SERIES ENTIERES

PLAN

I : Rayon de convergence

1- Définition

DEFINITION :

On appelle série entière d'une variable complexe une série de la forme : $\sum a_n z^n$

z est complexe, ainsi que les a_n. On pose par convention $0^0 = 1$, comme pour les polynômes, de sorte que la valeur de la somme de la série pour $z = 0$ est a_0. La première question que l'on se pose est de savoir pour quelles valeurs de z la série converge.

DEFINITION
On appelle **domaine de convergence** *de la série entière l'ensemble des z tels que la série converge.*

EXEMPLES :
Notons D le domaine de convergence.

❑ $\sum \frac{z^n}{n!}$

Pour $z = 0$, la série converge et vaut 1.
Pour $z \neq 0$, on applique la règle de D'Alembert (voir le chapitre L2/SERIES.PDF).

$$\left|\frac{z^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, z^n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right|$$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc la série converge pour tout z.

$\Rightarrow$ D = $\mathbb{C}$.

❑ $\sum z^n$

Pour $|z| < 1$, il s'agit d'une série géométrique convergente.

Pour $|z| \geq 1$, il s'agit d'une série géométrique divergente.

$\Rightarrow$ D = $\{z, |z| < 1\}$.

❑ $\sum a^n z^n$

Par un raisonnement comparable, D = $\{z, |z| < \frac{1}{|a|}\}$

❑ $\sum \frac{z^n}{n}$

Pour $|z| < 1$, la règle de D'Alembert permet de conclure à la convergence.

Pour $|z| > 1$, la même règle permet de conclure à la divergence. On peut aussi remarquer que, si $|z| > 1$, le terme général $\frac{z^n}{n}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

En ce qui concerne le cas $|z| = 1$, on peut montrer que la série converge sauf pour $z = 1$, mais la preuve n'est pas évidente. Une démonstration est donnée dans le chapitre L2/SERIES.PDF.

$\Rightarrow$ D = $\{z, |z| < 1 \text{ ou } (z \neq 1 \text{ et } |z| = 1)\}$.

❑ $\sum \frac{z}{n^2}$

Pour $|z| \leq 1$, le module du terme général de la série est majoré par $\frac{1}{n^2}$. Elle est donc absolument convergente.

Pour $|z| > 1$, le terme général tend vers l'infini donc la série diverge.

$\Rightarrow$ D = $\{z, |z| \leq 1\}$.

❑ $\sum n!\, z^n$

Pour $z = 0$, la série converge et vaut 1.
Pour $z \neq 0$, le terme général tend vers l'infini, donc la série diverge.
$\Rightarrow$ D = {0}.

❑ $\sum n!\, z^{n^2}$

Il s'agit bien d'une série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_{n^2} = n!$ et $a_p = 0$ si p n'est pas un carré parfait. Bien que ressemblante à l'exemple précédent, le domaine est tout à fait différent.
Pour $|z| \geq 1$, la série diverge car son terme général tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.
Pour $|z| < 1$, la série converge. Montrons en effet pour cela que $|n!\, z^{n^2}|$ est un $O(\frac{1}{n^2})$, autrement dit que la suite $(n^2\, n!\, |z^{n^2}|)$ est bornée. Prenons son logarithme, pour $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} \ln(n^2\, n!\, |z^{n^2}|) &= 2\ln(n) + \ln(n!) + n^2 \ln(|z|) \\ &\leq 2\ln(n) + \ln(n^n) + n^2 \ln(|z|) \\ &\leq 2\ln(n) + n\ln(n) + n^2 \ln(|z|) \sim n^2 \ln(|z|) \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n^2\, n!\, |z^{n^2}|) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\, n!\, |z^{n^2}| = 0$ donc la suite $(n^2\, n!\, |z^{n^2}|)$ est bien bornée.
$\Rightarrow$ D = $\{z, |z| < 1\}$

On remarque que dans tous les cas, le domaine de convergence est un disque centré à l'origine, de rayon éventuellement nul ou infini, et comprenant ou non des éléments du cercle frontière. Nous allons voir que ceci est général.

2- Rayon de convergence
LEMME D'ABEL

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et Z un complexe non nul tel que la suite de terme général $a_n Z^n$ soit bornée. Soit z tel que $|z| < |Z|$. Alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration :
❑ Soit M un majorant de $|a_n Z^n|$. On a : $|a_n z^n| = |a_n Z^n| \times \left|\frac{z^n}{Z^n}\right| \leq M \left|\frac{z^n}{Z^n}\right|$

La série de terme général $M \left|\frac{z^n}{Z^n}\right|$ est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Elle est donc convergente. La série de terme général $a_n z^n$ est donc absolument convergente.

L'hypothèse de la proposition est en particulier vérifiée lorsque $a_n Z^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et en particulier lorsque la série de terme général $a_n Z^n$ converge. Autrement dit, si la série converge pour Z, alors elle converge nécessairement pour tout z de module inférieur à $|Z|$.

DEFINITION

Soit R *un réel positif ou nul. On appelle* **disque ouvert** *de rayon* R, *et l'on note* $D_o(R)$ *l'ensemble* $\{z, |z| < R\}$ *.On appelle* **disque fermé** *de rayon* R, *et l'on note* $D_f(R)$ *l'ensemble* $\{z, |z| \leq R\}$. *Pour* $R = +\infty$, $D_o(R)$ *et* $D_f(R)$ *sont égaux à* $\mathbb{C}$.

PROPOSITION

Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de domaine de convergence* D. *Alors il existe* R *élément de* $[0,+\infty]$ *tel que :* $D_o(R) \subset D \subset D_f(R)$. R *s'appelle le* **rayon de convergence** *de la série entière.*

Autrement dit, le domaine de convergence est un disque de rayon R, sans qu'on précise davantage si les points de la frontière du disque appartiennent ou non à D.

<u>Démonstration 1</u> :

❑ Soit $R = \text{Sup}\{|z|, z \in D\}$.

Si z est tel que $|z| > R$, alors par définition de R, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge, ce qui prouve que : $D \subset D_f(R)$.

Si z est tel que $|z| < R$, alors, par définition de la borne supérieure, il existe un complexe Z tel que $|z| < |Z| < R$ et tel que Z appartienne à D. Comme $\sum a_n Z^n$ converge, la suite $(a_n Z^n)$ est bornée (et tend même vers 0). Le lemme d'Abel permet de conclure que z appartient aussi à D. Ce qui prouve que : $D_o(R) \subset D$.

<u>Démonstration 2</u> :

Soit $R = \text{Sup}\{|Z|$, la suite $(a_n Z^n)$ est bornée$\}$.

Si z est tel que $|z| > R$, alors par définition de R, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc en particulier ne tend pas vers 0, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge, ce qui prouve que : $D \subset D_f(R)$.

Si z est tel que $|z| < R$, alors, par définition de la borne supérieure, il existe un complexe Z tel que $|z| < |Z| < R$ et tel que la suite $(a_n Z^n)$ soit bornée. Le lemme d'Abel permet de conclure que z appartient aussi à D. Ce qui prouve que : $D_o(R) \subset D$.

3- Détermination pratique

La règle de D'Alembert est d'un usage fréquent pour le calcul du rayon de convergence.

EXEMPLES :

❑ Pour tout réel α, le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$ vaut 1. En effet, pour $z \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^\alpha z^{n+1}}{n^\alpha z^n} \right| = |z|$$

donc, si $|z| < 1$, la série converge, et pour $|z| > 1$, la série diverge. Donc le rayon de convergence vaut 1.

❑ Appliquons le même critère à la série $\sum \dfrac{e^n - 1}{n} z^n$.

$$\left| \frac{\dfrac{e^{n+1}-1}{n+1} z^{n+1}}{\dfrac{e^n-1}{n} z^n} \right| \sim \left| \frac{\dfrac{e^{n+1}}{n} z^{n+1}}{\dfrac{e^n}{n} z^n} \right| = |ez|$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{e^{n+1}-1}{n+1} z^{n+1}}{\dfrac{e^n-1}{n} z^n} \right| = |ez|$

Donc : si $|z| < \dfrac{1}{e}$, la limite est strictement inférieure à 1 et la série converge

si $|z| > \dfrac{1}{e}$, la limite est strictement supérieure à 1 et la série diverge

Donc le rayon de convergence vaut $\dfrac{1}{e}$.

On peut aussi utiliser les critères usuels de majoration, minoration, équivalent pour montrer qu'une série converge ou diverge. En particulier, soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. Supposons que : $\exists$ N, $\forall$ n, $|a_n| \leq |b_n|$. Alors, si $|z| <$ R', $\sum b_n z^n$ converge absolument, donc $\sum a_n z^n$ aussi. Cela signifie donc que tout point dans $D_o(R')$, disque ouvert de convergence pour la deuxième série, est aussi dans le domaine de convergence de la première série, et donc que :

$$D_o(R') \subset D_f(R)$$

On a donc R $\geq$ R'. La comparaison des termes des deux séries permet donc d'en déduire une comparaison des rayons de convergence, utile lorsque a_n ou b_n n'est pas explicitement connu.

En particulier, soit trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ de rayons de convergence respectifs R_a, R_b et R_c, et telles que, pour tout n (ou même seulement pour n assez grand), $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$. Si $R_a = R_c$, alors cette valeur commune est aussi celle de R_b. En effet, on a $R_a \geq R_b \geq R_c = R_a$.

Si les deux suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes quand n tend vers l'infini, alors les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont même rayon de convergence. En effet, soit R et R' leur rayon respectif. Pour n assez grand, on a $\dfrac{|b_n|}{2} \leq |a_n| \leq |b_n|$. Puisque $\sum \dfrac{b_n}{2} z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence, c'est aussi celui de $\sum a_n z^n$. On peut donc commencer par prendre un équivalent du terme général pour le simplifier par équivalence avant de se lancer dans la recherche du rayon de convergence.

EXEMPLES :

❑ Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+t}\,dt$. On cherche le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$. On a :

$$\forall n, \int_0^1 \frac{e^{nt}}{2}\,dt \leq a_n \leq \int_0^1 e^{nt}\,dt$$

et donc, pour $n \geq 1$, $\dfrac{e^n - 1}{2n} \leq a_n \leq \dfrac{e^n - 1}{n}$.

D'après l'exemple précédent, la série $\sum \dfrac{e^n - 1}{n} z^n$ a pour rayon de convergence $R' = \dfrac{1}{e}$. Il en est de même de la série $\sum \dfrac{e^n - 1}{2n} z^n$. Par conséquent, ce rayon est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

❑ Quel est le rayon de convergence de $\sum \dfrac{n^2}{n+1} x^n$? Puisque $\dfrac{n^2}{n+1} \sim n$, c'est le même que celui de la série entière $\sum nx^n$, à savoir 1.

Le lemme d'Abel peut également servir ; si $(a_n Z^n)$ est bornée, alors $R \geq |Z|$. Si de plus la série $\sum a_n Z^n$ diverge, alors $R = |Z|$. Le lemme d'Abel prouve également que la convergence est absolue dans $D_o(R)$. Donc si Z est tel que la série $\sum a_n Z^n$ est semi-convergente, (i.e. convergente sans être absolument convergente) alors $R = |Z|$.

EXEMPLE :

❑ $\sum \dfrac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, puisque, pour $z = 1$, $(\dfrac{z^n}{n})$ est bornée, donc $R \geq 1$. Mais pour $z = 1$, elle diverge, ou encore, pour $z = -1$, la série ne converge pas absolument, donc $R = 1$.

4- Convergence normale

PROPOSITION

Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Alors, pour tout* $r < R$, *cette série converge normalement sur le disque fermé de rayon r.*

Démonstration :

❑ Pour $|z| \leq r$, $|a_n z^n| \leq |a_n r^n|$, terme général d'une série convergente. Donc $\sum \sup_{z \in D_f(r)} |a_n z^n|$ converge.

On notera qu'il peut ne pas y avoir convergence normale sur le disque D(R). Considérer par exemple la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

La proposition précédente s'applique également sur un fermé borné K inclus dans le disque ouvert de convergence. En effet, la fonction de K dans $\mathbb{R}$, qui à z associe $|z|$ est continue, donc admet un maximum r strictement inférieur à R (voir le chapitre L2/EVNORME.PDF sur le fait qu'une fonction définie et continue sur une partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et à valeurs réelles, admet un maximum et un minimum). K est donc inclus dans $D_f(r)$, et il y a bien convergence normale.

II : Fonction somme d'une série entière

1- Continuité

PROPOSITION

Soit $f : z \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la fonction définie sur le domaine de convergence D*, somme de la série entière, de rayon de convergence* R*. Alors f est continue sur* $D_o(R)$.

Démonstration :

❑ On applique ici le théorème de continuité d'une série de fonctions continues convergeant normalement, et prouvé dans le chapitre L2/SUITEF.PDF. Dans ce chapitre, il s'agissait de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, mais les mêmes théorèmes s'appliquent au cas complexe, en remplaçant la valeur absolue par le module.

Soit z tel que $|z| < R$. Soit r tel que $|z| < r < R$. Comme il y a convergence normale sur $D_f(r)$ et que chaque terme de la série est continu, il en est de même de la somme. On remarquera que la continuité sur le domaine de convergence D tout entier n'est pas assurée. Une étude du comportement de la série sur le cercle de rayon R est menée en fin de ce chapitre.

Voici une conséquence immédiate de la proposition précédente.

PROPOSITION

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$*. Alors f admet un développement limité à tout ordre en* 0.

Démonstration :

❑ On a, à l'ordre n :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p + \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p z^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p z^p + z^n \underbrace{\sum_{p=n+1}^{\infty} a_p z^{p-n}}_{\text{tend vers 0 quand } z \text{ tend vers 0 par continuité de cette série entière}}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p\, z^p + o(z^n)$$

La réciproque est fausse en général. Il ne suffit pas d'admettre un développement limité à tout ordre en 0 pour être développable en série entière. C'est ce que nous verrons dans le paragraphe III.

2- Dérivée et primitive

PROPOSITION

Les séries $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum \dfrac{a_n z^{n+1}}{n+1}$*, dites respectivement séries dérivées et séries primitives de* $\sum a_n z^n$*, ont même rayon de convergence que celle-ci.*

<u>Démonstration</u> :

❑ Soit R le rayon de convergence de la série initiale, R_d celui de la série dérivée et R_p celui de la série primitive. Soit z tel que $|z| < R$. Montrons que la série dérivée converge pour ce z. Prenons r tel que $|z| < r < R$. La série de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente et l'on a :

$$|n a_n z^{n-1}| \leq n \left| \frac{z^{n-1}}{r^{n-1}} \right| |a_n r^n| \frac{1}{r}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} n \left| \dfrac{z^{n-1}}{r^{n-1}} \right| = 0$ donc il existe une constante M majorant les $\dfrac{n}{r} \left| \dfrac{z^{n-1}}{r^{n-1}} \right|$. Le terme général de la série dérivée est alors majoré par $M|a_n r^n|$. La série dérivée est donc absolument convergente sur $D_o(R)$. Donc $R_d \geq R$.

Soit maintenant z tel que $|z| < R_d$. Montrons que la série initiale converge.

$$|a_n z^n| \leq |n a_n z^{n-1}|\ |z|$$

La série de terme général $n a_n z^{n-1}$ étant absolument convergente, il en est de même de la série de terme général $a_n z^n$. Donc $R \geq R_d$.

La conclusion des deux étapes est $R = R_d$

❑ La série $\sum a_n z^n$ étant la série dérivée de la série $\sum \dfrac{a_n\, z^{n+1}}{n+1}$, on en déduit que $R_p = R$.

