

# INTEGRALES MULTIPLES

## PLAN

### I : Méthodes de calcul

- 1) Intégrales doubles
- 2) Propriétés
- 3) Changement de variables
- 4) Intégrales de surface
- 5) Intégrales triples

### II : Applications et formules diverses

- 1) Centre d'inertie
- 2) Moment d'inertie

### Exercices

- 1) Énoncés
- 2) Solutions

Ce chapitre n'a pas pour but de développer une définition des intégrales de fonctions définies sur un espace de dimension supérieure ou égale à 2 et se borne à une approche intuitive de ce type d'intégrales par des méthodes de calcul.

## I : Méthodes de calcul

### 1- Intégrales doubles

Soit  $R = [a, b] \times [c, d]$  un rectangle du plan et  $f$  une fonction continue sur  $R$ , à valeurs réelles. On définit :

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

On admettra le **théorème de Fubini** qui énonce que le rôle des deux variables est symétrique, c'est-à-dire que l'on peut aussi écrire :

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

(Une démonstration en est donnée dans l'annexe I du chapitre L2/CALCDIF2.PDF).

### EXEMPLE :

□ Pour  $R = [0, 2] \times [0, 1]$  :

$$\iint_R x^2 + y \, dx dy = \int_0^2 \left( \int_0^1 x^2 + y \, dy \right) dx = \int_0^2 x^2 + \frac{1}{2} dx = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$\text{ou} \quad \iint_R x^2 + y \, dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^2 x^2 + y \, dx \right) dy = \int_0^1 \frac{8}{3} + 2y \, dy = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

On étend aussi cette définition au cas où le domaine d'intégration  $D$  est de la forme :

$$D = \{(x, y), a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions continues :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

La méthode générale de calcul de  $\iint_D f(x, y) \, dx dy$  consiste donc :

à intégrer d'abord par rapport à une variable,  $y$  par exemple, les bornes dépendant de  $x$  puis à intégrer par rapport à l'autre variable.

**EXEMPLES :**

$$\square \iint_D x^2 y \, dx dy \text{ où } D \text{ est l'ensemble } \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{60}$$

ou bien

$$= \int_0^1 \left( \int_0^{1-y} x^2 y \, dx \right) dy = \int_0^1 \frac{y(1-y)^3}{3} dy = \frac{1}{60}$$

$\square$  Calculons maintenant l'aire d'une ellipse :

$$\begin{aligned} & \iint_D dx dy \text{ où } D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \\ &= 4 \int_0^a \int_0^{f(x)} dy \, dx \text{ où } f(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ &= 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} ab \cos^2(\theta) d\theta \text{ en posant } x = a \sin(\theta) \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

## 2- Propriétés

Nous admettons que :

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy \text{ si } D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont disjoints}$$

$$f \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dx dy \geq 0$$

$$D_1 \subset D_2 \text{ et } f \geq 0 \Rightarrow \iint_{D_1} f(x, y) \, dx dy \leq \iint_{D_2} f(x, y) \, dx dy$$

$$f \leq g \Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dx dy \leq \iint_D g(x, y) \, dx dy$$

$$\iint_D (af + bg)(x, y) \, dx dy = a \iint_D f(x, y) \, dx dy + b \iint_D g(x, y) \, dx dy$$

### 3- Changement de variables

Nous commençons par un changement de variables affines :

#### CHANGEMENT AFFINE :

#### PROPOSITION

Soit le changement de variables  $\begin{cases} x = au + bv + c \\ y = du + ev + g \end{cases}$  avec  $ae - db \neq 0$  et  $f$  continue. Alors :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} f(au + bv + c, du + ev + g) |ae - db| \, du dv$$

où  $\Delta = \{(u, v) \mid (x, y) \in D\}$ .

La condition  $ae - db \neq 0$  signifie que la transformation  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est bijective.

Géométriquement, au premier ordre, une petite variation  $du$  du paramètre  $u$  déplace le point  $(x, y)$  selon le vecteur  $du \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ , et une petite variation  $dv$  du paramètre  $v$  déplace le point  $(x, y)$  selon le vecteur  $dv \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}$ . Ces deux vecteurs forment un parallélogramme d'aire la valeur absolue de  $du dv \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ , soit  $|ae - db| \, du dv$ . Ainsi, on remplace l'élément d'aire  $dx dy$  par l'élément d'aire  $|ae - db| \, du dv$  de ce parallélogramme.

