. Donc $\sum u_n$ est convergente. On a ensuite :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, \frac{1-(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, \frac{(-1)^N t^{2N+2}}{1+t^2}\, dt$$

Comme $\displaystyle\left| \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, \frac{(-1)^N t^{2N+2}}{1+t^2}\, dt \right| = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\, dt \le \int_0^1 t^{2N}\, dt = \frac{1}{2N+1} \to 0$ quand N tend vers l'infini, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\, d\theta \qquad \text{en posant } t = \tan(\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sin^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1 - \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Sachant que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Euler aurait probablement procédé comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = - \sum_{0 \leq n < k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

ce qui est incorrect car la série double n'est pas sommable

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2k+1}$$

qui donne une série divergente !

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k + 1/2 - 1/2)}{2k+1}$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$$

en utilisant abusivement $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2}$, à savoir $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour $x = -1$.

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

qui donne pourtant le résultat exact !!

Sol.12) Dans le même mémoire, Louis Olivier définit la convergence et la divergence d'une série comme suit :

« On appelle convergente une série, qui a les deux propriété suivantes, savoir : qu'on trouve sa valeur numérique d'autant plus exactement qu'on calcule successivement plusieurs termes, et qu'en continuant indéfiniment ce calcul, on peut se rapprocher de la vraie valeur de la série totale à tel degré qu'on voudra.

Au contraire, on appelle indéterminée une série, qui ne donne aucun rapprochement, en continuant le calcul des termes.

Et on appelle divergente une série, dont les termes suivants, ajoutés aux précédents, ne donnent que des résultats qui s'éloignent de plus en plus de la vraie valeur de la série.

Par exemple

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ est une série convergente

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \ldots$ est une série indéterminée

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \ldots$ est une série divergente »

a) Prendre $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, contre-exemple donné par Abel. La divergence de $\sum u_n$ se montre par comparaison série-intégrale.

b) Pour $u_n = a_n$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{a_n} = 1 \neq 0$ donc $\sum a_n$ diverge, donc S_n tend vers l'infini.

Pour $u_n = \dfrac{a_n}{S_{n-1}}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{S_{n-1}} = 0$ donc $\sum \dfrac{a_n}{S_{n-1}}$ converge, et en particulier, $\dfrac{a_n}{S_{n-1}}$ tend vers 0. Mais alors $\dfrac{a_n}{S_{n-1}} \sim \ln(1 + \dfrac{a_n}{S_{n-1}}) = \ln(\dfrac{S_n}{S_{n-1}})$ terme général d'une série télescopique dont la somme partielle vaut $\ln(S_n) - \ln(S_1)$ et qui diverge, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Par l'équivalence, on devrait aussi avoir $\sum \dfrac{a_n}{S_{n-1}}$ divergente, alors qu'elle converge. Contradiction.

c) Prendre par exemple $u_n = 0$ si n n'est pas un carré et $u_n = \dfrac{1}{n}$ si n est un carré.

d) Notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de la série et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ son reste. Pour tout p inférieur à n, on a :

$$S_n - S_p = \sum_{k=p+1}^{n} u_k \geq (n-p)u_n \qquad \text{car la suite } (u_n) \text{ décroît}$$

d'où $\qquad 0 \leq nu_n \leq S_n - S_p + pu_n \leq R_p + pu_n$ et le majorant peut être rendu arbitrairement petit. En effet, soit $\varepsilon > 0$. (R_p) converge vers 0 quand p tend vers l'infini donc il existe p tel que $R_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour un tel p, $(pu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle donc il existe $N \geq p$ tel que, pour $n \geq N$, $0 \leq pu_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq N$, on a donc $0 \leq nu_n \leq \varepsilon$.