PROPOSITION

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* R *non nul. Alors, pour tout x de l'intervalle ouvert*]– R, R[, f *est dérivable et sa derivée est définie par* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. f *admet une primitive sur* $D_0(R)$*, la primitive s'annulant en* 0 *étant définie par* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Démonstration :

❑ On se place en x tel que $|x| < R$, et l'on choisit là aussi un r tel que $|x| < r < R$. Il y a convergence normale sur $]-r, r[$ de la série dérivée. On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries (voir le chapitre L2/SUITESF.PDF) sur f, puis sur F.

COROLLAIRE

(i) *Une série entière de rayon de convergence* R > 0 *est indéfiniment dérivable sur*]– R, R[.

(ii) *Deux séries entières de rayon de convergence non nul sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux*.

(iii) *Une série entière de rayon de convergence non nul sont nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls*.

Démonstration :

❑ (i) Puisqu'une série entière de rayon R est dérivable sur]– R, R[et que sa dérivée est une série entière de même rayon, on peut itérer l'opérateur de dérivation autant de fois que l'on veut.
La réciproque est fausse : il ne suffit pas qu'une fonction soit indéfiniment dérivable pour être développable en série entière (voir le paragrapge III). On a seulement les implications suivantes, les réciproques étant fausses :

f développable en série entière $\Rightarrow$ f indéfiniment dérivable $\Rightarrow$ f admet un développement limité à tout ordre en 0

❑ (ii) De plus, par récurrence sur k, on a:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

On en déduit que :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Par conséquent, si l'on a deux séries entières de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ et de rayon non nul, on a, pour tout n :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$$

La réciproque est triviale.

❑ (iii) Appliquer le (ii) avec $g = 0$. On constate donc que la propriété vraie pour les polynômes :

$$\forall z, \sum_{n\geq 0} a_n z^n = 0 \Rightarrow \forall n, a_n = 0$$

s'applique sous la même forme aux séries entières, mais les démonstrations en sont différentes, le cas d'une série étant plus difficile à traiter que celui d'une somme finie.

EXEMPLE :

❑ Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (somme d'une série géométrique), donc, par dérivation :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

❑ Si, au contraire, on prend la primitive s'annulant en 0, on obtient, pour $x \in]-1, 1[$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

3- Somme de séries entières

PROPOSITION

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectivement* R_1 *et* R_2. *Alors* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *est une série entière égale à la somme des deux séries initiales, et de rayon de convergence* R *égal à* $\mathrm{Min}(R_1, R_2)$ *si* $R_1 \neq R_2$, *et supérieur ou égal à* $\mathrm{Min}(R_1, R_2)$ *si* $R_1 = R_2$.

Démonstration :

❑ Si z est tel que $|z| < \mathrm{Min}(R_1,R_2)$, alors chaque série converge, de même que leur somme. Ce qui prouve que $R \geq \mathrm{Min}(R_1,R_2)$. Si $R_1 < R_2$ par exemple, soit z tel que $R_1 < |z| < R_2$. Alors la première série diverge et la seconde converge, donc la somme diverge, ce qui prouve qu'on ne peut avoir $R > R_1$. Donc $R = R_1$.

Dans le cas où $R_1 = R_2$, les termes des deux séries peuvent se compenser pour faire converger la somme au delà de la valeur commune du rayon. On peut donc avoir $R > \mathrm{Min}(R_1,R_2)$. Prendre par exemple :

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ de rayon nul et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -n!\, z^n$ de rayon nul. Alors $(f + g)(z) = 0$ avec un rayon de convergence infini.

4- Produit de séries entières

PROPOSITION

Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence respectivement* R_1 *et* R_2. *Alors* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) z^n$ *est la somme d'une série entière égale au produit de* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *par* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, *et de rayon de convergence* R *supérieur ou égal au minimum de* R_1 *et* R_2.

Démonstration :

❑ Si z est tel que $|z| < \mathrm{Min}(R_1,R_2)$, alors chaque série converge absolument, de même que leur produit de Cauchy. Ce qui prouve que $R \geq \mathrm{Min}(R_1,R_2)$. Rappelons en effet que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors on a (voir le paragraphe *série produit* dans le chapitre L2/SERIES.PDF) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}\right)$$

$u_n = a_n z^n$ et $v_n = b_n z^n$ conduisent à la formule annoncée.

Même si les rayons sont différents, R peut ne pas être égal au minimum des deux. Il n'y a pas de règle particulière. Prendre par exemple $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ avec $R_1 = 1$ et $g(z) = 1 - z$ avec $R_2 = +\infty$. Le produit vaut $fg(z) = 1$ avec $R = +\infty$.

EXEMPLES :

❑ Pour $|x| < 1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. On a donc, en prenant, pour tout n, $a_n = b_n = 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

et l'on retrouve le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, obtenu plus haut par dérivation.

❑ On appelle permutation sans point fixe de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ une bijection σ de $[\![1, n]\!]$ telle que $\forall x, \sigma(x) \neq x$. Soit a_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1, n]\!]$. On a :

$$\forall n, n! = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a_p$$

En effet, il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$, et toute telle permutation peut être définie par le choix d'une partie de $n - p$ éléments fixes ($\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ choix possibles d'une telle partie), puis d'une permutation sans points fixes sur les p points restants (a_p choix possibles d'une telle permutation), p pouvant varier de 0 à n. Le membre de droite dénombre donc les $n!$ permutations selon le procédé ainsi décrit. La relation s'écrit aussi, en simplifiant par $n!$:

$$1 = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n-p)!} \frac{a_p}{p!}$$

Le membre de droite évoque un produit de Cauchy. De fait, considérons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (série exponentielle dont l'expression a été établie dans le chapitre L2/SERIES.PDF, et dont nous redonnons la preuve plus bas). La série entière définissant f converge sur $]-1, 1[$ car $\left|\frac{a_n}{n!} x^n\right| \leq |x^n|$. Effectuons sur cet intervalle le produit de Cauchy des deux séries :

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{a_p}{p!} \frac{1}{(n-p)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

donc $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = f(x) = \frac{1}{g(x)(1-x)} = \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

On développe le membre de droite par un produit de Cauchy et l'on obtient :

$$\frac{a_n}{n!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} \qquad \text{en particulier, } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \qquad a_n = n! \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}$$

Cette expression a également été prouvée par une autre méthode dans les exercices du chapitre L1/GROUPSYM.DOC.

❑ Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 3$ et $\forall\, n \geq 0$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}\, a_k$. Déterminons a_n. Pour cela, considérons la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. On reconnaîtra dans la relation de récurrence le terme général du produit de Cauchy suivant : $f'(x) = f(x)^2$. On dispose par ailleurs de la condition $f(0) = a_0 = 3$. Plaçons-nous dans un voisinage de 0 où f ne s'annule pas. On a :

$$\frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$$

donc $$-\frac{1}{f(x)} = x - \frac{1}{f(0)} = x - \frac{1}{3}$$ en prenant une primitive de chaque membre

donc $$f(x) = \frac{3}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n$$

donc $\quad \forall\, n,\ a_n = 3^{n+1}\, n!$

On aurait pu aussi calculer les premiers termes de la suite pour conjecturer ce résultat, et le montrer par récurrence. En effet, si $a_k = 3^{k+1}\, k!$ jusqu'au rang n, alors :

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}\, a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!\, k!\, 3^{n-k+1}\, 3^{k+1} = (n+1)!\, 3^{n+2}$$

III : Développement en séries entières

1- Définition

Une fonction f d'une variable complexe est dite **développable en série entière** *s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon* R *strictement positif, telle que :*

$$\forall z \in \mathrm{D_o(R)}, \textit{ on a : } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Une fonction f d'une variable réelle est dite **développable en série entière** *s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$* de *rayon* R *strictement positif, tel que :*

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \textit{ on a : } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Les développements en séries entières généralisent par des séries ce que les développements limités procurent par des polynômes. Nous avons vu dans le paragraphe II qu'une condition **nécessaire** pour qu'une fonction f d'une variable réelle x soit développable en série entière est que f soit indéfiniment dérivable. Et dans ce cas :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Inversement, soit f indéfiniment dérivable. f est-elle développable en série entière ? Pour une fonction définie sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, on est amené à considérer la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Cette série est dite **série de Taylor** associée à f.

Plusieurs cas peuvent se produire :

a) La série de Taylor est convergente et converge simplement vers f sur un intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. f est alors développable en série entière.

b) La série de Taylor est convergente, mais ne converge pas vers f. f n'est pas développable en série entière. Voici un exemple[1] datant de 1823 :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

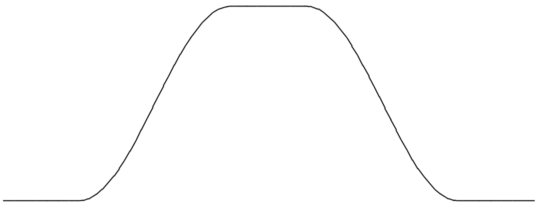
$$x \to \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de vérifier par récurrence que, pour x non nul, $f^{(n)}(x) = \mathrm{Q}_n(x)\exp(-\frac{1}{x^2})$ où Q_n est une fraction rationnelle en x. Montrons alors que, pour tout n, $f^{(n)}(0) = 0$. C'est vrai pour $n = 0$. Si c'est vrai au rang $n - 1$, alors $f^{(n)}(0)$ est égal à la limite en 0 de $\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \frac{\mathrm{Q}_n(x)}{x} \exp(-\frac{1}{x^2})$. Cette limite est nulle (remplacer au besoin $\frac{1}{x}$ par X et faire tendre X vers l'infini).

[1] A. L. Cauchy, *Résumés des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Imprimerie Royale, Paris 1823.

La série de Taylor associée à f est donc identiquement nulle. Or, en dehors de 0, f est strictement positive. Ainsi, la série de Taylor est convergente, mais ne converge pas vers f.

c) La série de Taylor est divergente pour $x \neq 0$. f n'est pas développable en série entière. Un premier exemple[2] est donné en 1876. Nous donnons en annexe deux exemples, l'un sous forme d'intégrale dépendant d'un paramètre, l'autre sous forme de série de fonctions. Peano[3] en 1884 et Borel[4] en 1895 ont démontré que, si on se donne une suite réelle ou complexe (a_n) ***quelconque***, il existe une fonction f C^∞ définie sur $\mathbf{R}$ telle que $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$. Bien entendu, la série $\sum a_n x^n$ n'a alors aucune raison de converger. Pour définir une telle fonction f dans le cas où la série $\sum a_n x^n$ diverge, on remplace $a_n x^n$ par $a_n x^n h_n(x)$ où h_n est une fonction C^∞ de la forme suivante :



nulle en dehors d'un intervalle $[-\alpha_n, \alpha_n]$, égale à 1 sur un intervalle $[-\beta_n, \beta_n]$ avec $-\alpha_n < -\beta_n < 0 < \beta_n < \alpha_n$. Le plateau égal à 1 sur $[-\beta_n, \beta_n]$ permet d'affirmer que toutes les dérivées de $a_n x^n h_n(x)$ en 0 sont identiques à celles de $a_n x^n$; en particulier, elles sont toutes nulles, sauf la dérivée n-ème qui vaudra $a_n n!$. Le fait que h_n soit nulle en dehors de $[-\alpha_n, \alpha_n]$ permet de limiter la divergence de la série. Plus précisément, on peut choisir α_n et β_n de façon que la série $\sum a_n x^n h_n(x)$ converge normalement, ainsi que toutes les séries dérivées. La fonction obtenue est alors C^∞ et sa dérivée n-ème en 0 a pour valeur $a_n n!$ de sorte que la série de Taylor de la fonction est bien $\sum a_n x^n$, qui rappelons-le, a toutes les possibilités de diverger[5].

Les problèmes du type b) ou c) se rencontrent uniquement pour des fonctions de variable réelle. Pour ces fonctions, il existe parfois un moyen d'étude possible, la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^x (x-t)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \, dt$$

qui conduit, en majorant l'intégrale, à l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - f(0) - xf'(0) - x^2 \frac{f''(0)}{2} - \dots - x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{M_n \left| x^{n+1} \right|}{(n+1)!}$$

---

[2] P. du Bois-Rémond, Über den Gültigkeitsbereich der Taylor'shen Reihenentwickelung, *Sitzungsb. k. Bayer. Akad. Wiss., math.-phys. Klasse* (1876) 225-237, ou bien *Math. Ann.* 21 (1883) 107-119.

[3] A. Genocchi, G. Peano, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, Fratelli Bocca, Roma, (1884), N67, p. XVII, https://archive.org/stream/calculodifferen00peangoog#page/n26/mode/2up

[4] É. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Ann. Sci. l'École Norm. Sup. 12 (1895) 9-55.

[5] Le lecteur qui souhaitera plus de détails consultera par exemple R. Godement, *Analyse Mathématique*, t. II, Springer (1998, 2003), p.141-144, ou Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP (2010), p.99 ou le sujet de concours Centrale 2011 PC, 1ère épreuve de mathématiques.

où M_n majore $|f^{(n)}|$ sur l'intervalle $[0, x]$. On prend la limite lorsque n tend vers $+\infty$. Si le majorant tend vers 0, alors la série de Taylor convergera vers f en x. Des exemples d'utilisation de cette méthode sont donnés dans le paragraphe suivant.

Sinon, on peut conclure qu'une fonction f est développable en série entière si elle obtenue comme somme, produit, dérivée ou primitive de fonctions dont on sait qu'elles sont elles-mêmes développables en série entière (mais dans ce chapitre, on ne dispose d'aucun théorème pour le quotient. Voir le chapitre L3/HOLOMRPH.PDF pour une théorie plus puissante).
Pour cela, il faut disposer d'un certain nombre de fonctions usuelles pour lesquelles on dispose du développement en série entière.

2- Développements usuels

Voici les développements des fonctions usuelles en séries entières :

Fonctions de type exponentiel

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	sur $\mathbb{R}$	(i)
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	sur $\mathbb{R}$	(ii)
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	sur $\mathbb{R}$	(iii)
$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	sur $\mathbb{R}$	(iv)
$\cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	sur $\mathbb{R}$	(v)

Fonctions de type géométrique		
$\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$	sur $D_o(1)$	(vi)
$\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$	sur $D_o(1)$	(vii)
$\dfrac{1}{(1-z)^p} = \sum\limits_{n=p-1}^{\infty} \dbinom{n}{p-1} z^{n-p+1}$	sur $D_o(1)$	(viii)
$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$	sur]–1, 1[	(ix)
$\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$	sur]–1, 1[	(x)
$\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$	sur]–1, 1[	(xi)
$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{n} x^n$	sur]–1, 1[	(xii)
où $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$		

Démonstration :

❑ (i) : Sur tout intervalle $]-a, a[$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de l'exponentielle est majorée par M = $\exp(a)$, indépendamment de n et de x. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ pour tout x de $]-a, a[$. a étant quelconque, cette égalité est vraie pour tout x. Nous verrons plus bas que le développement en série entière de l'exponentielle est valide pour tout z complexe.

On ne peut manquer de signaler le rapprochement entre les deux expressions $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ et $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{x}{n})^n$ (cette dernière égalité pouvant être prouvée en écrivant que $(1 + \dfrac{x}{n})^n = \exp(n\ln(1 + \dfrac{x}{2n}))$. Ce rapprochement provient d'une démarche effectuée par Euler en 1728 précisément pour déterminer une valeur numérique du nombre qui ne s'appelle pas encore e. Il procède de la façon suivante, en respectant le vocabulaire de l'époque. Il prend un entier n

infiniment grand (sic), de façon que e^x soit infiniment proche de $(1 + \frac{x}{n})^n$ puis effectue un développement selon la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(1 + \frac{x}{n})^n &= 1 + n\,\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{x^3}{n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\,\frac{x^4}{n^4} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1-i}{2}\,x^2 + \frac{(1-i)(1-2i)}{3!}\,x^3 + \frac{(1-i)(1-2i)(1-3i)}{4!}\,x^4 + \dots\end{aligned}$$

avec $i = \frac{1}{n}$ infiniment petit, "de sorte que" $\frac{1-i}{2}$ est infiniment proche de $\frac{1}{2}$, $\frac{(1-i)(1-2i)}{3!}$ de $\frac{1}{3!}$, $\frac{(1-i)(1-2i)(1-3i)}{4!}$ de $\frac{1}{4!}$, etc... et finalement $(1 + \frac{x}{n})^n$ est infiniment proche de $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ + ... On ne peut aujourd'hui plus appliquer aussi simplement la méthode d'Euler en raison de l'éclaircissement nécessaire à apporter aux points de suspension, difficulté passée sous silence par Euler.