#### Démonstration :

Une démonstration plus rigoureuse peut se faire comme suit :

□  $c$  et  $g$  n'ont aucune importance dans le changement de l'élément différentiel car  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est obtenu par simple translation de vecteur  $\begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix}$  à partir du point  $\begin{pmatrix} au + bv \\ du + ev \end{pmatrix}$ , or une translation ne change pas les aires des éléments de surface. On peut donc procéder d'abord au changement de variable  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ du + ev \end{pmatrix}$  puis à la translation  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + c \\ Y + g \end{pmatrix}$ . On aura alors :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(X + c, Y + g) \, dX dY \text{ où } D' \text{ est translaté de } D \text{ de } -\begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix}$$

et il suffit de montrer que  $dXdY$  doit être remplacé par  $|ae - db| dudv$ . On se ramène ainsi au cas d'un simple changement de variables de la forme :

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = du + ev \end{cases}$$

□ Considérons d'abord le cas où  $d = 0$ , avec  $ae \neq 0$ . On procède au changement de variable en deux temps, en opérant à chaque fois sur une intégrale simple, d'abord  $y = ev$  puis, pour chaque  $v$ ,  $x = au + bv$ , ce qui donne (en omettant les bornes pour simplifier les notations) :

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \int \left( \int f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int \left( \int f(x, ev) |e| dv \right) dx \end{aligned}$$

Nous avons remplacé  $dy$  par  $|e|dv$  et non  $edv$  pour la raison suivante : si  $e$  est négatif, l'intégrale

$\int_a^b f(x, y) dy$  avec  $a < b$  deviendra  $\int_{a/e}^{b/e} f(x, ev) edv$  avec  $\frac{a}{e} > \frac{b}{e}$ , ce qu'on préfère écrire  $-\int_{b/e}^{a/e} f(x, ev) edv$  de façon à ce que les bornes de l'intégrale soient dans le bon sens. On trouve bien

dans tous les cas  $\int f(x, ev) |e| dv$ , étant entendu que les bornes sont bien ordonnées. Il en sera de même dans un instant pour  $x$ .

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \iint f(x, ev) |e| dx dv \\ &= \int \left( \int f(x, ev) dx \right) |e| dv \end{aligned}$$

Or, pour chaque  $v$ ,  $\int f(x, ev) dx = \int f(au + bv, ev) |a| du$  en posant  $x = au + bv$ . Finalement :

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(au + bv, ev) |ae| dudv$$

ce qu'on voulait montrer.

□ On pourra procéder d'une façon analogue lorsque l'un des quatre coefficients  $a, b, d, e$  est nul. Ainsi, la démonstration est faite lorsque le changement de variable est opéré au moyen de matrices triangulaires  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & e \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ d & e \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ d & e \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} a & b \\ d & 0 \end{pmatrix}$ . Or le changement de variables général peut s'opérer au moyen de deux changements de variables triangulaires successifs :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-bd/e & 0 \\ d/e & 1 \end{pmatrix} \text{ si } e \neq 0.$$

Les deux changements successifs amènent en facteur devant l'élément différentiel d'abord  $\left| a - \frac{bd}{e} \right|$ ,

puis  $|e|$ , soit au total  $|ae - bd|$ .

COORDONNEES POLAIRES :

## PROPOSITION

Soit le changement de variables  $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ . Alors :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Delta} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \, r \, dr d\theta$$

où  $\Delta = \{(r, \theta) \mid r \geq 0, \theta \in [-\pi, \pi], (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in D\}$

Ceci s'interprète physiquement en considérant  $r \, dr d\theta$  comme un élément d'aire élémentaire, d'un petit rectangle de côtés  $dr$  et  $rd\theta$ .

### Démonstration :

□ Comme dans le cas affine, on procède à deux changements de variables successifs. Nous prendrons  $r > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Nous scinderons au besoin le domaine  $D$  en deux parties,  $D \cap \{(x, y) \mid y > 0\}$  pour lequel  $\theta$  décrit  $]0, \pi[$  et  $D \cap \{(x, y) \mid y < 0\}$  pour lequel  $\theta$  décrit  $]-\pi, 0[$ . L'aire d'une droite étant nulle dans le plan, le fait d'avoir omis l'axe des abscisses est sans influence sur l'intégrale. Les deux changements auxquels on procède sont :

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta) \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\cotan(\theta) \\ y \end{pmatrix}$$