Sol.13) a) $\sum \dfrac{a_k}{k!}$ est bien convergente, car son terme général est positif ou nul et est majoré par $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$, terme général d'une série convergente. De plus $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_k}{k!}$ est bien compris entre 0 et 1 car :

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1$$

Plus généralement, remarquons que $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{k-1}{k!} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{(k-1)!} - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{n!}$.

Si $x = 1$, on prendra précisément comme décomposition $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{k-1}{k!}$ et cette décomposition est unique car si l'un des a_k est strictement inférieur à $k-1$, alors $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_k}{k!} < \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{k-1}{k!} = 1$

Soit maintenant x élément de $[0, 1[$. Posons $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a $0 \leq a_2 \leq 1$ et $a_2 \leq 2x < a_2 + 1$ donc $0 \leq x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2}$. Posons $y_2 = x - \frac{a_2}{2}$.

Supposons que, pour n donné, on ait trouvé $a_2, a_3, ..., a_n$ et y_n tels que :

$$0 \leq a_k \leq k - 1 \text{ et } 0 \leq x - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k!} = y_n < \frac{1}{n!}$$

Posons $a_{n+1} = \lfloor (n+1)!y_n \rfloor$. Comme $0 \leq (n+1)!y_n < n + 1$, on a bien $0 \leq a_{n+1} \leq n$. En outre, $a_{n+1} \leq (n+1)!y_n < a_{n+1} + 1 \Rightarrow 0 \leq x - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{k!} = y_n - \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = y_{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}$ et la récurrence est vérifiée.

Supposons que l'on ait deux décomposition distinctes $x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{k!}$ avec $a_2 = b_2, ..., a_{n-1} = b_{n-1}$ et $a_n < b_n$. Alors : $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k!}$ avec :

$$\frac{b_n}{n!} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \leq \frac{a_n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{n!}$$ donc $a_n < b_n \leq a_n + 1$ donc $b_n = a_n + 1$, donc toutes les inégalités sont des égalités, et $b_k = 0$ pour $k > n$, $a_k = k - 1$ pour $k > n$, donc $x = \sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{k!}$.

Réciproquement, si x s'écrit sous la forme $\sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{k!}$ avec $b_n > 0$, alors $x = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{b_k}{k!} + \frac{b_n - 1}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$ et la décomposition n'est pas unique.

De tels x sont les rationnels. En effet, $\sum_{k=2}^{n} \frac{b_k}{k!}$ est évidemment rationnel, mais inversement si x est rationnel de dénominateur n, alors x s'exprime comme somme finie, puisque, dans l'algorithme définissant les a_n, on arrivera à $a_n = \lfloor n!y_{n-1} \rfloor = n!y_{n-1}$ entier et donc $y_n = y_{n-1} - \frac{a_n}{n!} = 0$ donc $a_{n+1} = a_{n+2} = ... = 0$. Ainsi, la décomposition est unique pour $x < 1$ si et seulement si x est irrationnel.
On peut rendre la décomposition unique pour tout x en imposant que la suite a_k ne puisse devenir égale à $k - 1$ à partir d'un certain rang, mais alors il faut exclure $x = 1$.

b) $n!x = \text{entier} + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \mathrm{R}_n$ avec $0 \leq \mathrm{R}_n \leq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \quad \cos(n!2\pi x) = \cos(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1} + o(1)) = \cos(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1})(1 + o(1)) + o(1) = \cos(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1}) + o(1)$

d'où le résultat.

c) Il suffit de montrer que tout réel y élément de $[-1,1]$ est limite d'une suite de la forme $\cos(2\pi \frac{a_{n+1}}{n+1})$ avec $\forall n, a_n \in [\![0, n-1]\!]$ et $x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$. On prend pour cela $a_n = \lfloor n \frac{\arccos(y)}{2\pi} \rfloor$.

Sol.14) a) Les deux membres de l'égalité à vérifier valent $\dfrac{n^2+2}{(n^2+n+2)(n^2-n+2)}$.