❑ (ii) et (iv) : sh(x) et ch(x) sont les parties paires et impaires de l'exponentielle.

❑ (iii) et (v) : sin(x) et cos(x) ont leur dérivées $n^{\text{ème}}$ majorées par 1 sur $\mathbf{R}$, indépendamment de n et x. Comme pour l'exponentielle, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de conclure.

❑ (vi) : $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Le membre de droite admet une limite, $\frac{1}{1-z}$, si et seulement si $|z| < 1$.

❑ (vii) s'obtient en dérivant la formule (iv). Nous admettrons qu'il est possible de dériver une fraction rationnelle et une série entière par rapport à la variable complexe z comme on le fait pour une variable réelle. Si l'on a des scrupules, on peut aussi dériver la somme finie avant de passer à la limite. Pour tout z différent de 1 :

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = -\frac{(n+1)z^n}{1-z} + \frac{1-z^{n+1}}{(1-z)^2}$ de limite $\frac{1}{(1-z)^2}$ si $|z| < 1$.

Indiquons que l'égalité précédente donne ausi :

$$(z-1)\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)z^{k-1} + n + 1 = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

ce qui fournit les curieuses égalités suivantes pour $z = 10$, et $n = 1, 2, 3$... :

$9 \times 1 + 2 = 11$
$9 \times 12 + 3 = 111$
$9 \times 123 + 4 = 1111$
$9 \times 1234 + 5 = 11111$
...

❑ (viii) s'obtient par récurrence, en dérivant successivement les formules (vi), (vii),... Elle est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$. Si elle est vraie pour p, alors, en dérivant, on obtient :

$$\frac{p}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p-1} (n-p+1)\, z^{n-p}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p-1} \frac{n-p+1}{p}\, z^{n-p}$$

$$= \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} z^{n-p}$$

On peut mémoriser facilement cette formule en remarquant que les coefficients que l'on somme sont ceux d'une colonne du triangle de Pascal, (alors que les lignes donnent les coefficients du binôme de Newton) :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & & & & \to (1+z)^6 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1 \\
1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 \\
1 & 11 & 55 & 165 & 330 & 462 & 462 & 330 & 165 & 55 & 11 & 1 \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & & & \downarrow \\
 & & & \frac{1}{(1-z)^4}
\end{array}$$

❑ (x) s'obtient en intégrant (vi) pour x réel et (ix) en changeant x en $-x$. On remarquera en outre que, pour x élément de $[0, 1]$ (y compris en 1), la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ est alternée, avec une décroissance de la suite $(\frac{x^n}{n})_{n\in\mathbf{N}}$. La différence entre la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ et la somme totale est donc majorée par le premier terme négligé. On a ainsi :

$$\forall\, x \in [0, 1],\ \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad \sup_{x \in [0,1]} \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

On a donc ici un exemple de série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ qui converge uniformément vers ln(1 + x) sur [0, 1],

alors qu'elle ne converge pas normalement (puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \|_\infty = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge). Convergeant uniformément vers [0, 1], la somme de la série est continue sur [0, 1] et l'on a donc l'égalité avec ln(1 + x) sur [0, 1] et pas seulement sur [0, 1[. En particulier, pour $x = 1$, on a :

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$$

dont nous avons déjà donné plusieurs démonstrations dans le chapitre L2/SERIES.PDF. Une dernière démonstration est donnée dans le paragraphe *Comportement sur le cercle de convergence* du présent chapitre.

❑ (xi) s'obtient en intégrant (vi) pour $z = x^2$, réel. Comme pour ln(1 + x), la formule $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est valable y compris en 1, de sorte que :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

(formule découverte par Madhava, mathématicien indien de la région de Kerala vers 1400, puis indépendamment, par Gregory et Leibniz au XVIIème).

❑·(xii) Cette série s'appelle série du binôme de Newton. On prend α non entier positif, sinon la formule n'est que le développement polynomial d'une puissance entière de 1 + x avec le binôme de Newton. Nous en donnons quatre démonstrations. La première utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange, la deuxième montre comment utiliser une série entière pour résoudre une équation différentielle, la troisième montre réciproquement comment utiliser une équation différentielle pour trouver la somme d'une série entière, la quatrième est une démonstration historique due à Cauchy.
Pour $n = 0$, $\dbinom{\alpha}{n} = 1$, comme on a l'habitude de le faire pour un produit vide, et comme on le fait pour $n!$ ou x^n.

Démonstration 1 :
a) Le rayon de convergence de la série est égal à 1. Le critère de D'Alembert donne :

$$\left| \frac{\dbinom{\alpha}{n+1} x}{\dbinom{\alpha}{n}} \right| = \left| \frac{x\,(\alpha - n)}{n+1} \right| \text{ qui tend vers } |x| \text{ quand } n \text{ tend vers } \infty.$$

Donc la série $\sum \dbinom{\alpha}{n} x^n$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$, et le rayon de convergence vaut 1.

b) La formule de Taylor avec reste intégral conduit à :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-(n+1)}(x-t)^n\,dt$$

c) Soit x tel que $|x| < 1$, il suffit maintenant de montrer que le reste intégral tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On obtiendra alors la série du binôme de Newton. Ce reste, en valeur absolue, peut s'écrire :

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt\right| = \mathrm{R}_n(x)$$

La fonction $t \to \frac{x-t}{1+t}$ est une fonction homographique monotone, variant de x à 0 lorsque t varie de 0 à x. Sa valeur absolue est donc majorée par $|x|$.

D'où : $\mathrm{R}_n(x) \leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}|x|^n\,dt\right|$ (on a gardé la valeur absolue autour de l'intégrale dans le cas où $x < 0$)

$$\leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| |x|^n \frac{1}{|\alpha|}\left|(1+x)^\alpha - 1\right|$$

Or $\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| |x|^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, car c'est le terme général d'une série convergente, comme on le vérifiera facilement en utilisant le critère de D'Alembert. Donc le reste intégral tend bien vers 0.

Démonstration 2 :

Considérons la fonction $y(x) = (1+x)^\alpha$. On a alors $y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha y}{1+x}$ et $y(0) = 1$. Réciproquement, si on considère l'équation différentielle $y' = \frac{\alpha y}{1+x}$ sur $]-1, \infty[$, on trouve comme solutions les fonctions $\lambda(1+x)^\alpha$. La constante λ est donnée par la valeur $y(0)$. De sorte que :

$$y = (1+x)^\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y' = \frac{\alpha y}{1+x} \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

Cherchons donc les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solutions de cette équation différentielle. La condition $y(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Ecrivons l'équation différentielle sous la forme $(1+x)y' = \alpha y$. On obtient :

$$(1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} na_n\, x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} na_n\, x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$

en changeant d'indice dans la première série

$\Rightarrow \qquad \forall\, n,\ (n+1)\, a_{n+1} + na_n = \alpha a_n$

car deux séries entières sont égales si et seulement si leurs termes sont égaux

$\Rightarrow \qquad a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1}\, a_n$

On vérifiera par récurrence que la suite (a_n) vérifiant ces conditions est précisément définie par $a_n = \binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$. Du fait de l'unicité de la solution, on a donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

<u>Démonstration 3</u> :

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. On a, pour $n > 0$, $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} = \dfrac{\alpha-n+1}{n} \binom{\alpha}{n-1}$ ou encore :

$$n\binom{\alpha}{n} = (\alpha - n + 1)\binom{\alpha}{n-1}$$

$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} = xg'(x)$ d'une part

$= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha - n + 1)\binom{\alpha}{n-1} x^n$ d'autre part

$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - n)\binom{\alpha}{n} x^{n+1}$ en rebaptisant les indices $n - 1 \rightarrow n$

$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n+1}$

$= \alpha x g(x) - x^2 g'(x)$

$\Rightarrow \qquad xg'(x) = \alpha x g(x) - x^2 g'(x)$

$\Rightarrow \qquad g'(x) = \alpha g(x) - xg'(x)$ pour x non nul, mais les fonctions étant continues, la relation reste vraie en $x = 0$

$\Rightarrow \qquad g'(x)(1 + x) - \alpha g(x) = 0 \qquad\qquad (*)$

On peut alors résoudre l'équation différentielle en tenant compte du fait que $g(0) = 1$, ou bien encore considérer $h(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$. On a en effet :

$$h'(x) = \frac{g'(x)(1+x)^\alpha - \alpha g(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0 \text{ d'après la relation } (*)$$

Donc h est constante, égale à $h(0) = 1$, donc $g(x) = (1 + x)^{\alpha}$.

Démonstration 4 :
Cette dernière démonstration est plus compliquée que les précédentes, mais présente l'intérêt historique d'être due à Cauchy lui-même[6]. Comme dans la démonstration 1, on montre que la série converge si $|x| < 1$. Posons maintenant $\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, x étant provisoirement fixé entre -1 et 1.

Autrement dit, on considère la série comme fonction de α et non plus de x. φ est une fonction continue de α. En effet, si α varie dans un intervalle $[-a, a]$, alors :

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n\right| \leq \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!} |x|^n$$

avec $\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!} |x|^n$ terme général d'une série convergente (appliquer le critère de D'Alembert par exemple). $\varphi(\alpha)$ converge donc normalement sur $[-a, a]$ et est donc continue sur $[-a, a]$. a étant quelconque, φ est continue sur $\mathbf{R}$.

Considérons maintenant deux nombres α et β et effectuons le produit de Cauchy de $\varphi(\alpha)$ par $\varphi(\beta)$ (les séries convergeant absolument) :

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} x^n$$

Or $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$. En effet, cette égalité est vérifiée pour toute valeur entière positive de α et β (on dénombre de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments dans un ensemble à $\alpha + \beta$ éléments, en prenant k éléments dans la partie α, et $n - k$ dans la partie β). On a donc :

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}, \forall \beta \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Or les deux membres de l'égalité sont des fonctions polynomiales de α. Ces deux fonctions polynômes étant égales pour toute valeur entière positive de α sont égales pour toute valeur réelle de α (deux polynômes qui coïncident sur tous les entiers positifs sont égaux. Pourquoi ? Revoir au besoin le chapitre L1/POLYNOME.PDF). On a donc :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \beta \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

On regarde maintenant les deux membres comme deux fonctions polynomiales de β. Etant égales pour toute valeur entière positive de β, elles sont égales pour toute valeur réelle. Ainsi :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \beta \in \mathbf{R}, \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Il en résulte que :

[6] Cauchy, *Analyse algébrique*, cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, (1821), rééd. Jacques Gabay (1989), 164-166.

$$\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n = \varphi(\alpha+\beta)$$

Or cette relation fonctionnelle, avec φ continue, caractérise les applications de la forme $\alpha \to C^\alpha$, où C est la valeur de φ en 1, comme cela est démontré dans le paragraphe *Equations fonctionnelles* du chapitre L1/FONCTION.PDF.

On a donc $\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = C^\alpha$ avec $C = \varphi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} x^n = 1 + x$. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$$

EXEMPLES :

❑ Soit $f(x) = \sin(x) \times \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$. Cette fonction est développable en série entière et le rayon de convergence est 1. En effet, $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ sont développables en séries entières de rayon de convergence égal à 1, donc leur produit aussi avec un rayon supérieur ou égal à 1. $\sin(x)$ est développable en série entière de rayon de convergence infini. Donc le produit $\sin(x) \times \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Puisque $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers -1, $f(-1)$ ne peut être égal à une série convergente, donc le rayon de convergence est égal à 1. L'expression explicite de la série entière de f est compliqué. C'est le produit de Cauchy des séries des trois fonctions $\sin(x)$, $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

❑ $\arcsin(x)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$. En effet, sa dérivée vaut $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, donnant une fonction qui est développable en série entière sur cet intervalle. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2}-n)}{n!} (-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n\, n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^{2n}$$

donc, compte tenu du fait qu'$\arcsin(x)$ est la primitive s'annulant en 0 de cette fonction :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n\, n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

On peut exprimer le terme général de la série avec des factorielles en multipliant le numérateur par les termes pairs manquant $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$:

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Euler[7] s'est servi de ce développement pour en déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pour cela, il a considéré l'intégrale $\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ qui, d'une part vaut $\frac{1}{2}\left[\arcsin(x)^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8}$, et d'autre part :

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2^n\, n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)} \frac{1}{2n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Le lecteur consultera le chapitre *Suites et séries de fonctions* pour y trouver un théorème à appliquer justifiant qu'on puisse permuter les symboles de sommation et d'intégration.

Pour tout n, l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\theta)\,d\theta$ est une intégrale de Wallis et vaut $\frac{2 \times 4 \times ... \times (2n)}{3 \times 5 \times ... \times (2n+1)}$ (Pour son calcul, on intègre par parties pour obtenir une relation de récurrence. Voir le chapitre L2/SERIES.PDF pour plus de détails). Donc :

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2n)} \frac{1}{2n+1} \frac{2 \times 4 \times ... \times (2n)}{3 \times 5 \times ... \times (2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Euler conclut en remarquant que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$

❑ A l'inverse, il n'est pas toujours possible d'exprimer une série entière à l'aide de fonctions usuelles. Ainsi en est-il de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Sa série dérivée est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ égal à $-\frac{\ln(1-z)}{z}$ pour z réel compris entre – 1 et 1, de sorte que la somme de la série initiale vaut $\int_0^z -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ (fonction

[7] Euler, *Opera Omnia*, Ser. I, Vol 14, pp. 177-186, [E63 : Démonstration de la somme de cette suite 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + ...]. https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/63/

dilogarithme). Mais il n'existe pas de primitive de $-\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ sous forme de fonctions élémentaires. Les séries entières permettent donc de définir de nouvelles fonctions.

3- Comportement sur le cercle de convergence

Intéressons-nous maintenant au comportement de la série entière en un point du cercle frontière du disque de convergence, et que nous appelons ici cercle de convergence même s'il n'est pas dit que la série entière converge en tout point de ce cercle. Par changement de variable au moyen d'une similitude, et pour simplifier les notations, on peut se ramener au cas où le rayon de convergence vaut 1 et où le point du cercle que l'on considère est 1. On considère donc une série entière $\sum a_n x^n$ de somme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. On se pose deux questions :

si $\sum a_n$ converge et si on pose $L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a-t-on $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = L$?

si $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = L'$ existe, $\sum a_n$ est-elle convergente et a-t-on $L' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$?

Le théorème ci-dessous montre que la réponse est positive pour la première question, mais est plus délicate pour la seconde.

THEOREME

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* 1, *et soit* f *la somme de cette série.*

(i) *Si* $\sum a_n$ *converge et si on pose* $L = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *alors* $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = L$ (**Théorème d'Abel**)

(ii) *Si* $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = L'$ *existe et si la suite* (a_n) *est* ***positive***, *alors* $\sum a_n$ *est convergente et* $L' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Démonstration :

❑ (i) : La conclusion est directe si $\sum |a_n|$ converge, car alors la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D_f(1)$, donc, la somme f est continue sur $D_f(1)$ et en particulier sur $[0, 1]$. On a alors :

$$L = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Mais $\sum a_n$ peut converger sans converger absolument. Montrons alors que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur [0, 1]. Il en résultera que la fonction $x \in [0, 1] \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sera continue sur [0, 1], et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \mathrm{L}$.