Dans le cas  $y > 0$  (l'autre cas est laissé au lecteur), on a :

$$\iint f(x, y) \, dx dy = \int \left( \int f(x, y) dx \right) dy$$

or, pour chaque  $y$ , on a, en posant  $x = y\cotan(\theta)$  (les bornes étant sous-entendues) :

$$\begin{aligned} \int f(x, y) dx &= - \int f(y\cotan(\theta), y) \frac{y}{\sin^2(\theta)} d\theta \\ &= \int f(y\cotan(\theta), y) \frac{y}{\sin^2(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

en remettant les bornes dans le bon sens (le changement de variables  $\theta \rightarrow x = y\cotan(\theta)$  étant décroissant).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint f(x, y) \, dx dy &= \iint f(y\cotan(\theta), y) \frac{y}{\sin^2 \theta} d\theta dy \\ &= \int \left( \int f(y\cotan(\theta), y) y dy \right) \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

or, pour chaque  $\theta$ , on a, en posant  $y = r\sin(\theta)$  :

$$\int f(y\cotan(\theta), y) y dy = \int f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r\sin^2(\theta) dr$$

$$\Rightarrow \iint f(x, y) \, dx dy = \iint f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r \, dr d\theta$$

### EXEMPLES :

□ Aire du disque de rayon  $R$ .  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .  $\Delta = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$

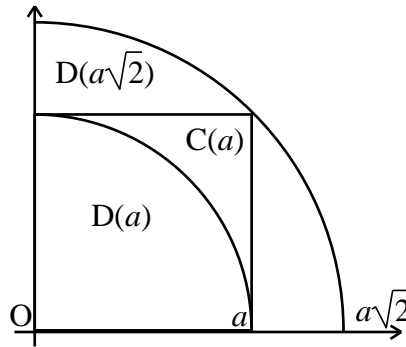
$$\iint_D dx dy = \iint_\Delta r dr d\theta = \frac{R^2}{2} \times 2\pi = \pi R^2$$

□ Calcul de :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = I = 2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Cette intégrale, dite **intégrale de Gauss**, intervient en calcul des probabilités (Voir la loi normale de Gauss dans le chapitre L3/PROBA3.PDF). On ne connaît pas de primitives de  $\exp(-\frac{x^2}{2})$  sous forme de fonctions simples. On peut néanmoins calculer l'intégrale de façon exacte. Posons  $F(a) = \int_0^a \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$ .

On considère le carré  $C(a)$  de côté  $a$  dont une diagonale admet comme extrémités les points  $O$  et  $A(a, a)$  et le quart de cercle  $D(a)$  de centre  $O$  de rayon  $a$ , dans le quart de plan  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ .



On a  $D(a) \subset C(a) \subset D(a\sqrt{2})$ , donc :

$$\iint_{D(a)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy \leq \iint_{C(a)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy \leq \iint_{D(a\sqrt{2})} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy$$

Or :

$$\begin{aligned} \iint_{C(a)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy &= \iint_{C(a)} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dx dy \\ &= \int_0^a \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \int_0^a \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = F(a)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \iint_{D(a)} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy &= \iint_\Delta \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r dr d\theta \text{ où } \Delta = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ -\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \right]_0^a = \frac{\pi}{2} (1 - \exp(-\frac{a^2}{2})) \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\pi}{2} (1 - \exp(-\frac{a^2}{2})) \leq F(a)^2 \leq \frac{\pi}{2} (1 - \exp(-\frac{a^2}{2}))$$

Quand  $a$  tend vers l'infini, on obtient :  $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Or  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$  n'est autre que le double de cette limite. Donc :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \sqrt{2\pi}}$$

Une autre démonstration est donnée dans les exercices du chapitre L2/SUITESF.PDF.

Si on effectue le changement de variable  $x = t\sqrt{2}$ , et compte tenu de la parité de la fonction, on obtient la variante :

$$\boxed{\int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

CAS GENERAL :

**PROPOSITION**

Soit le changement de variables  $(x, y) = \Phi(u, v)$  où  $\Phi$  est un difféomorphisme de  $\Delta$  dans  $D$  et soit  $f$  continue. Alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\Phi(u, v)) |J| du dv$$

où  $\Delta = \{(u, v) | \Phi(u, v) \in D\}$  et  $J$  le jacobien de  $\Phi$ .