Remarquer que, si on pose $v_n = \dfrac{1}{2(n^2-n+2)}$, alors $\dfrac{1}{2(n^2+n+2)} = v_{n+1}$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(n^2+1)(n^2+n+2)(n^2-n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n v_n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n \qquad \text{en changeant d'indice dans la deuxième somme}$$

$$= v_0 = \frac{1}{4}$$

d'où le résultat.

b) Il s'agit de série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue, donc le reste de chaque série est majorée par son premier terme en valeur absolue. Dans le premier cas, on prendra donc n tel que $\dfrac{1}{n^2+1} \leq 10^{-10}$ soit $n \geq 100.000$. Dans le second cas, on prendra n tel que $\dfrac{2}{(n^2+1)(n^2+n+2)(n^2-n+2)} \leq 10^{-10}$ soit $n \geq 53$ par exemple. On a procédé à une accélération de convergence.

Les valeurs approchées demandées valent 0.6360145275 à 10^{-10} près.

Sol.15) En considérant la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{c^n}$, on a $v_n = v_{n-1} + \dfrac{n^2}{c^n} = v_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{c^k}$

a) Si $c = 1$, alors $u_n = v_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^3 = O(n^3)$.

b) Si $c > 1$, on a :

$u_n = c^n v_n = c^n u_0 + c^n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{c^k}$, or $\sum \dfrac{k^2}{c^k}$ est une série convergente (appliquer par exemple le critère de D'Alembert), donc $u_n = O(c^n)$

c) Si $c < 1$, on a $u_n = c^n v_n = c^n u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c^{n-k} k^2$ avec c^n qui tend vers 0 et :

$$\sum_{k=1}^{n} c^{n-k} k^2 \leq n^2 \sum_{k=1}^{n} c^{n-k} = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} c^k \text{ or } \sum c^k \text{ converge, donc } u_n = O(n^2)$$

Sol.16) a) Non. $u_n = n$

b) Non. $u_n = \ln(n)$

c) Non. $u_n = n$

d) Non. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

e)-f) Oui puisque $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$

g) Non. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ où $u_{n+1} - u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

h) $|u_{n+1} - u_n| \leq |v_{n+1} - v_n| + |w_{n+1} - w_n| = (v_{n+1} - v_n) + (w_n - w_{n+1})$. Or $\sum (v_{n+1} - v_n)$ et $\sum (w_n - w_{n+1})$ converge donc $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge.

i) Prendre par exemple :

$v_0 = u_0$, $w_0 = 0$

puis

si $u_{n+1} \geq u_n$, $v_{n+1} = v_n + u_{n+1} - u_n$ ($\geq v_n$)

$w_{n+1} = w_n$

si $u_{n+1} < u_n$, $v_{n+1} = v_n$

$w_{n+1} = w_n + u_{n+1} - u_n$ ($\leq w_n$)

On vérifie par récurrence que $u_n = v_n + w_n$.

De plus : $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq |u_{n+1} - u_n|$ donc $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge donc (v_n) converge. De même pour $w_n - w_{n+1}$.

Sol.17) Dans cet exercice, $\sum a_n$ n'est pas supposée absolument convergente, d'où l'utilisation d'hypothèses alternatives.

a) $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ donc à partir d'un certain rang, $1 + a_n > 0$. Quitte à laisser de côté les premiers termes, on peut donc supposer que les termes sont strictement positifs. On a alors, en notant $p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k)$:

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^2}{2} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{o}(a_k^2)$$

et chaque somme partielle converge. En ce qui concerne la convergence de $\sum \mathrm{o}(a_k^2)$, on utilise $|\mathrm{o}(a_k^2)| \leq a_k^2$ pour k assez grand.

b) Prendre $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pour une telle suite, $\sum \ln(1 + a_n)$ diverge vers $-\infty$ et $p_n \to 0$. En effet :