Puisque $\sum a_n$ est supposée converger, on peut considérer, pour tout n, le reste $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ de la série.

La suite (R_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc elle est bornée, donc $\sum \mathrm{R}_n x^n$ converge. On a par ailleurs $a_n = \mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit N tel que : $\forall\, k \geq \mathrm{N}$, $|\mathrm{R}_k| \leq \varepsilon$ (convergence de la suite vers 0). Pour tout $n > \mathrm{N}$, on a, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{k=n}^{\infty} (\mathrm{R}_{k-1} - \mathrm{R}_k)\, x^k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{R}_{k-1} x^k - \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{R}_k x^k \\
&= \sum_{k=n-1}^{\infty} \mathrm{R}_k x^{k+1} - \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{R}_k x^k \\
&= \mathrm{R}_{n-1} x^n + \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{R}_k x^{k+1} - \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{R}_k x^k \\
&= \mathrm{R}_{n-1} x^n - \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{R}_k x^k (1-x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k\right| \leq |\mathrm{R}_{n-1}| + \sum_{k=n}^{\infty} |\mathrm{R}_k|\, x^k(1-x) \qquad \text{compte tenu du fait que } x^n \leq 1$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} x^k (1-x)$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon\, x^n$$

y compris pour $x = 1$, pour lequel on peut majorer 0 par 1

$$\leq 2\varepsilon$$

On a montré que :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{N}, \forall\, n > \mathrm{N}, \ \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k x^k\right| \leq 2\varepsilon$$

ce qui est bien la définition de la convergence uniforme de la série $\sum a_n x^n$.

❑ (ii) : Puisque, pour tout n, $a_n \geq 0$, on a :

$$\forall\, n,\ \forall\, x \in [0, 1[,\ \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(x)$$

donc $\quad \forall\, n,\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \mathrm{L}'$

La suite $(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)$ des sommes partielles est croissante majorée par L' donc converge vers une limite $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ inférieure ou égale à L'. Ainsi, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \mathrm{L}'$.

Par conséquent, pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \mathrm{L}'$ et on fait tendre x vers 1. On obtient alors :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \mathrm{L}' \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \mathrm{L}'$$

donc $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \mathrm{L}' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

EXEMPLES :

❑ On a vu que $\ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$ pour tout $x \in\,]-1, 1[$. Comme la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, d'après le (i), la formule reste vraie pour $x = 1$ et $\ln(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

De même, $\forall\, x \in\,]-1, 1[$, $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge, donc :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

❑ Dans le cas du (i), il y a continuité de la fonction $x \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ sur $]-1, 1]$, mais il n'a pas été prouvé que la somme $z \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ est continue sur $\mathrm{D}_0(1) \cup \{1\}$. Cette conclusion peut être fausse si on fait tendre z vers 1 sur une trajectoire tangente en 1 au cercle de rayon 1. On a seulement prouvé la continuité selon un rayon du disque.

❑ Dans le (ii), si $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 1, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$. En effet, les a_n étant positifs ou nuls, ou bien $\sum a_n$ converge ou bien $\sum a_n$ diverge vers $+\infty$. Mais, d'après le (i), la convergence de $\sum a_n$ est exclue sinon f admettrait une limite finie quand x tend vers 1.

Ainsi, pour $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Comme $\lim_{x\to 1} -\ln(1-x) = +\infty$, on en conclut que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, ce qui donne une nième démonstration de la divergence de la série harmonique.

❑ Le (ii) est utilisé dans le paragraphe sur les fonctions génératrices du chapitre L2/PROBA2.PDF.

❑ Dans le (ii), la conclusion peut être fausse si les a_n changent de signe. Ainsi, pour $a_n = (-1)^n$, on a, pour $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

avec $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$, alors que $\sum a_n$ diverge.

❑ L'exemple précédent montre que le (ii) peut servir de procédé de sommation pour des séries divergentes (méthode de sommation d'Abel, évoqué dans l'annexe *Historique* du chapitre L2/SERIES.PDF). La sommation d'Abel d'une série $\sum a_n$ consiste à définir sa somme S comme étant égale à $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Ainsi, le (i) montre que, si $\sum a_n$ converge, alors le procédé de sommation d'Abel donne la même valeur à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ que le procédé de sommation usuel passant par les limites des sommes partielles.

L'exemple précédent montre que la sommation d'Abel attribue à la série divergente $\sum (-1)^n$ la somme $\frac{1}{2}$.

De même, pour $\sum (-1)^{n+1} n$, la somme attribuée est :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\, x^n &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n\Big) \\
&= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\frac{1}{1+x}\Big) \\
&= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{(1+x)^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Pour $\sum (-1)^{n+1} n^2$, on aura :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2 x^n &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n\, x^n\Big) \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{(1+x)^2} \\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x \frac{1-x}{(1+x)^3} \\ &= 0\end{aligned}$$

Si on poursuit le calcul, la sommation d'Abel donne les valeurs $\dfrac{\mathrm{E}_m}{2^{m+1}}$ à $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^m$, $m \geq 1$, où les premières valeurs de la suite (E_m) sont :

1, 0, –2, 0, 16, 0, –272, 0, 7936, 0, –353792, 0, 22368256, 0, –1903757312, 0, ...

Il se trouve que les E_m interviennent aussi dans le développement en série entière de la fonction tangente hyperbolique th (on trouvera les premiers termes de ce développement en effectuant le quotient du développement limité de sh par celui de ch) :

$$\mathrm{th}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_m}{m!} z^m = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \frac{17z^7}{315} + \frac{62z^9}{2835} - \frac{1382z^{11}}{155925} + \frac{21844z^{13}}{6081075} - \frac{929569z^{15}}{638512875} + o(z^{15})$$

et de fait :

$$\frac{1}{1!} =$$

$$-\frac{2}{3!} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$$

$$-\frac{272}{7!} = -\frac{17}{315}$$

$$\frac{7936}{9!} = \frac{62}{2835}$$

$$-\frac{353792}{11!} = \frac{1382}{155925}$$

etc. Nous laissons au lecteur intéressé le soin de trouver un lien entre ces deux questions. ☺

4- Exponentielle complexe

Toutes les fonctions décrites au III-2) par des séries entières sur $\mathbb{R}$, peuvent être étendues à $\mathbb{C}$. C'est en particulier le cas de l'exponentielle.

DEFINITION

On pose, pour z complexe $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Cette série, ayant un rayon de convergence infini, est définie pour tout z complexe. A noter qu'en première année, on définit l'exponentielle complexe comme étant :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Nous allons donc montrer que les deux définitions coïncident. L'intérêt de définir l'exponentielle par une série entière permet d'unifier les deux exponentielles, réelle ou complexe, sous une définition unique. (A noter que le mathématicien Landau fut chassé de l'université de Göttingen par les nazis en 1934 sous prétexte d'avoir présenté l'exponentielle de cette façon à ses étudiants).

PROPOSITION

Pour tout z et z' complexes, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

<u>Démonstration</u> :

❑ On a :

$$e^z e^{z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{z^p\ z'^{n-p}}{p!(n-p)!} \qquad \text{(produit de Cauchy des deux séries)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{z^p z'^{n-p}}{n!}$$

On reconnaît un développement binômial.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + z')^n}{n!}$$

$$= e^{z+z'}$$

En particulier, si $z = x + iy$, avec x et y réels, on a $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ et :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos(y) + i\sin(y)$$

On peut également vérifier que la dérivée de l'exponentielle est bien l'exponentielle.

Annexe 1 : Exemples de série de Taylor divergente

1- Sous forme d'intégrale dépendant d'un paramètre

Dans les exercices du chapitre L2/SUITESF.PDF, on a montré que la fonction $f : x \to \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + xt}\,\mathrm{d}t$ est C^{∞} sur $[0, +\infty[$ et que son développement limité à droite de 0 est, pour tout n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k!\, x^k + o(x^n)$$

La fonction $h : x \to f(x^2)$ est aussi C^{∞} sur $[0, +\infty[$ comme composée de fonctions C^{∞} et son développement limité à droite de 0 est, pour tout n :

$$h(x) = f(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k!\, x^{2k} + o(x^n)$$

En particulier, $h_d^{(2k)}(0) = (-1)^k\, k! \times (2k)!$ et $h_d^{(2k+1)}(0) = 0$ pour tout k (où l'indice d indique qu'on prend les dérivées à droite de 0).
h étant paire, h est aussi C^∞ sur $]-\infty, 0]$ et son développement limité à gauche de 0 est aussi :

$$h(x) = f(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, k!\, x^{2k} + o(x^n)$$

Donc les dérivées à gauche de 0 de h vérifient aussi :

$$\forall\, k \geq 0,\ h_g^{(2k)}(0) = (-1)^k\, k! \times (2k)! \text{ et } h_g^{(2k+1)}(0) = 0$$

Les dérivées à droite de 0 étant égales aux dérivées à gauche, h est dérivable à tout ordre en 0. Donc h est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Mais h n'est pas développable en série entière car ce développement serait $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n!\, x^{2n}$, or ce développement diverge pour tout $x \neq 0$.

2- Sous forme de série de fonctions

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(n^2 x)}{2^n}$

❑ <u>Convergence</u> de f : $\left|\dfrac{\cos(n^2 x)}{2^n}\right| \leq \dfrac{1}{2^n}$ donc la série f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

❑ <u>Continuité</u> de f : la série étant normalement convergente et chaque terme étant continu, la somme est continue.

❑ <u>Dérivabilité</u> de f :

La série dérivée est $\sum_{n=0}^{\infty} -\dfrac{n^2 \sin(n^2 x)}{2^n}$ qui est elle-même normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc égale à la dérivée de f. Plus généralement :

$$f^{(2k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{n^{4k} \cos(n^2 x)}{2^n}$$

et
$$f^{(2k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+1}\, \frac{n^{4k+2} \sin(n^2 x)}{2^n}$$

les séries étant toujours normalement convergentes. On a donc :

$$f^{(2k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{n^{4k}}{2^n} \text{ et } f^{(2k+1)}(0) = 0$$

Ainsi, f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

❑ Cependant, nous allons voir que sa série de Taylor associée est divergente. Le terme général de cette série est $\dfrac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!}$. On a :

$$\left|\frac{f^{(2k)}(0)\, x^{2k}}{(2k)!}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{4k}}{2^n}\right| \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$$

$$\geq \frac{(2k)^{4k}}{2^{2k}} \times \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \text{ pour } n = 2k$$

$$\geq \frac{|x|^{2k}(2k)^{4k}}{2^{2k}(2k)^{2k}} \text{ car } (2k)! < (2k)^{2k}$$

$$\geq |x|^{2k}k^{2k}$$

Ce terme tend vers $+\infty$ pour x non nul quand k tend vers $+\infty$. La série initiale n'est donc absolument convergente pour aucune valeur de x non nulle. Le rayon de convergence est nul.

Annexe 2 : Une formule sur π découverte en 1995

En 1995, Bailey, Borwein et Plouffe découvrirent la formule suivante[8] :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

Ce qui est remarquable, c'est que la preuve de cette formule est à la portée d'un étudiant de deuxième année d'enseignement supérieur, et qu'elle aurait pu être découverte depuis longtemps. Précisons également qu'elle permet de calculer un chiffre de π d'un rang donné en base 16 sans avoir à calculer les chiffres qui précèdent, chose qu'on ne sait pas faire en base 10. On connaissait ainsi, en 2000, le 40 mille millardième chiffre binaire de π (un 0 suivi de 0000111110011111111100110111000111101).

Pour prouver la formule, il suffit de calculer la somme d'une série entière de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \frac{x^{8n+p}}{8n+p}, \; p \text{ entier strictement positif}$$

dont le rayon de convergence est $16^{1/8} > 1$. On prendra ensuite $x = 1$ et $p = 1, 4, 5$ ou 6. On a :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} x^{8n+p-1} = \frac{x^{p-1}}{1 - \dfrac{x^8}{16}} = \frac{16\, x^{p-1}}{16 - x^8} \qquad \text{et } f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = \int_0^x \frac{16\, t^{p-1}}{16 - t^8}\, dt \;\; \text{et } f(1) = \int_0^1 \frac{16\, t^{p-1}}{16 - t^8}\, dt$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = 16 \int_0^1 \frac{4 - 2t^3 - t^4 - t^5}{16 - t^8}\, dt$$

[8] D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, On the rapid computation of various polylogarithmic constants, 66:218, *Mathematics of Computation*, (1997), 903-913.

avec $\quad 4 - 2t^3 - t^4 - t^5 = -(t-1)(t^2+2)(t^2+2t+2)$

et $\quad 16 - t^8 = -(t^2-2)(t^2+2)(t^2+2t+2)(t^2-2t+2)$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = 16\int_0^1 \frac{t-1}{(t^2-2)(t^2-2t+2)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\int_0^1 \frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\mathrm{d}t$$

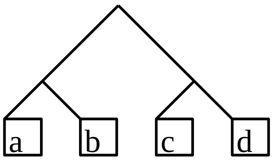
$$= 4\left[\frac{1}{2}\ln\left|t^2-2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t-2\right| + \arctan(t-1)\right]_0^1$$

$$= \pi$$

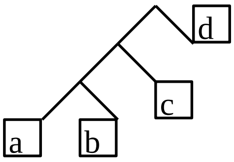
Annexe 3 : Les nombres Catalan

Cette annexe montre une application des séries entières à un probléme de dénombrement. Le $n^{\text{ème}}$ **nombre de Catalan** dénombre les façons de parenthéser sans ambiguïté le produit non associatif de n termes (par exemple le produit vectoriel de n vecteurs) ou bien le nombre d'arbres binaires ayant n feuilles. L'identité entre parenthésage et arbre binaire est classique. Par exemple, pour $n = 4$, on associe à chaque parenthésage un arbre binaire :

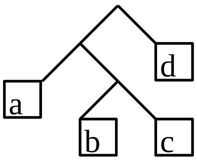
(ab)(cd) est associé à



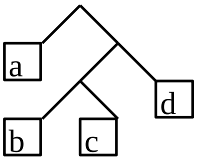
((ab)c)d est associé à



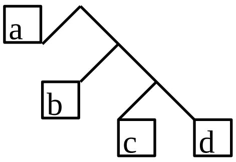
(a(bc))d est associé à



a((bc)d) est associé à



a(b(cd)) est associé à



Si a_n est le $n^{\text{ème}}$ nombre de Catalan, on a $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, ... On dispose de la relation de récurrence :

$$\forall\, n \geq 2,\ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \quad \text{si on pose } a_0 = 0$$

En effet, en partant de la racine, on crée un arbre à n feuilles en dessinant une branche à gauche suivie d'un arbre à k feuilles (il y a a_k tels arbres), et une branche à droite suivie d'un arbre à $n - k$ feuilles (il y a a_{n-k} tels arbres), k pouvant varier de 1 à $n - 1$. Ou encore, on commence par définir un parenthèsage de n termes $x_1, ..., x_n$ en commençant par $(x_1...x_k)(x_{k+1}...x_n)$ pour un certain k entre 1 et $n - 1$, avant de poursuivre le parenthésage sur $x_1...x_k$ (a_k possibilités) et sur $x_{k+1}...x_n$ (a_{n-k} possibilités).

Posons alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La relation de récurrence sur les a_n évoque un produit de Cauchy. Considérons alors $f(x)^2$:

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}\, x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}\, x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, x^n = f(x) - x$$

d'où $f(x)^2 - f(x) + x = 0$. On résout l'équation du second degré et on garde la seule solution qui s'annule en $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

En développant f en série entière, on trouvera $a_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2(2n-1)}$.