On rappelle qu'un difféomorphisme est une application bijective, qui admet, ainsi que sa réciproque, des dérivées partielles continues. Le jacobien  $J$  est le déterminant  $2 \times 2$  constitué des dérivées partielles des deux composantes de  $\Phi$  par rapport à  $u$  et à  $v$ . On pourra aisément vérifier que cette formule généralise le cas affine, où le jacobien vaut  $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$ , et le cas polaire, où le

jacobien vaut  $\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$ .

Nous admettons cette formule, ainsi que sa généralisation à n'importe quelle dimension. Géométriquement, une petite variation  $du$  entraîne un déplacement du point  $(x, y)$  selon le vecteur

$$du \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}$$

. De même, une petite variation  $dv$  entraîne un déplacement du point  $(x, y)$  selon le vecteur

$$dv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

. On obtient un petit parallélogramme d'aire la valeur absolue de  $du dv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ . Le

déterminant n'est autre que le jacobien  $J$ . Ainsi, on remplace l'élément d'aire  $dx dy$  par l'élément d'aire  $|J| du dv$ .

**EXEMPLE :**

□ Effectuons le changement de variable  $\begin{cases} x = x \\ y = tx \end{cases}$  dans l'intégrale  $I = \iint_D \exp(-x^2 - y^2) dx dy$  où :

$$D = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$$

On obtient  $I = \iint_D \exp(-x^2 - t^2 x^2) x dx dt = \int_0^\infty dt \int_0^\infty \exp(-t^2 x^2 - x^2) x dx$

Or  $\exp(-t^2 x^2 - x^2) x$  admet comme primitive en  $x$  la fonction  $x \rightarrow -\frac{1}{2(1+t^2)} \exp(-t^2 x^2 - x^2)$  de sorte que  $\int_0^\infty \exp(-t^2 x^2 - x^2) x dx = \frac{1}{2(1+t^2)}$ .

Donc  $\iint_D \exp(-x^2 - y^2) dx dy = \int_0^\infty \frac{1}{2(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{4}$

Comme on a :

$$\iint_D \exp(-x^2 - y^2) dx dy = \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \int_0^\infty \exp(-y^2) dy = \left( \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \right)^2$$

On en déduit que :

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc  $\int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$

donc  $\int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \sqrt{2\pi}$  par changement de variable.

et l'on retrouve la valeur de cette intégrale, calculée plus haut.

#### 4- Intégrales de surface

Considérons une surface  $S$  paramétrée dans  $\mathbf{R}^3$  :  $(u, v) \rightarrow M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ ,  $(u, v)$  parcourant un domaine  $D$ ,  $x, y, z$  étant des fonctions de classe  $C^1$  de  $(u, v)$ . Au premier ordre, lorsque  $u$  varie de  $du$ ,

le point se déplace selon le vecteur  $du \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = du \frac{\partial M}{\partial u}$ , qui est l'un des vecteurs tangents à la

surface au point considéré. Si c'est  $v$  qui varie de  $dv$ , le point se déplace selon le vecteur

$dv \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = dv \frac{\partial M}{\partial v}$ , qui est un autre vecteur tangent à la surface. Ces deux vecteurs forment un



parallélogramme dont l'aire est  $d\sigma = du dv \left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \right\|$ . Le vecteur  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}$  est orthogonal au plan tangent, il est normal à la surface. Nous supposons la surface suffisamment régulière pour que  $\left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \right\|$  ne s'annule pas, sauf éventuellement en des points isolés. Nous supposons aussi que la surface ne se recoupe pas.

Si  $f$  est une fonction définie sur  $S$ , on appelle intégrale de surface  $\int_S f(\mathbf{M}) d\sigma$  l'intégrale double

$\iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v} \right\| du dv$ . On peut vérifier que cette quantité ne dépend pas du

paramétrage utilisé. Le cas le plus fréquent est celui où  $f = 1$ , auquel cas on calcule l'aire de la surface  $S$ .

**EXEMPLE :**

□ Soit à calculer l'aire  $A$  de la sphère de rayon  $R$  de centre  $O$  :

La sphère est l'ensemble  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ . Un point  $M$  de la sphère de rayon  $R$  admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = R \cos(\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta < \pi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Les paramètres sont ici  $\varphi$  et  $\theta$  au lieu de  $u$  et  $v$ . Sur la sphère terrestre,  $\varphi$  est la longitude en radians et  $\theta$  la colatitude (différence entre  $\frac{\pi}{2}$  et la latitude.  $\theta = 0$  au pôle nord,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  à l'équateur et  $\theta = \pi$  au pôle sud). On a :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{vecteur tangent au méridien de longitude } \varphi$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur tangent au parallèle de colatitude } \theta$$