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

avec $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente (critère de Leibniz des séries alternées), $\sum \frac{1}{2n}$ divergente, $\sum \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}$ et $\sum \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ absolument convergentes. Dons $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge. Donc $\Pi \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

c) L'implication est fausse dans le cas complexe. Considérons $\Pi \left(1 + \frac{i^n}{n^{1/4}}\right)$. On a $a_n = \frac{i^n}{n^{1/4}}$. $\sum a_n$ converge car, en séparant partie réelle et imaginaire, on se ramène aux séries $\sum \frac{(-1)^p}{(2p)^{1/4}}$ et

$\sum \frac{(-1)^p}{(2p+1)^{1/4}}$, toutes deux convergentes en vertu du critère de Leibniz des séries semi-convergentes. Pour la même raison, $\sum a_n^2$ converge car $a_n^2 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Cependant, le produit infini diverge. En effet, le module a pour terme général :

si $n = 2p$, $1 + \frac{(-1)^p}{(2p)^{1/4}}$

si $n = 2p + 1$, $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2p+1}}}$

Le logarithme du module d'indice $2p$ vaut :

$$\ln(1 + \frac{(-1)^p}{(2p)^{1/4}}) = \frac{(-1)^p}{(2p)^{1/4}} - \frac{1}{2\sqrt{2p}} + \frac{(-1)^p}{3(2p)^{3/4}} - \frac{1}{8p} + O(\frac{1}{p^{5/4}})$$

Le logarithme du terme d'indice $2p + 1$ vaut :

$$\begin{aligned}\ln\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2p+1}}} &= \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{2p+1}}) \\ &= \frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{2p}} + O(\frac{1}{p^{3/2}})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2p}} - \frac{1}{8p} + O(\frac{1}{p^{3/2}}))\end{aligned}$$

Donc, quand on somme les deux sommes partielles, on obtient une somme dont le terme général est :

$$\frac{(-1)^p}{(2p)^{1/4}} + \frac{(-1)^p}{3(2p)^{3/4}} - \frac{1}{4p} + O(\frac{1}{p^{5/4}})$$

$\sum \frac{(-1)^p}{(2p)^{1/4}}$ est convergente selon le critère de Leibniz des séries semi-convergentes, $\sum \frac{(-1)^p}{3(2p)^{3/4}}$ et $\sum O(\frac{1}{p^{5/4}})$ sont absolument convergentes, $\sum \frac{1}{4p}$ diverge. Donc la série est divergente vers $-\infty$. Donc le module du produit tend vers 0. Le produit infini diverge donc.

Sol.18) a) Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$. (x_n) est une suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$.

Pour tout $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > \frac{1}{2}$ car $f(x) - \frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{4} > 0$. Donc, par récurrence, $\forall\, n$, $x_{n+1} = f(x_n) > \frac{1}{2}$.

Pour tout $x > \frac{1}{2}$, $f(x) > x$ car $f(x) - x = x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 > 0$. Donc, en remplaçant x par x_n (dont on vient de montrer qu'il est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$) : $\forall\, n$, $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$.

La suite (x_n) est donc croissante. Si elle était majorée, elle convergerait vers une limite $l > \frac{1}{2}$ qui vérifierait $f(l) = l$, relation obtenue en passant à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$. Or un tel point fixe n'existe pas car la seule valeur x vérifiant $f(x) = x$ est $x = \frac{1}{2}$. Donc la suite est croissante non majorée, donc elle tend vers $+\infty$.

b) Considérons la suite $y_n = \frac{\ln(x_n)}{2^n}$. On a :

$$y_{n+1} = \frac{\ln(x_{n+1})}{2^{n+1}} = \frac{\ln(x_n^{\,2} + \frac{1}{4})}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2\ln(x_n) + \ln(1 + \frac{1}{4x_n^{\,2}})}{2^{n+1}}$$

$$= y_n + \frac{v_{n+1}}{2^{n+1}}$$

en posant $v_{n+1} = \ln(1 + \frac{1}{4x_n^{\,2}})$. Comme (x_n) est une suite croissante tendant vers $+\infty$, (v_n) est une suite décroissante tendant vers 0. On a de plus, par récurrence :