On pourrait objecter qu'au moment où l'on effectue le produit de Cauchy, on ignore si la série converge absolument. On lève cette objection par une réciproque, en remarquant que si on prend :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n \text{ avec } a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2(2n-1)}$$

alors $\quad f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$

donc $\quad f(x)^2 - f(x) + x = 0$

et en remontant le calcul, la suite (a_n) est telle que $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall\, n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, a_{n-k}$, relation qui définissent les valeurs de a_n de manière unique, donc $a_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{2(2n-1)}$ est bien l'expression cherchée.

Annexe 4 : Convolution

Soit $a = (a_n)$ une suite. La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ s'appelle **fonction génératrice** de la suite. Cette notion ne présente d'intérêt que si la série converge. Elle est utilisée par exemple en probabilités comme on le voit dans le chapitre L2/PROBA2.PDF. (En cas de divergence, une variante consiste à utiliser la fonction génératrice exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, x^n$ qui a un rayon de convergence supérieur à la première série). Notons $\mathrm{T}(a)$ la fonction $x \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ sont deux suites, la suite obtenue par **convolution** de a par b est la suite $c = (c_n)$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.On note cette suite $c = a * b$. Le produit de Cauchy de deux séries entières donne le résultat remarquable suivant :

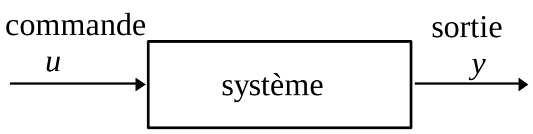
$$\mathrm{T}(a * b) = \mathrm{T}(a)\mathrm{T}(b)$$

Ainsi, la transformation T qui change une suite en une fonction, change également le produit de convolution en un produit normal.

La notion de convolution possède plusieurs définitions possibles et intervient dans bien des domaines.

- L'automatisme

Considérons un système dont la sortie y peut être modifiée par une commande u (ou entrée).



Par exemple, le système est une voiture, la commande est la pression exercée sur le frein, la sortie est la vitesse du véhicule. Considérons une modélisation particulièrement simple où la valeur de la sortie y à un instant x donné dépend des valeurs données à la commande dans le temps qui a précédé x. Pour chaque $t \geq 0$, la valeur de $u(x - t)$, commande donnée à un moment ayant précédé x d'une durée t, aura une influence sur la valeur de $y(x)$. Cette influence est déterminée par un coefficient multiplicatif $h(t)$. On suppose le système linéaire de sorte que toutes les entrées vont s'ajouter pour déterminer la sortie. Il s'agit donc de faire la somme des $u(x - t)h(t)$. Cette somme peut faire intervenir un nombre fini d'instants. Mais le plus souvent, on sera amené à effectuer une sommation sous forme d'intégrale.

$$y(x) = \int_0^{+\infty} u(x-t)h(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} u(t)h(x-t)\, \mathrm{d}t$$

On peut rendre l'écriture plus symétrique, compte tenu du fait que $h(t)$ est nul pour $t < 0$ (pour des raisons de causalité, la sortie ne peut dépendre d'une commande ultérieure).

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)h(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\infty} u(t)h(x-t)\, \mathrm{d}t$$

On a défini ci-dessus le produit de convolution de u par h, de sorte que :

$$y = u * h$$

u, h et y jouent ici le rôle des suites a, b, c. Le terme h peut être très général : une fonction, comme ci-dessus, mais aussi ce qu'on appelle une distribution, comme une distribution de Dirac, c'est à dire une impulsion ponctuelle en un instant donné. La distribution de Dirac δ_a est telle que la notation $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,\delta_a\,\mathrm{d}t$ est par définition égale à $u(a)$, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x-t)\,\delta_a\,\mathrm{d}t$ est donc égal à $u(x-a)$. Autrement dit, la sortie y à l'instant x est purement et simplement égale à la commande u à un moment ayant précédé x d'une durée a. On peut aussi faire une somme, voire une série d'impulsions de Dirac. Un peigne de Dirac, par exemple, de la forme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n$ consiste définir une sortie comme somme d'impulsions d'une commande à des intervalles réguliers : $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x-n)$. On retombe alors sur la notion de série.

Il existe alors des transformations T modifiant le produit de convolution en un produit usuel. Voyons-en quelques-unes.

- <u>La transformée de Fourier</u>

La transformée de Fourier fait l'objet du chapitre L3/TFOURIER.PDF.

Pour u intégrable sur $\mathbf{R}$, posons $\mathrm{T}(u)$ la fonction $x \to \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$. Si u est un signal de commande, $\mathrm{T}(u)$ peut s'interpréter comme la part que prend une onde de pulsation x dans le signal u. Il s'agit en fait de densité d'onde, mais peu importe. On montre alors que $\mathrm{T}(u * h) = \mathrm{T}(u)\mathrm{T}(h)$. Cette formule s'interprète de la façon suivante : l'amplitude de l'onde de pulsation x dans le signal de sortie $y = u * h$ est égal au produit de l'amplitude de cette onde dans le signal de commande, multiplié par l'amplitude de la même onde dans le facteur h.

Dans le cas où h est une distribution de Dirac δ_a par exemple, on a :

$$y(x) = (u * \delta_a)(x) = u(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{T}(y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-a)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(v)\, e^{-ix(v+a)}\,\mathrm{d}v \qquad \text{par changement de variables}$$

$$= u^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} u(v)\, e^{-ixv}\,\mathrm{d}v$$

$$= u^{-iax}\,\mathrm{T}(u)(x) = (\mathrm{T}(u)\mathrm{T}(\delta_a))(x) \text{ puisque } \mathrm{T}(\delta_a)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = e^{-iax}.$$

Plus généralement :

$$\mathrm{T}(y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-\infty} u(v)h(t-v)\,\mathrm{d}v \right) e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} u(v)h(t-v)e^{-ixt}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(v)e^{-ivx}\,h(t-v)e^{-ix(t-v)}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)e^{-ix(t-v)}\mathrm{d}t\right)\,u(v)e^{-ivx}\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(w)e^{-ixw}\mathrm{d}w\right)\,u(v)e^{-ivx}\mathrm{d}v$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{T}(h)(x)\,u(v)e^{-ivx}\mathrm{d}v = \mathrm{T}(h)(x)\int_{-\infty}^{\infty} u(v)e^{-ivx}\mathrm{d}v = \mathrm{T}(h)(x)\,\mathrm{T}(u)(x)$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{T}(y) = \mathrm{T}(h)\mathrm{T}(u)$.

- Les séries de Fourier

Les séries de Fourier font l'objet du chapitre L3/FOURIER.PDF.

Pour f 2π-périodique, on définit les coefficients de Fourier $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$. Posons $\mathrm{T}(f) = (c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$. On peut considérer ces coefficients comme une version discrète de la transformée de Fourier. $c_n(f)$ correspond à l'amplitude de l'onde e^{inx} dans le signal f. Par une démonstration comparable à la précédente, on montre que $\mathrm{T}(u * h) = \mathrm{T}(u)\mathrm{T}(h)$, avec ici :

$$(u * h)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

- La transformée de Laplace

La transformation de Laplace fait l'objet du chapitre L3/LAPLACE.PDF.

$\mathrm{T}(u)$ est ici la fonction $z \to \displaystyle\int_{0}^{\infty} u(t)\,e^{-zu}\,\mathrm{d}u$, où z est un réel strictement (ou complexe à partie réelle positive). On pourrait noter $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,e^{-zu}\,\mathrm{d}u$ en considérant que l'instant 0 est l'instant où le système démarre et que toutes les fonctions (commande, sortie) étaient nulles avant 0. Si z était imaginaire pur, on retrouverait la transformée de Fourier, mais la transformée de Laplace peut s'appliquer à des fonctions non intégrables pour laquelle la transformation de Fourier n'est pas définie. On montre là aussi que $\mathrm{T}(u * h) = \mathrm{T}(u)\mathrm{T}(h)$, avec ici $(u * h)(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} u(t)h(x-t)\,\mathrm{d}t$ compte tenu du fait que les fonctions sont nulles pour une variable négative. Le quotient $\mathrm{T}(h) = \dfrac{\mathrm{T}(y)}{\mathrm{T}(u)}$ s'appelle ici **fonction de transfert**. On note alors $\mathrm{Y} = \mathrm{T}(y)$, $\mathrm{U} = \mathrm{T}(u)$ et $\mathrm{H} = \mathrm{T}(h)$, d'où $\mathrm{H}(z) = \dfrac{\mathrm{Y}(z)}{\mathrm{U}(z)}$ sous une forme plus usuelle.

L'intérêt de cette transformation est donc de permettre un calcul extrêmement rapide de Y à partir de U et H, ou un calcul rapide de H à partir de Y et U par simple produit ou quotient. Des tables permettent alors de remonter aux fonctions y ou h initiales, et par exemple de déterminer h connaissant y et u, ce qui serait extrêmement difficile directement.

De même, dans l'annexe 3 avions-nous à trouver une suite $a = (a_n)$ vérifiant :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \text{et } \forall\, n \geq 2,\ a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

soit $a = a * a + u$, où u est la suite $(0,1,0,0,0,...)$. L'application de la transformation T pour les suites conduit à l'équation du second degré $\mathrm{T}(a) = \mathrm{T}(a)^2 + \mathrm{T}(u)$ et c'est bien ainsi d'ailleurs que nous avons déterminé la suite a.
Ou encore, pour dénombrer le nombre a_n de permutations sans points fixe de $[\![1, n]\!]$, nous avons en fait écrit que $(1) = (\frac{a_n}{n!}) * (\frac{1}{n!})$, où (1) désigne la suite constante égale à 1. L'application de la transformation T a conduit à l'égalité $\mathrm{T}((1)) = \mathrm{T}((\frac{a_n}{n!}))\ \mathrm{T}((\frac{1}{n!}))$. Le fait que $\mathrm{T}((1))$ et $\mathrm{T}((\frac{1}{n!}))$ étaient calculables nous a permis de déterminer $\mathrm{T}((\frac{a_n}{n!}))$ puis d'en déduire l'expression de $\frac{a_n}{n!}$.

Les analogies rencontrées sont donc les suivantes :

	Objets	Convolution	Transformation
Série entière	suite $a = (a_n)$	$(a * b)(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$	$\mathrm{T}(a)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ z^n$
Transformée de Fourier	fonction f sur $\mathbf{R}$	$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ g(x-t)\mathrm{d}t$	$\mathrm{T}(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-itx}\ \mathrm{d}t$
Série de Fourier	fonction f 2π-périodique	$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ g(x-t)\mathrm{d}t$	$\mathrm{T}(f)(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ e^{-int}\ \mathrm{d}t$
Transformée de Laplace	fonction f sur $\mathbf{R}^+$	$(f * g)(x) = \int_{0}^{x} f(t)\ g(x-t)\mathrm{d}t$	$\mathrm{T}(f)(z) = \int_{0}^{\infty} f(t)\ e^{-zt}\ \mathrm{d}t$

avec, dans chaque cas, $\mathrm{T}(f * g) = \mathrm{T}(f)\mathrm{T}(g)$

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Quel est le rayon de convergence R des séries $\sum a_n z^n$ suivantes ? On ne demande pas de calculer la somme de la série.

a) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n\, n!}$

b) a_n = somme des diviseurs de n

c) $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t$

d) $a_n = n^{\ln(n)}$

e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$

f) $a_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 2})$

Exo.2) Quel est le rayon de convergence et la somme des séries suivantes ?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(\frac{2n\pi}{3}) \frac{x^n}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)!} x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})\, x^n$

Exo.3) Pour t différent de 0 modulo π et $|x| < 1$, donner le développement en série entière des fonctions de x suivantes :

a) $x \to \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$

b) $x \to \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$

c) $x \to \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)$

Exo.4) Soit λ réel tel que $|\lambda| < 1$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x, f\,'(x) = f(\lambda x)$. Montrer que f est de classe C^∞, puis que f est développable en série entière. Donner son développement.

Exo.5) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, il existe un réel C tel que :

$$\forall\, x \in\,]-1, 1[\ \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (1 + x^2)^{k-1/2} = \frac{C}{(1 + x^2)^{k+1/2}}$$

Exo.6) Donner le développement en série entière des fonctions suivantes. On exprimera le terme général de la série au moyen du coefficient $\binom{2n}{n}$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}, \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\arcsin(x)$, $\mathrm{argsh}(x)$

c) $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Pour cette dernière fonction, on cherchera une équation différentielle linéaire du premier ordre qu'elle vérifie et on cherchera les séries entières solutions de cette équation différentielle. Procéder de même pour la fonction $\dfrac{\mathrm{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

Plusieurs de ces développements seront utiles, voire indispensables, pour certains exercices qui suivent, et qui seront signalés par le symbole ☺.

Exo.7) ☺ a) Montrer que $\sqrt{2} = \dfrac{7}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{100.200.300....(100n)}$ (Euler, 1755), avec la convention $\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{100.200.300....(100n)} = 1$ pour $n = 0$ (produit vide).

b) Montrer que $\dfrac{\pi}{3} = 1 + \dfrac{1^2}{4\times 6} + \dfrac{1^2\times 3^2}{4\times 6\times 8\times 10} + \dfrac{1^2\times 3^2\times 5^2}{4\times 6\times 8\times 10\times 12\times 14} + ...$ (Matsunaga, Japon, 1739)

c) Montrer que $\pi = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - 6\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\;\dfrac{1}{(2n+2)(2n+5)4^{n+1}}$ (Newton), avec la convention $\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} = 1$ pour $n = 0$ (produit vide).

d) Montrer que, pour tout n, $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$. Montrer que la série $\sum\dfrac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$ converge et donner la valeur de $S = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$. Quel est le terme général de la série produit de $S\times S$? Cette série produit converge-t-elle ?

Exo.8) ☺ On considère un pendule simple de longueur l dans un champ de pesanteur uniforme g. On repère la position du pendule par l'angle θ entre le pendule et la position d'équilibre stable. On note θ_0 l'amplitude maximale d'oscillation.

a) Montrer que la période d'oscillation du pendule est $T = 2\sqrt{\dfrac{l}{g}}\displaystyle\int_0^{\theta_0}\dfrac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}}$.

b) On pose $\gamma = \sin(\dfrac{\theta_0}{2})$. Effectuer dans l'intégrale T le changement de variable $\sin(\dfrac{\theta}{2}) = \gamma\sin(\varphi)$.

c) Utiliser le développement en série entière de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour en déduire un développement de T en série entière relativement à γ. Donner un développement limité de T à l'ordre de 2 par rapport à θ_0. On admettra que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(\varphi)\,d\varphi = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}\,\dfrac{\pi}{2}$ (intégrale de Wallis, calculée dans le chapitre L2/SERIES.PDF, ou bien plus loin dans cette section d'exercices).

d) Que vaut T pour $\theta_0 = \pi$?

Exo.9) ☺ ? On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

a) Calculer $f(x)$, en distinguant $x \geq 0$ et $x \leq 0$.

b) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\binom{2n}{n}}x^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\binom{2n}{n}}x^n$ pour $x \in [0, 4[$.

c) En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\binom{2n}{n}}$, ainsi que la formule de Takebe Kenko (Japon - 1722) :

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+2)!}$$

d) De même, traiter le cas où $x \in\,]-4, 0[$ et donner les valeurs de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\binom{2n}{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\binom{2n}{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\binom{2n}{n}}$.

Exo.10) ☺ On considère la fonction $f : x \in\,]-1, 1[\, \to \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin(\theta)}\, d\theta$.

a) Calculer $f(x)$ et montrer que qu'on peut l'exprimer sous la forme :

$$f(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Montrer que f est développable en série entière et préciser son développement.

c) En déduire $\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\, dt$ pour tout n.