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{2^k}$$

La série $\sum \frac{v_k}{2^k}$ converge car $0 \leq \frac{v_k}{2^k} \leq \frac{v_1}{2^k}$ et $\sum \frac{1}{2^k}$ converge. Donc la suite (y_n) est croissante et converge vers une limite $\mathrm{K} = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{2^k}$. Comme x_n tend vers $+\infty$, il existe un rang au-delà duquel $y_n > 0$, donc $\mathrm{K} > 0$.

Posons $c = e^{\mathrm{K}}$. Comme $y_n \leq \mathrm{K}$, $x_n \leq c^{2^n}$. Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} c^{2^n} - x_n = 0$.

On utilise l'inégalité des accroissements finis suivante (voir L1/DERIVEE.PDF) :

$$\forall\, a \leq b,\ 0 \leq e^b - e^a \leq (b - a) \operatorname{Sup} \{e^t \mid a \leq t \leq b\} = (b - a)e^b$$

Donc, en remplaçant a par $2^n y_n$ et b par $2^n\mathrm{K}$:

$$0 \leq c^{2^n} - x_n \leq 2^n(\mathrm{K} - y_n) \exp(2^n\mathrm{K})$$

$$\leq 2^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{v_k}{2^k} \exp(2^n\mathrm{K})$$

$$\leq 2^n\, v_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \exp(2^n\mathrm{K}) \qquad \text{car } \forall\, k \geq n + 1,\ v_k \leq v_{n+1}$$

$$\leq v_{n+1} \exp(2^n\mathrm{K}) \qquad \text{car } \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

$$\leq \frac{1}{4x_n^{\,2}} \exp(2^n\mathrm{K}) \qquad \text{car } v_{n+1} = \ln(1 + \frac{1}{4x_n^{\,2}}) \leq \frac{1}{4x_n^{\,2}}$$

$$\leq \frac{1}{4} \exp(2^n\mathrm{K} - 2^{n+1}y_n)$$

On a $2^n\mathrm{K} - 2^{n+1}y_n = 2^n(\mathrm{K} - 2y_n) \sim -\mathrm{K}2^n$ qui tend vers $-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(2^n\mathrm{K} - 2^{n+1}y_n) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} c^{2^n} - x_n = 0$.

c) Par récurrence, on a facilement $x_n \geq x_0^{\,2^n}$, donc $y_n = \frac{\ln(x_n)}{2^n} \geq \ln(x_0)$, donc $\mathrm{K} \geq \ln(x_0)$ donc $c \geq x_0$.

On a par ailleurs :

$\forall\ k,\ v_k \leq v_1 = \ln(1 + \dfrac{1}{4x_0^{\ 2}})$

donc $\quad y_n = y_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{v_k}{2^k} \leq y_0 + v_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k} \leq y_0 + v_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = y_0 + v_1$. Donc $K \leq y_0 + v_1$ donc $c \leq x_0 \exp(v_1)$.

Ainsi $\quad 1 \leq \dfrac{c}{x_0} \leq \exp(v_1) = 1 + \dfrac{1}{4x_0^{\ 2}}$

donc $\quad \lim\limits_{x_0 \to \infty} \dfrac{c}{x_0} = 1$.