Exo.11) ☺ a) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} x^n$?

b) Montrer que, pour tout t réel, on a :

$$\arctan(t) = \frac{t}{t^2+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} \left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n$$

c) Montrer que $\frac{\pi}{4} = 5 \arctan(\frac{1}{7}) + 2 \arctan(\frac{3}{79})$

d) En déduire que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ avec :

$$u_0 = \frac{7}{10} \text{ et } v_0 = \frac{237}{3125},\ u_n = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2}{100}\, u_{n-1} \text{ et } v_n = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{144}{100000}\, v_{n-1}$$

e) Majorer u_n par une suite géométrique. En déduire quelle valeur donner à n pour que $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p$ soit inférieur à 10^{-51}. Procéder de même avec v_n. Utiliser un logiciel de programmation permettant le calcul en multi-précision (par exemple Python muni du module mpmath, Maple, Mathematica, Sagemath, ...) pour en déduire une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 10^{-50} près. Euler[9] a utilisé cette méthode en 1755 pour calculer 20 décimales de π.

Exo.12) Soient n et p deux entiers positifs ou nuls. Soit A_{np} le nombre de chemins allant de (0, 0) à (n, p) en utilisant uniquement les déplacements selon les vecteurs (1, 0), (0, 1) ou (2, 1). On convient que $A_{00} = 1$.

a) Trouver une relation de récurrence entre les A_{np} permettant de les calculer récursivement. Quelles valeurs donner à A_{n0} et A_{0p} ?

b) Pour tout $p \geq 0$, on pose $G_p(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_{np}x^n$. Trouver une relation entre G_p et G_{p-1}. En déduire G_p.

c) En déduire une expression de A_{np}.

Signalons qu'il est possible de montrer que la suite (A_{nn}) intervient dans le calcul de π selon la formule suivante :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n+3}}{(n+1)\, A_{nn}\, A_{n+1,n+1}} = 4 - 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{34} + \frac{16}{3145} - \frac{4}{4551} + \frac{1}{6601} - \frac{1}{38341} + \ldots$$

mais la marge de ce chapitre est trop étroite pour pouvoir en contenir la démonstration.

Exo.13) On admet que la fonction $x \to \dfrac{x}{e^x - 1}$ admet un développement en série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \dfrac{x^n}{n!}$ de rayon de convergence R strictement positif.

a) Au moyen d'un produit de Cauchy, trouver une relation de récurrence entre les b_n, faisant intervenir les coefficients binomiaux. Les b_n s'appellent **nombres de Bernoulli**.

b) Donner les valeurs de b_0, b_1, b_2, b_3, b_4.

c) Calculer de deux façons différentes le coefficient de x^{k+1} dans le développement en série entière de $x(1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx}) = x\,\dfrac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$, où n et k sont deux entiers positifs ou nuls. Vérifier qu'il s'agit d'un polynôme en n de degré $k + 1$.

d) Donner les expressions de $1 + 2^2 + \ldots + n^2$, $1 + 2^3 + \ldots + n^3$, $1 + 2^4 + \ldots + n^4$.

Exo.14) Soient n et p deux entiers strictement positifs. On se propose de calculer le nombre d'applications surjectives de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

a) Combien y a-t-il d'applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

b) On note $\sigma(p, n)$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1, p]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$. Expliquer pourquoi $n^p = \sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n}{k}\, \sigma(p, k)$.

c) Pour chaque p, on considère les séries entières $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p}{n!}\, z^n$ et $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sigma(p, n)}{n!}\, z^n$. Montrer que ces deux séries convergent pour tout z.

---

[9] Lennart Bergrenn, Jonathan Borwein, Peter Borwein, *Pi, a source book*, Springer (2000), p.296, p.320.

d) Utiliser b) pour en déduire une relation entre $f(z)$ et $g(z)$.

e) En déduire que $\sigma(p, n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$.

Exo.15) On appelle partition de $[\![1, n]\!]$ un ensemble de parties disjointes non vides dont la réunion est $[\![1, n]\!]$. Par exemple, $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ est une partition de $[\![1, 4]\!]$. On note a_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$. On a par exemple $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$. On conviendra que $a_0 = 1$. Les a_n s'appellent **nombres de Bell**.

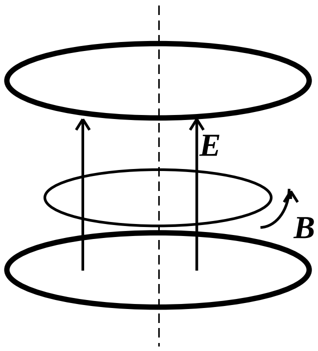
a) Montrer que, pour tout n, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

b) Soit f la fonction définie par : $\forall\ x,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. On admettra que le rayon de convergence de la série est strictement positif. Trouvez une équation différentielle vérifiée par f et en déduire son expression.

c) En déduire que $a_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ (**formule de Dobinski**), étrange égalité où un problème de dénombrement fini conduit à une expression sous forme de série.

Exo.16) Soit l'équation différentielle $3(x^2 + x)y'' + (8x + 3)y' + 2y = 0$. Chercher une solution $y(x)$ développable en série entière. Reconnaître la fonction ainsi trouvée.

Exo.17) Considérons un condensateur constitué de deux disques circulaires et parallèles reliés à un générateur extérieur fournissant une tension alternative de pulsation ω. Il se crée alors un champ électrique variable entre les deux plateaux, mais également un champ magnétique. En négligeant les effets de bord et en tenant compte de la symétrie du système, le champ $\boldsymbol{E}$ et le champ $\boldsymbol{B}$ sont fonctions de la distance r à l'axe du condensateur et du temps t.



Introduisons l'intensité du champ électrique et du champ magnétique sous la forme complexe $\mathrm{E}(r)e^{i\omega t}$ et $\mathrm{B}(r)e^{i\omega t}$. Compte tenu des équations de Maxwell $\boldsymbol{Rot(E)} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = c^2\ \boldsymbol{Rot(B)}$, on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dE}(r)}{\mathrm{d}r} = i\omega \mathrm{B}(r) & (1) \\ i\omega \mathrm{E}(r) = c^2 \left(\dfrac{\mathrm{dB}(r)}{\mathrm{d}r} + \dfrac{\mathrm{B}(r)}{r}\right) & (2) \end{cases}$$

On pose $\mathrm{E}(0) = \mathrm{E}_0$ et $\mathrm{B}(0) = 0$ (valeurs des champs sur l'axe du condensateur). Chercher des solutions à ce système différentiel sous forme de séries entières de r.

2- Solutions

Sol.1) a) Le critère de D'Alembert conduit à :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)n^n}{(n+1)^{n+2}} \left|z\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} 4\, \frac{n^n}{(n+1)^n} \left|z\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} 4\, (1 + \frac{1}{n})^{-n} \left|z\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} 4 \exp(-\, n\ln(1 + \frac{1}{n})) \left|z\right| \\ &= \frac{4}{e} \left|z\right| \end{aligned}$$

donc $\sum a_n\, z^n$ converge absolument si $\frac{4}{e}\left|z\right| < 1$ et diverge si $\frac{4}{e}\left|z\right| > 1$, donc $\mathrm{R} = \frac{e}{4}$.

b) $1 \leq a_n \leq \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ donc R = 1 car $\sum z^n$ et $\sum \frac{n(n+1)}{2}\, z^n$ ont pour rayon de convergence 1.

Pour calculer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{n(n+1)}{2}\, z^n$, il est plus rapide de remarquer que c'est, au facteur $\frac{z}{2}$ près, la série dérivée seconde de $\sum z^{n+1}$ dont le rayon de convergence est 1, plutôt que d'utiliser le critère de D'Alembert.

c) $\frac{1}{e}\int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t \leq a_n \leq \int_0^1 t^n\, \mathrm{d}t$ donc $\frac{1}{e(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme les séries $\sum \frac{z^n}{e(n+1)}$ et $\sum \frac{z^n}{n+1}$ ont toutes deux pour rayon de convergence 1, il en est de même de la série $\sum a_n\, z^n$.

d) La série $\sum a_n\, z^n$ diverge pour $z = 1$, donc $\mathrm{R} \leq 1$.

Par ailleurs, si $0 < r < 1$ et si on prend $r' = \frac{1+r}{2} \in \,]r, 1[$, alors $0 \leq a_n\, r^n = e^{n\ln(r)\, +\, \ln(n)^2} \leq r'^n$ pour n assez grand. Comme $\sum r'^n$ converge, il en est de même de $\sum a_n\, r^n$ et donc de $\sum a_n\, z^n$ pour $\left|z\right| < r$. Donc $\mathrm{R} \geq r$ pour tout $r < 1$, donc $\mathrm{R} \geq 1$.

Ayant à la fois $\mathrm{R} \leq 1$ et $\mathrm{R} \geq 1$, on a R = 1.

On aurait pu aussi appliquer le critère de D'alembert en vérifiant que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

e) $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc R = 1 car $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ a pour rayon de convergence 1.

f) $a_n = \cos(\pi n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}\,) = \cos(\pi n(1 + \frac{1}{2n} + \frac{7}{8n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})) = \cos(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{8n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n}))$

$$= (-1)^{n+1} \sin(\frac{7\pi}{8n} + o(\frac{1}{n})) \sim (-1)^{n+1} \frac{7\pi}{8n}$$

donc R = 1 car $\sum (-1)^{n+1} \frac{7\pi}{8n} z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Sol.2) a) Le rayon de convergence vaut 1 car $\frac{n^2}{n+1} \sim n$ et que $\sum nx^n$ a pour rayon de convergence 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1 + \frac{1}{n+1}) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

b) Le rayon de convergence vaut 1 car, pour $|x| < 1$, $\left| (-1)^n \cos(\frac{2n\pi}{3}) \frac{x^n}{n} \right| \leq |x|^n$, terme général d'une série convergente, et pour $|x| > 1$, la suite $((-1)^n \cos(\frac{2n\pi}{3}) \frac{x^n}{n})$ ne tend pas vers 0 (considérer la suite d'indice $n \equiv 0 \bmod 3$).

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(\frac{2n\pi}{3}) \frac{x^n}{n}$ pour $x \in]-1, 1[$, on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(\frac{2n\pi}{3}) x^{n-1}$$

$$= \mathrm{Re}(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(\frac{2ni\pi}{3}) x^{n-1}) \qquad \text{on reconnaît une série géométrique}$$

$$= \mathrm{Re}(-\frac{\exp(\frac{2i\pi}{3})}{1 + \exp(\frac{2i\pi}{3})x})$$

$$= \mathrm{Re}(-\frac{\exp(\frac{2i\pi}{3})(1 + \exp(-\frac{2i\pi}{3})x)}{1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3})x + x^2})$$

$$= -\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}) + x}{1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3})x + x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1-2x}{1-x+x^2}$$

Donc f est la primitive s'annulant en 0 de $x \to \frac{1}{2} \frac{1-2x}{1-x+x^2}$, donc $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - x + x^2)$.

c) Le rayon de convergence vaut 1 (se ramener à une série $\sum \dfrac{z^n}{n(n+1)}$ ou $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$).

Considérons $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. On a $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$ donc (en terant compte des valeurs des fonctions en $x = 0$), $f'(x) = -\ln(1-x)$ et $f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$.

La série demandée a pour somme $\dfrac{f(x^2)}{x^3} = \dfrac{(1-x^2)\ln(1-x^2) + x^2}{x^3}$.

d) Le rayon de convergence est infini (au moyen du critère de D'Alembert par exemple).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n - (n+1) + 1}{(n+1)!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$= xe^x - e^x + \frac{e^x - 1}{x}$$

e) Reconnaître le produit de Cauchy de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} \times \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$. Le rayon de convergence est donc supérieur ou égal à 1, mais par ailleurs ne dépasse pas 1 car la série diverge pour $x = 1$.

Sol.3) a) $\dfrac{1}{x^2 - 2x\cos(t) + 1} = \dfrac{1}{(e^{it} - x)(e^{-it} - x)} = \dfrac{1}{2i\sin(t)} \left(\dfrac{1}{e^{-it} - x} - \dfrac{1}{e^{it} - x}\right)$

$$= \frac{1}{\sin(t)} \operatorname{Im} \frac{1}{e^{-it} - x}$$

$$= \frac{1}{\sin(t)} \operatorname{Im} \frac{e^{it}}{1 - xe^{it}}$$

$$= \frac{1}{\sin(t)} \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)t} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)} x^n$$

b) On fait le produit du développement en série entière précédente par $1 - x^2$:

$$\frac{1 - x^2}{x^2 - 2x\cos(t) + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)} x^{n+2}$$

$$= 1 + 2\cos(t)x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)}{\sin(t)} x^n$$

$$= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(nt)\, x^n$$

ou bien directement :

$$\frac{1-x^2}{x^2-2x\cos(t)+1} = -1+\frac{1}{1-xe^{it}}+\frac{1}{1-xe^{-it}}$$
$$= -1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{it}}\right)$$
$$= -1 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty} e^{int}\,x^n$$
$$= -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty}\cos(nt)\,x^n$$

Une autre démonstration est donnée dans les propriétés des polynômes de Tchebychev, présentées dans le chapitre L2/POLORTHO.PDF.

c) $\ln(x^2-2x\cos(t)+1)$ a pour dérivée par rapport à x la fonction $x \to \dfrac{2x-2\cos(t)}{x^2-2x\cos(t)+1}$. Cette dernière fonction se développe, d'après le a) en :

$$(2x-2\cos(t))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\cos(t)\frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}x^n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+2)t)+\sin(nt)}{\sin(t)}x^n$$

en changeant d'indice dans la première série et en utilisant la formule $2\cos(a)\sin(b) = \sin(b+a)+\sin(b-a)$ dans la deuxième.