Sol.19) a) Vérifier par récurrence que $x_n = \alpha^n x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^{n-k} y_k$

b) Comme α^n tend vers 0, il suffit de montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^{n-k} y_k)$ converge. Montrons que la limite est $\dfrac{l}{1-\alpha}$ si l est la limite de (y_n). En effet : $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \geq N, |y_n - l| < \varepsilon$. Donc :

$$\left|\alpha^{n-1}y_1 + \alpha^{n-2}y_2 + ... + y_n - \frac{l}{1-\alpha}\right| = \left|\alpha^{n-1}(y_1 - l) + \alpha^{n-2}(y_2 - l) + ... + (y_n - l) - \frac{\alpha^n l}{1-\alpha}\right|$$

$$\leq |\alpha|^{n-1} |y_1 - l| + |\alpha|^{n-2} |y_2 - l| + ... + |y_n - l| + \frac{|\alpha|^n}{1-\alpha} |l|$$

$$\leq |\alpha|^{n-1} |y_1 - l| + ... + |\alpha|^{n-N} |y_N - l| + |\alpha|^{n-N-1} |y_{N+1} - l| + ... + |y_n - l| + \frac{|\alpha|^n}{1-\alpha} |l|$$

$$\leq |\alpha|^n C + (|\alpha|^{n-N-1} + ... + 1)\ \varepsilon \qquad \text{avec C une constante indépendante de } n.$$

$$\leq |\alpha|^n C + \frac{1}{1-|\alpha|}\ \varepsilon$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha|^n = 0$, $\exists\ M, \forall\ n \geq M, |\alpha|^n C \leq \varepsilon$.

Donc, pour $n \geq \mathrm{Max}(M, N)$:

$$\left|\alpha^{n-1}y_1 + \alpha^{n-2}y_2 + ... + y_n - \frac{l}{1-\alpha}\right| \leq \varepsilon\ (1 + \frac{1}{1-\alpha})$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^{n-k} y_k = \dfrac{l}{1-\alpha}$.

c) Par récurrence sur $p \geq n$, on vérifiera que $\dfrac{x_{p+1}}{\alpha^{p-n}} - \alpha x_n = \alpha^{n+1} \sum\limits_{k=n+1}^{p+1} \dfrac{y_k}{\alpha^k}$.

Quand p tend vers l'infini, la suite (x_n) étant bornée et $|\alpha| > 1$, $\frac{x_{p+1}}{\alpha^{p-n}}$ tend vers 0. De plus la série $\sum \frac{y_k}{\alpha^k}$ converge absolument car $\left|\frac{y_k}{\alpha^k}\right| = O(\frac{1}{|\alpha|^k})$ et que $\sum \frac{1}{|\alpha|^k}$ converge. En passant à la limite quand p tend vers l'inifni, on obtient :

$$x_n = -\alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k}{\alpha^k} = -\alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k - l}{\alpha^k} - \alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{l}{\alpha^k} = -\alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k - l}{\alpha^k} + \frac{l}{1-\alpha}$$

Par ailleurs, pour $n \geq$ N, le module $\alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k - l}{\alpha^k}$ est majorée par $|\alpha|^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{|\alpha|^k} = \frac{\varepsilon}{|\alpha| - 1}$, ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} \alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{y_k - l}{\alpha^k} = 0$.

Donc $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{l}{1-\alpha}$.

Sol.20) a) On partitionne I en la réunion disjointe des $\{(a, n)\} \times [\![2, +\infty]\!]$, $a \in$ P, $n \geq 1$. Pour chaque (a, n), la famille $(\frac{1}{a^{nk}})_{k\geq 2}$ est sommable, formant une série géométrique de raison $\frac{1}{a^n}$ strictement inférieure à 1. Sa somme vaut :

$$\mathrm{T}_{(a,n)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{nk}} = \frac{1}{a^{2n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{a^n}} = \frac{1}{a^{2n} - a^n}$$

L'ensemble $\{(a, n) \mid a \in \mathrm{P}, n \geq 1\}$ est en bijection avec l'ensemble de tous les nombres pairs m au moyen de la bijection $f : (a, n) \to m = a^n$. En effet, tout entier m s'écrit de manière unique sous la forme a^n, où a n'est pas lui-même puissance supérieure ou égale à 2 d'un autre entier. Pour cela, on prend pour a le plus petit entier dont m est une puissance. Par exemple, 64 est l'image de (2, 6), mais non de (4, 3) car $4 \notin$ P (voir les exercices de L1/ARITHMTQ.PDF pour plus de détails).