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((n+2)t)}{\sin(t)}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nt)-\sin((n+2)t)}{\sin(t)}x^n$$

$$= -2\sum_{n=0}^{\infty}\cos((n+1)t)\,x^n$$

en utilisant la formule $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Donc, en prenant une primitive terme à terme de cette série, et compte tenu que, $\ln(x^2-2x\cos(t)+1)$ s'annulant en 0, le terme constant de son développement en série entière est nul, on obtient :

$$\ln(x^2-2x\cos(t)+1) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\cos((n+1)t)\frac{x^{n+1}}{n+1} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nt)}{n}x^n$$

Sol.4) Vérifier par récurrence que, pour tout n, f est de classe C^n et $f^{(n)}(x) = \lambda^{1+2+\ldots+(n-1)} f(\lambda^n x)$.
Il en résulte que $f^{(n)}(0) = \lambda^{n(n-1)/2} f(0)$. Soit $R > 0$. Si on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[-R, R]$ (voir le chapitre L1/DLTAYLOR.PDF), on a :

$$\left| f(x) - f(0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(0)\,x^n}{n!}\right| \leq M_{n+1}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ où } M_{n+1} \text{ majore } |f^{(n+1)}|.$$

Or, pour tout R, M_{n+1} est majoré par le sup de $|f|$ sur [–R, R], indépendamment de n. Donc la limite est nulle quand n tend vers $+\infty$ et f est bien développable en série entière sur tout intervalle [– R, R], donc le rayon de convergence étant infini. On a alors :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$$

Sol.5) On a $(1 + x^2)^{k-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \ldots (k - n + \frac{1}{2}) x^{2n}$

donc :

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} (1 + x^2)^{k-1/2} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2})\ldots(k - n + \frac{1}{2})\ 2n(2n - 1)(2n - 2)\ldots(2n - 2k + 1)\ x^{2n-2k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + k)!} (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2})\ldots(- n + \frac{1}{2})\ (2n + 2k)(2n + 2k - 1)\ldots(2n + 1)\ x^{2n}$$

par changement d'indice

Par ailleurs :

$$\frac{1}{(1 + x^2)^{k+1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (- k - \frac{1}{2})(- k - \frac{3}{2})\ldots(- k - n + \frac{1}{2})\ x^{2n}$$

Si on compare les termes généraux d'ordre n des deux séries, le nombre de facteurs négatifs dans chacun des termes est le même, égal à n, donc les deux termes ont le même signe. Prenons-les donc en valeur absolue. Si, dans la première série, on factorise les facteurs de $(2n + 2k)(2n + 2k - 1)\ldots(2n + 1)$ chacun par 2, on obtient 2^{2k} en facteur, les facteurs pairs deviendront $(n + k)\ldots(n + 1)$ qui se simplifiera avec $\frac{1}{(n + k)!}$ pour donner $\frac{1}{n!}$. Les termes impairs deviendront les k facteurs $(n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})\ldots(n + k - \frac{1}{2})$ qui sont multipliés par (en valeur absolue) $(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2})\ldots\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2} \ldots (n - \frac{1}{2})$. Le résultat est à comparer avec les n facteurs (en valeur absolue) du terme de la deuxième série $(k + \frac{1}{2})(k + \frac{3}{2})\ldots(n + k - \frac{1}{2})$. On retrouve ces n derniers facteurs du terme de la deuxième série parmi les facteurs du terme de la première série et il reste en facteur :

$$C = 2^{2k} ((k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2})\ldots\frac{1}{2})^2 = (2k - 1)^2(2k - 3)^2\ldots3^2.1^2$$

Sol.6) a) Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{1}{2} - n + 1) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n - 1)}{2^n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n - 1)}{2.4.6\ldots(2n)} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n\, n!^2} x^n$$

donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \text{ , pour } x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$$

b) $\arcsin(x)$ (respectivement $\text{argsh}(x)$) est la primitive s'annulant en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (respectivement $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$). Donc :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$$

$$\text{argsh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$$

La ressemblance des deux développement en série entière conduit à une curieuse constatation. Pour $x \in [0, 1[$, $\dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$. Quelle est l'expression de cette série entière pour $x \in]-1, 0]$? On vérifiera que c'est $\dfrac{\text{argsh}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$. Ainsi, le "bon" prolongement de $\dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ sur $]-1, 0]$ n'est pas $\dfrac{\arcsin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$ comme on pourrait hâtivement le penser (le prolongement n'est pas dérivable en 0), mais $\dfrac{\text{argsh}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$. L'apparition de fonctions trigonométriques hyperboliques aux côtés de fonctions trigonométriques circulaires n'est pas rare (revoir au besoin le chapitre L1/FONCTUSU.PDF). D'autres exemples apparaîtront dans les exercices qui suivent.

c) Si $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x \arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x}{1-x^2} f(x)$.

Ou encore :

$(1 - x^2)\, f'(x) = 1 + xf(x)$

Cherchons $f(x)$ sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{2n+1}$ (en remarquant que f est impaire). On obtient :

$$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)a_n\, x^{2n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)a_n\, x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)a_n\, x^{2n+2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)a_n\, x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1)a_{n-1}\, x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^{2n}$$

La comparaison des termes constants donne $a_0 = 1$, et celle des termes de degré $2n \geq 2$ donne la relation :

$$(2n + 1)a_n - (2n - 1)a_{n-1} = a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n = \frac{2n}{2n + 1}\, a_{n-1}$$

d'où, par récurrence sur n, $a_n = \dfrac{2.4...(2n)}{1.3...(2n + 1)} = \dfrac{4^n}{(2n + 1)\binom{2n}{n}}$

Comme on a trouvé qu'une seule solution, c'est nécessairement f :

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n + 1)\binom{2n}{n}}\, x^{2n+1}}$$

Si on procède au même type de calcul pour $f(x) = \dfrac{\text{argsh}(x)}{\sqrt{1 + x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{2n+1}$, on trouvera respectivement :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{x\, \text{argsh}(x)}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{x}{1 + x^2}\, f(x)$$

$$(1 + x^2)\, f'(x) = 1 - xf(x)$$

$$(1 + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)b_n\, x^{2n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \geq 1,\ (2n + 1)b_n + (2n - 1)b_{n-1} = -\, b_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \geq 1,\ b_n = -\frac{2n}{2n + 1}\, b_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, n,\ b_n = (-1)^n\, \frac{2.4...(2n)}{1.3...(2n + 1)} = (-1)^n\, \frac{4^n}{(2n + 1)\binom{2n}{n}}$$

donc $$\boxed{\frac{\operatorname{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}\, x^{2n+1}}$$

REMARQUE : Si on cherche le développement en série entière de $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ par produit de Cauchy de celui de $\arcsin(x)$ et de celui de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient la relation non triviale suivante entre les coefficients des deux développements :

$$\forall\, n,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^n(2k+1)} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Sol.7) a) On rappelle que, pour $x \in\ ]-1, 1[$ (voir précédemment) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$$

Prendre $x = \dfrac{1}{50}$ dans l'égalité ci-dessus. On obtient :

$$\frac{5\sqrt{2}}{7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} \frac{1}{50^n\, n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{100.200.300....(100n)}$$

b) Le membre de droite vaut

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \times 3^2 \times ... \times (2n-1)^2}{4 \times 6 \times ... \times (4n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^2}{2^{4n}\, n!^2\, (2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^{2n}}$$

Or on a vu que $\arcsin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n}$ sur $]-1, 1[$. On obtient la série cherchée en prenant $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^{2n}} = 2 \arcsin(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

c) Considérons la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \frac{x^{2n+5}}{(2n+2)(2n+5)}$. On vérifiera que son rayon de convergence vaut 1 (par exemple avec le critère de D'Alembert). On a :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \frac{x^{2n+4}}{2n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = x^2\, g(x)$$

avec $\quad g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$

donc $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} x^{2n+1} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

d'après le développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ primitive de g' s'annulant en $x = 0$

donc $f'(x) = x^2 - x^2\sqrt{1-x^2}$

donc $f(x) = \int_0^x t^2 - t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$ f s'annulant en 0

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \frac{1}{(2n+2)(2n+5)4^{n+1}} = 8\,f(\frac{1}{2}) = 8\int_0^{1/2} t^2 - t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$

$= 8\,(\frac{1}{24} - \int_0^{\pi/6} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta)$ en posant $t = \sin(\theta)$

$= \frac{1}{3} - 2\int_0^{\pi/6} \sin^2(2\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{3} - \int_0^{\pi/6} 1 - \cos(4\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{3} - (\frac{\pi}{6} - \frac{\sin(2\pi/3)}{4}) = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

donc $\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - 6\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} \frac{1}{(2n+2)(2n+5)4^{n+1}}$

d) Si on considère les deux membres comme les coefficients d'une série entière, on a, pour le membre de droite, $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n\, x^n = \frac{1}{1-4x}$, $x \in\,]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, et à gauche $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^n$ qui est un produit de Cauchy correspondant au carré de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ dont on a vu qu'elle valait $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. On a bien $\frac{1}{1-4x} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ donc il y a bien égalité entre les coefficients de leur développement en série entière.

Pour montrer la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$, on applique le critère de Leibniz des séries alternées $\sum (-1)^n\, u_n$, avec $u_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$. Il s'agit de vérifier que (u_n) décroit et tend vers 0 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n^2+6n+2}{4n^2+8n+4} \leq 1$$

et $u_n \sim \frac{(2n)^{2n}\, e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{4^n\, n^{2n}\, e^{-2n}\, 2\pi n}$

en utilisant la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (voir L2/SERIES.PDF)

$$\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \to 0$$

La tentative d'utiliser le critère de D'Alembert échoue, mais permet de prouver que la suite (u_n) décroît. La tentative de montrer que la série converge absolument échoue également, mais permet de montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

On a vu que $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dbinom{2n}{n} \dfrac{x^n}{4^n}$ pour $x \in]-1, 1[$. Comme cette dernière série converge pour $x = 1$, le théorème d'Abel permet de conclure que :

$$S = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le produit de Cauchy de S × S est la série $\sum w_n$ avec $w_n = \dfrac{(-1)^n}{4^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k} = (-1)^n$. On constate que la série produit est divergente. Mais Euler lui attribuait néanmoins la valeur $\dfrac{1}{2}$, résultat parfaitement cohérent avec la valeur $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ trouvée précédemment.

Sol.8) a) Le principe de conservation de l'énergie (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle) permet d'énoncer que

$$\frac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + gl(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)) = 0 \qquad \text{avec } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \text{ vitesse angulaire}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) = \frac{4g}{l}\left(\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})} \qquad \text{pour la partie ascendante du mouvement}$$

On a donc $dt = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{l}{g}} \dfrac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}}$. La durée de cette partie ascendante, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \theta_0$ est :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}}$$

La période d'une oscillation complète est égale à 4 fois cette durée, d'où le résultat.

b) φ varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$ quand θ varie de 0 à θ_0. On a par ailleurs :

$$\frac{1}{2}\cos(\frac{\theta}{2})\, d\theta = \gamma \cos(\varphi)\, d\varphi$$

$$\cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2(\varphi)} \qquad \text{car } \cos(\frac{\theta}{2}) \geq 0 \text{ pour } \theta \in [0, \theta_0]$$

donc $\quad d\theta = \dfrac{2\gamma\cos(\varphi)}{\sqrt{1-\gamma^2\sin^2(\varphi)}}\, d\varphi$

puis $\sqrt{\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})} = \sqrt{\gamma^2 - \gamma^2 \sin^2(\varphi)} = \gamma \cos(\varphi)$

donc $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2 \sin^2\varphi}}$

c) On a vu que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$

donc $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{\gamma^{2n}}{4^n} \sin^{2n}(\varphi)\, d\varphi$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{\gamma^{2n}}{4^n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\varphi)\, d\varphi$$

avec $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{\pi}{2}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \frac{\gamma^{2n}}{16^n}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2(\frac{\theta_0}{2}) + ...\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + ...\right)$$

Dans la deuxième ligne, pour justifier qu'on peut permuter série et intégrale, on peut vérifier que $\sum \int_0^{\pi/2} \left| \binom{2n}{n} \frac{\gamma^{2n}}{4^n} \sin^{2n}(\varphi) \right| d\varphi$. Son terme général n'est autre que $\binom{2n}{n}^2 \frac{\gamma^{2n}}{16^n}$ (à une constante près) et :

$$\binom{2n}{n}^2 \frac{\gamma^{2n}}{16^n} \sim \left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 \frac{\gamma^{2n}}{16^n} = \frac{\gamma^{2n}}{\pi n}$$

qui est le terme général d'une série convergente si $\gamma < 1$, i.e. $\theta_0 < \pi$. (On a déjà calculé un équivalent de $\binom{2n}{n}$ dans l'exercice précédent).

d) Si $\theta_0 = \pi$, vérifier que l'intégrale diverge (ainsi que la série, d'ailleurs) et $T = \infty$.

Sol.9) a) Dans un exercice précédent, on a vu que, pour $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

et
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1} = \frac{\operatorname{argsh}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Donc, en dérivant ces deux égalités, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x \operatorname{argsh}(x)}{(1+x^2)^{3/2}}$$

On remplace x par $\frac{\sqrt{x}}{2}$ dans la première égalité pour $x \geq 0$, et par $\frac{\sqrt{-x}}{2}$ dans la deuxième si $x \leq 0$, et on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = \begin{cases} \dfrac{4}{4-x} + \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) \dfrac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}} & \text{pour } 0 \leq x < 4 \\ \dfrac{4}{4-x} - \operatorname{argsh}\left(\dfrac{\sqrt{-x}}{2}\right) \dfrac{4\sqrt{-x}}{(4-x)^{3/2}} & \text{pour } -4 < x \leq 0 \end{cases}$$

b) Les calculs du d) étant comparables avec ceux du b) et du c), mais avec des fonctions trigonométriques hyperboliques, ceux-ci sont menés en parallèle avec les calculs effectués avec les fonctions trigonométriques circulaires et sont indiqués en rouge.

$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} x^n$ est la primitive s'annulant en 0 de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} x^{n-1} = \frac{f(x)-1}{x}$. On cherche donc, pour $x \in [0, 4[$:

$$F(x) = \int \frac{1}{4-x} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \frac{4}{\sqrt{x}\,(4-x)^{3/2}} \, dx$$

$$= 2\int \tan(\theta) + \frac{\theta}{\cos^2(\theta)} \, d\theta \qquad \text{en posant } x = 4\sin^2(\theta)$$

$$= 2\theta \tan(\theta) = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} \qquad \text{qui s'annule bien pour } x = 0$$

Donc :

$$F(x) = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} x^n \text{ pour } 0 \leq x < 4$$

Respectivement, pour $-4 < x \leq 0$:

$$F(x) = \int \frac{1}{4-x} + \operatorname{argsh}\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right) \frac{4}{\sqrt{-x}\,(4-x)^{3/2}} \, dx$$

$$= -2\int \operatorname{th}(\theta) + \frac{\theta}{\operatorname{ch}^2(\theta)} \, d\theta \qquad \text{en posant } x = -4\operatorname{sh}^2(\theta)$$

$$= -2\theta \operatorname{th}(\theta) = -2 \operatorname{argsh}\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right) \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{4-x}} \qquad \text{qui s'annule bien pour } x = 0$$

Donc, sur $]-4, 0[$:

$$F(x) = -2\,\mathrm{argsh}\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right)\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{4-x}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}x^n$$

Posons $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}x^n$. g est la primitive qui s'annule en 0 de $x \to \frac{F(x)}{x}$. On cherche donc, pour $x \in\,]0, 4[$:

$$g(x) = \int \frac{F(x)}{x}\,dx = \int 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}\,dx$$

$$= \int 4\theta\,d\theta \qquad \text{en posant } x = 4\sin^2(\theta)$$

$$= 2\theta^2 = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \qquad \text{qui s'annule bien en } x = 0$$

donc $\quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}x^n = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2$ pour $0 \leq x < 4$

Respectivement, sur $]-4, 0[$:

$$g(x) = \int \frac{F(x)}{x}\,dx = \int 2\,\mathrm{argsh}\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{-x}\sqrt{4-x}}\,dx$$

$$= -\int 4\theta\,d\theta \qquad \text{en posant } x = -4\,\mathrm{sh}^2(\theta)$$

$$= -2\theta^2 = -2\,\mathrm{argsh}\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right)^2 \qquad \text{qui s'annule bien en } x = 0$$

donc $\quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}x^n = -2\,\mathrm{argsh}\left(\frac{\sqrt{-x}}{2}\right)^2$

c) On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}} = f(1) = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n}} = f(-1) = \frac{4}{5} - \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{4}{5} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{4}{5\sqrt{5}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}} = F(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\binom{2n}{n}} = F(-1) = -2\,\mathrm{argsh}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}} = g(1) = \frac{\pi^2}{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\binom{2n}{n}} = g(-1) = -2\,\mathrm{argsh}(\frac{1}{2})^2 = -2\,(\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\binom{2n}{n}} = f'(1) = \ldots = \frac{2}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\binom{2n}{n}} = -f'(-1) = \ldots = -\frac{6}{25} - \frac{4}{25\sqrt{5}}\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}\,((n-1)!)^2}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2}\,g(4) = \frac{\pi^2}{4}$$

Pour appliquer l'expression de g en $x = 4$, il convient de montrer que la série entière définissant g est continue en 4. Il suffit pour cela de vérifier la convergence normale de la série sur $[0, 4]$. De fait, pour tout $x \in [0, 4]$:

$$0 \leq \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}\, x^n \leq \frac{4^n}{n^2\binom{2n}{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{n^{3/2}}$$

en utilisant la formule de Stirling pour trouver un équivalent de $\binom{2n}{n}$

Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la série entière converge bien normalement sur $[0, 4]$.

Sol.10) a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin(\theta)}\,d\theta = \int_0^1 \frac{2}{t^2 - 2tx + 1}\,dt$ en posant $t = \tan(\frac{\theta}{2})$

$$= \int_0^1 \frac{2}{(t-x)^2 + 1 - x^2}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan(\frac{t-x}{\sqrt{1-x^2}})\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}) + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$$

b) Posons $x = \cos(\varphi)$ dans le premier terme, $0 < \varphi < \pi$, et $x = \sin(\psi)$ dans le second, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin(\theta)}\,d\theta = \frac{2}{\sin(\varphi)}\arctan(\tan(\frac{\varphi}{2})) + \frac{2}{\cos(\psi)}\arctan(\tan(\psi))$$

$$= \frac{\varphi}{\sin(\varphi)} + \frac{2\psi}{\cos(\psi)}$$
$$= \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

car $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

b) En utilisant les développement en série entière vus précédemment :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$$

$$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1}$$

On obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin(\theta)}\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1}$$

Mais aussi :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\sin(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin^n(\theta)\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)\, d\theta$$

car, pour $x \in]-1, 1[$, la série de fonctions $\theta \to \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin^n(\theta)$ converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c) On en déduit que, pour tout n :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$$
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(\theta)\, d\theta = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Ce sont les **intégrales de Wallis**, déjà calculées d'une autre façon dans le chapitre L2/SERIES.PDF.

Sol.11) a) Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} x^n$ est 1, d'après le critère de D'Alembert.

b) Méthode 1 :

On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} \left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n$$

qui évoque le développement en série entière de $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ recontré précédemment :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

La série cherchée est obtenue en divisant par x puis en remplaçant x par $\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n} = \frac{\arcsin(x)}{x\sqrt{1-x^2}}$$

puis $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n = \frac{t^2+1}{t} \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

On conclut en vérifiant que, pour tout t, $\arcsin\left(\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) = \arctan(t)$. Pour cela, poser $t = \tan(\theta)$, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

<u>Méthode 2</u> : Les deux membres étant égaux pour $t = 0$, on compare les dérivées des deux membres par rapport à t. On posera $x = \dfrac{t^2}{t^2+1}$ pour alléger les calculs.

La fonction $t \to \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} \left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n$ est la composée :

$$t \to x = \frac{t^2}{t^2+1} \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} x^n$$

toutes deux C^∞. On peut donc dériver terme à terme. La comparaison des dérivées par rapport à t des deux membres consiste à vérifier que :

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} \left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^n + \frac{t}{t^2+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} \frac{2tn}{(t^2+1)^2} \left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 = (1-2x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} x^n + 2(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} nx^n$$

ce qui est bien le cas. En effet, dans le membre de droite, le coefficient constant vaut 1 (provenant d'un produit vide dans la série de gauche), alors que le coefficient de x^n, $n > 0$, est :

$$\frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} - 2\,\frac{2.4.6...2(n-1)}{3.5.7...(2n-1)} + 2\,\frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)}\,n - 2\,\frac{2.4.6...2(n-1)}{3.5.7...(2n-1)}\,(n-1)$$
$$= \frac{2.4.6...2(n-1)}{3.5.7...(2n-1)} \left(\frac{2n}{2n+1} - 2 + \frac{4n^2}{2n+1} - 2(n-1)\right) = 0$$

c) Cette question a été résolue dans les exercices du chapitre L1/FONCTUSU.PDF.

d) D'après le b), avec respectivement $t = \dfrac{1}{7}$ et $t = \dfrac{3}{79}$:

$$5 \arctan(\frac{1}{7}) = \frac{7}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} \frac{1}{50^n}$$

ce que donne bien $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ avec $u_0 = \frac{7}{10}$ et $u_n = \frac{2n}{2n+1} \frac{1}{50} u_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{2}{100} u_{n-1}$

$$2 \arctan(\frac{3}{79}) = \frac{237}{3125} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)} (\frac{9}{6250})^n$$

ce que donne bien $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ avec $v_0 = \frac{237}{3125}$ et $v_n = \frac{2n}{2n+1} \frac{9}{6250} v_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{144}{100\,000} u_{n-1}$

e) $\forall\ n \geq 1,\ u_n \leq \frac{u_{n-1}}{50}$

donc $u_n \leq \frac{u_0}{50^n} = \frac{7}{10} \frac{1}{50^n}$

donc $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{7}{10} \frac{1}{50^p} = \frac{7}{10} \frac{1}{50^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{50}} = \frac{5}{7} \frac{1}{50^{n+1}}$

On choisit n tel que :

$$\frac{5}{7} \frac{1}{50^{n+1}} \leq 10^{-51}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{50^{n+1}} \leq \frac{7}{5}\, 10^{-51}$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 1 \geq \frac{\ln(\frac{7}{5}\, 10^{-51})}{\ln(\frac{1}{50})} \approx 29.93$$

$\Leftrightarrow n \geq 29$

De même, on aura :

$$v_n \leq \frac{237}{3125} (\frac{9}{6250})^n$$

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} v_n \leq \frac{237}{3125} (\frac{9}{6250})^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{9}{6250}} = \frac{6}{79} (\frac{9}{6250})^{n+1}$$

On prendra $n + 1 \geq \dfrac{\ln(\frac{79}{6}\, 10^{-51})}{\ln(\frac{9}{6250})} \approx 17.55$, soit $n \geq 17$.

On trouvera comme valeur de $\frac{\pi}{4}$:

0.785 398 163 397 448 309 615 660 845 819 875 721 049 292 349 843 776 ...

Sol.12) a) $A_{np} = A_{n-1,p} + A_{n,p-1} + A_{n-2,p-1}$ en fonction du dernier déplacement effectué. Si l'un des indices est négatif, le A correspondant est pris comme nul.

Pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, $A_{n0} = 1$ et $A_{0p} = 1$.
La convention $A_{00} = 1$ est compatible avec la formule de récurrence, de façon qu'elle puisse aussi s'appliquer au couple $(n, p) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$.
b) On a $A_{1p} = A_{0p} + A_{1,p-1} = 1 + A_{1,p-1}$ d'où $A_{1p} = p + 1$.

$$G_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ pour } x \in]-1, 1[$$

Pour $p \geq 1$:

$$G_p(x) = 1 + (p+1)x + \sum_{n=2}^{\infty} A_{np}\, x^n$$

$$= 1 + (p+1)x + \sum_{n=2}^{\infty} (A_{n-1,p} + A_{n,p-1} + A_{n-2,p-1})x^n$$

$$= 1 + (p+1)x + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n-1,p}\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n,p-1}\, x^n + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n-2,p-1}\, x^n$$

$$= 1 + (p+1)x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,p}\, x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n,p-1}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,p-1}\, x^{n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,p}\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,p-1}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,p-1}\, x^{n+2}$$

$$= xG_p(x) + G_{p-1}(x) + x^2 G_{p-1}(x)$$

$\Rightarrow \qquad G_p(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x} G_{p-1}(x)$

donc $\quad \forall\, p,\ G_p(x) = \dfrac{(1 + x^2)^p}{(1 - x)^{p+1}}$

c) On cherche le coefficient de degré n de $G_p(x)$. On a, en développant le numérateur avec le binôme de Newton et l'inverse du dénominateur en série entière :

$$G_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{2k} \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{p} x^k$$

et il suffit d'effectuer le produit de Cauchy. On obtient :

$$A_{np} = \sum_{k} \binom{p}{k} \binom{n+p-2k}{p} \qquad \text{où } k \text{ varie de 0 à } \mathrm{Min}\left(p, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

On peut proposer une démonstration combinaire directe de ce résultat (due à Xavier Oudot) :
k est le nombre de déplacements $(2, 1)$
il reste $p - k$ déplacements $(0, 1)$
et $n - 2k$ déplacements $(1, 0)$
soit $n + p - 2k$ déplacements au total.
Un chemin est donné par la liste de ces $n + p - 2k$ déplacements. Parmi ceux-ci, on en choisit p qui seront des déplacements $(2, 1)$ ou $(0, 1)$, les autres étant des déplacements $(1, 0)$, et sur les p déplacements, on en choisit k qui seront les déplacements $(2, 1)$.

Sol.13) a) $x = (\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!})(e^x - 1) = (\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!})(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!})$

donc, en cherchant le coefficient de x^n pour $n \geq 2$, on obtient :

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$$

b) $b_0 = 1$ limite $\frac{x}{e^x - 1}$ quand x tend vers 0. Puis on applique la relation précédente à partir de $n = 2$:

$$b_0 + 2b_1 = 0 \qquad \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2}$$

$$b_0 + 3b_1 + 3b_2 = 0 \qquad \Rightarrow b_2 = \frac{1}{6}$$

$$b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 0 \qquad \Rightarrow b_3 = 0$$

$$b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 5b_4 = 0 \qquad \Rightarrow b_4 = -\frac{1}{30}$$

On peut aussi effectuer le développement limité de $\frac{x}{e^x - 1}$:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4) \text{ donc } b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_3 = 0,\ b_4 = \frac{1}{30}$$

c) D'une part, en développant chaque exponentielle en série entière :

$$x(1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k}{k!} x^{k+1}$$

(avec la convention $0^0 = 1$). D'autre part :

$$\frac{x}{e^x - 1} (e^{(n+1)x} - 1) = (\sum_{p=0}^{\infty} b_p \frac{x^p}{p!})(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(n+1)^p x^p}{p!})$$

Le coefficient de x^{k+1} en effectuant le produit de Cauchy est $\sum_{p=0}^{k} \frac{b_p}{p!} \frac{(n+1)^{k+1-p}}{(k+1-p)!}$ donc :

$$0^k + 1^k + 2^k + \ldots + n^k = k! \sum_{p=0}^{k} \frac{b_p}{p!} \frac{(n+1)^{k+1-p}}{(k+1-p)!} = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^{k} \binom{k+1}{p} (n+1)^{k+1-p}\, b_p$$

d) $$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{3}{6}(n+1)\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - \frac{4}{2}(n+1)^3 + \frac{6}{6}(n+1)^2\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - \frac{5}{2}(n+1)^4 + \frac{10}{6}(n+1)^3 - \frac{5}{30}(n+1)\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

Sol.14) a) Il y a n^p applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

b) Pour définir une telle application f, on choisit son image, soit $\binom{n}{k}$ choix possibles, k variant de 1 à n étant le nombre d'éléments de cette image, puis cette image étant choisie, on définit une surjection sur cette image, soit $\sigma(p, k)$ choix possibles.

c) Pour la première série, on applique le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$$

donc la série converge

Pour la deuxième série, utiliser le fait que $\sigma(p, n) \leq n^p$.

d) On reconnaît un produit de Cauchy dans l'expression de f :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \sigma(p, k)\right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{\sigma(p, k)}{k!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \times g(z) = e^z\, g(z)$$

e) Donc $g(z) = f(z)e^{-z}$ et on effectue le produit de Cauchy pour obtenir :

$$\frac{\sigma(p, n)}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

d'où le résultat annoncé.

Une autre démonstration de l'expression de $\sigma(p, n)$ et utilisant un calcul matriciel a été donnée dans l'annexe I du chapitre L1/DENOMBRE.PDF.

Sol.15) a) Pour toute partition de $[\![1, n+1]\!]$, soit P la partie contenant $n + 1$ et k le cardinal de P^c (complémentaire de P). k peut varier de 0 à n et P^c est une partie quelconque de k éléments parmi $[\![1, n]\!]$. Pour définir une partition de $[\![1, n+1]\!]$, on prend une valeur de k entre 0 et n, on choisit la partie P^c de cardinal k dans $[\![1, n]\!]$ (il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles) et on partitionne P^c (il y a a_k telles partitions de P^c). Pour chaque k, on obtient ainsi $\binom{n}{k} a_k$ partitions de $[\![1, n+1]\!]$ dont la partie contenant $n + 1$ est de cardinal $n + 1 - k$. Il suffit ensuite de sommer de 0 à n. Le cas $a_0 = 1$ intervient quand on prend comme partition de P^c la partie vide.

b) $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!(n-k)!} x^n$$

On reconnaît le produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. D'où $f'(x) = f(x)e^x$ et $f(0) = 1$

donc, en résolvant l'équation différentielle :

$$f(x) = \exp(e^x - 1)$$

c) $$f(x) = \frac{1}{e} \exp(e^x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!\, n!} x^n = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!\, n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

D'où le résultat. Dans le calcul précédent, on peut permuter les deux symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\sum_{k=0}^{\infty}$ car la famille $\left(\dfrac{k^n}{k!\,n!} x^n\right)$ est sommable. En effet:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!\,n!}|x|^n = \exp(\exp(|x|))$$

Dans l'annexe I du chapitre L1/DENOMBRE.PDF on montre que le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ en p parties est $S(n, p) = \dfrac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^{p-k} k^n = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\dfrac{k^n}{k!(p-k)!}$ On en déduit que :

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} S(n, p) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\frac{k^n}{k!(p-k)!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$$

permettant de transformer la série $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{k!}$ en une somme finie.

Sol.16) Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, le coefficient de x^n de $3(x^2 + x)y'' + (8x + 3)y' + 2y$ est :

$$3n(n-1)a_n + 3(n+1)na_{n+1} + 8na_n + 3(n+1)a_{n+1} + 2a_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3(n+1)^2 a_{n+1} + (3n^2 + 5n + 2)a_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3(n+1)^2 a_{n+1} + (n+1)(3n+2)a_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3(n+1)a_{n+1} + (3n+2)a_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = -\frac{3n+2}{3n+3}a_n = -\frac{n+2/3}{n+1}a_n$$

D'où par récurrence :

$$a_n = (-1)^n\frac{(n-1/3)(n-1-1/3)...(1-1/3)}{n!}a_0 = \frac{-2/3\,(-2/3-1)...(-2/3-n+1)}{n!}a_0$$
$$= \binom{-2/3}{n}a_0$$

On reconnaît alors $y = a_0\,(1 + x)^{-2/3}$.

Sol.17) $E(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ et $B(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, r^n$ conduit à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} i\omega b_n r^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} i\omega a_n r^n = c^2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,b_n\, r^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} i\omega b_n r^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} i\omega a_n r^n = c^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\,b_{n+1}\, r^n$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = 0,\ i\omega a_0 = 2c^2 b_1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 1,\ (n+1)\,a_{n+1} = i\omega b_n,\ i\omega a_n = (n+2)\,c^2\, b_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = 0,\ b_1 = \frac{i\omega a_0}{2c^2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 2,\ a_n = \frac{i\omega b_{n-1}}{n}, \quad b_n = \frac{i\omega a_{n-1}}{(n+1)c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = 0,\ b_1 = \frac{i\omega a_0}{2c^2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 2,\ a_n = -\frac{\omega^2}{n^2c^2}\, a_{n-2} \quad b_n = -\frac{\omega^2}{(n+1)(n-1)c^2}\, b_{n-2}$$

$\Leftrightarrow$ Tous les a d'indice impair sont nuls, tous les b d'indice pair sont nuls et :

$$\forall\, n,\ a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{4^n\,(n!)^2\,c^{2n}}\,\mathrm{E}_0 \qquad b_{2n+1} = (-1)^n\, i\, \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+2)4^n\,(n!)^2\,c^{2n+2}}\,\mathrm{E}_0$$

Ainsi, $\mathrm{E}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{4^n\,(n!)^2\,c^{2n}}\, r^{2n}\,\mathrm{E}_0$

$$= \mathrm{J}_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)\mathrm{E}_0 \qquad \text{où } \mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n\,(n!)^2}$$

$$\mathrm{B}(r) = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+2)4^n\,(n!)^2\,c^{2n+2}}\, r^{2n+1}\,\mathrm{E}_0$$

$$= \frac{i}{c}\,\mathrm{J}_1\left(\frac{\omega r}{c}\right)\mathrm{E}_0 \qquad \text{où } \mathrm{J}_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{4^n\,(2n+2)\,(n!)^2}$$

Les fonctions J_0 et J_1 s'appellent des **fonctions de Bessel**.

◆