Au moyen de cette bijection f, on a $\frac{1}{a^{2n} - a^n} = \frac{1}{m^2 - m}$. La famille $(\frac{1}{m^2 - m})_{m \text{ pair}}$ est sommable car $\frac{1}{m^2 - m} \sim \frac{1}{m^2}$, terme général d'une série convergente. Ainsi, la famille initiale est sommable et sa somme vaut :

$$\sum_{(a,n,k)\in \mathrm{I}} \frac{1}{a^{nk}} = \sum_{m \text{ pair}} \frac{1}{m^2 - m}$$

b) Poursuivons le calcul précédent :

$$\sum_{(a,n,k)\in \mathrm{I}} \frac{1}{a^{nk}} = \sum_{m \text{ pair}} \frac{1}{m^2 - m} = \sum_{m \text{ pair}} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m \text{ pair}} (\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) \qquad \text{en posant } m = 2k$$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ en distinguant n pair et n impair

$= \ln(2)$ comme on l'a vu dans le paragraphe consacré aux séries alternées

On peut aussi écrire :

$$\sum_{(a,n,k)\in I} \frac{1}{a^{nk}} = \sum_{a\in P, k\geq 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{nk}} = \sum_{a\in P, k\geq 2} \frac{1}{a^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{a^k}}$$

$$= \sum_{a\in P, k\geq 2} \frac{1}{a^k - 1}$$

Mais quand a décrit P et k décrit les entiers supérieurs ou égaux à 2, a^k décrit les nombres pairs qui sont puissances au moins égale à 2 de nombres pairs. C'est bien la somme $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \ldots$ énoncée par Euler.

c) On adaptera la démonstration précédente, mais au lieu de se limiter aux nombres pairs m, on prendra tous les entiers supérieurs ou égaux à 2. On utilisera le fait que la somme $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2 - m}$ qui s'écrit $\sum_{m=2}^{\infty} (\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m})$, est télescopique et vaut 1.

Sol.21) Si on change z en $\frac{1}{z}$, l'expression change de signe. Il suffit donc de prouver l'égalité pour $|z| < 1$. On utilise le développement de la série géométrique $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ avec $q = z^{2^{n+1}}$. On obtient :

$$\frac{1+z}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1} = \frac{1+z}{1-z} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2z^{2^n} z^{k2^{n+1}}$$

$$= \frac{1+z}{1-z} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2z^{2^n(2k+1)}$$

La famille $(2z^{2^n(2k+1)})$, $(n, k) \in \mathbf{N}^2$ est sommable car il en est de même de la famille $(\left|2z^{2^n(2k+1)}\right|)$, comme on le voit en partitionnant $\mathbf{N}^2$ en la réunion des $\{n\} \times \mathbf{N}$. Pour chaque n, $\sum_{k=0}^{\infty} \left|2z^{2^n(2k+1)}\right|$ est sommable de somme $T_n = \frac{\left|2z^{2^n}\right|}{1 - \left|z^{2^{n+1}}\right|}$, et $\sum T_n$ est sommable car $T_n \sim \left|2z^{2^n}\right| \leq \left|2z^n\right|$, terme général d'une série convergente positive. Par ailleurs, quand (n, k) décrit $\mathbf{N}^2$, $2^n(2k + 1) = m$ décrit $\mathbf{N}^*$ car tout entier m strictement positif s'écrit de manière unique comme produit d'un nombre impair par une puissance de 2. Donc :

$$\frac{1+z}{1-z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1} = \frac{1+z}{1-z} - \sum_{m=1}^{\infty} 2z^m = \frac{1+z}{1-z} - \frac{2z}{1-z} = 1$$

◆