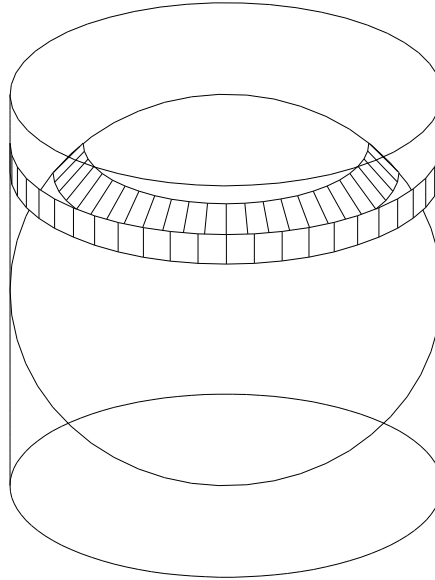
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = R^2 \sin(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{de norme } R^2 \sin(\theta)$$

On remarque que  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}$  est colinéaire à  $\mathbf{OM}$ , ce qui est bien normal,  $\mathbf{OM}$  étant orthogonal au plan tangent. L'élément d'aire  $d\sigma$  vaut donc  $R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$ . Il se retrouve rapidement en remarquant d'une variation  $d\theta$  occasionne un déplacement de longueur  $R d\theta$  le long d'un méridien, et qu'une variation  $d\varphi$  occasionne un déplacement de longueur  $R \sin(\theta) d\varphi$  le long d'un parallèle, les deux déplacements étant perpendiculaires.

Cherchons la surface latérale de la sphère pour  $\theta_0 < \theta < \theta_1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

$$A = \iint_D R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sin(\theta) d\theta = 2\pi R^2 (\cos(\theta_0) - \cos(\theta_1))$$

L'aire de la sphère s'obtient en prenant  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_1 = \pi$ , ce qui donne  $4\pi R^2$ . Mais le résultat plus général qui précède est remarquable, car l'aire du tronc de sphère compris entre les angles  $\theta_0$  et  $\theta_1$  est égale à l'aire de la surface latérale du cylindre de même rayon et de même hauteur, propriété connue d'Archimède.



Il en résulte des propriétés remarquables. Si  $M$  est un point distribué selon une loi uniforme sur la surface de la sphère, alors chacune de ses coordonnées sera uniformément distribuée dans le segment  $[-R, R]$ . En effet, la probabilité que la coordonnée  $z$  par exemple appartienne à un intervalle  $[a, b]$  est la probabilité que  $M$  appartienne à la bande sphérique comprise entre les cotes  $a$  et  $b$ . Cette probabilité est proportionnelle à l'aire de la bande sphérique, elle-même égale à l'aire de la bande correspondante du cylindre, donc proportionnelle à la hauteur  $b - a$ . Bien entendu, les trois coordonnées ne sont pas des variables aléatoires indépendantes puisqu'elles sont liées par la relation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Le cas de trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $[-R, R]$  correspond, lui, au choix d'un point  $M$  élément d'un volume cubique dont les côtés ont pour longueur  $2R$ .

Supposons qu'on dispose d'un langage de programmation doté d'une fonction `random()` qui renvoie une valeur numérique élément de  $[0, 1]$  avec une loi uniforme. On souhaite définir un point  $M$  de la sphère avec une loi uniforme. On commence par définir la composante  $z \leftarrow \text{random}()$ . Puis on définit l'angle  $\phi \leftarrow 2\pi \cdot \text{random}()$ . On pose enfin  $x \leftarrow \sqrt{1-z^2} \cdot \cos(\phi)$  et  $y \leftarrow \sqrt{1-z^2} \cdot \sin(\phi)$ . On peut aussi poser  $\theta \leftarrow \arccos(z)$  si on veut travailler en coordonnées sphériques.

Une propriété analogue d'équirépartition de chaque composante d'un vecteur est utilisée en mécanique quantique, où l'on suppose que les valeurs que peut prendre le spin d'une particule selon un axe quelconque, dans un ensemble de la forme  $\{-j, -j+1, -j+2, \dots, j-1, j\}$ ,  $j$  étant entier ou demi-entier, est uniformément réparti dans cet ensemble.

## 5- Intégrales triples

Les intégrales triples se traitent de la même façon. On intègre d'abord par rapport à une variable, puis par rapport à une deuxième, puis par rapport à la dernière variable.

**EXEMPLES :**

□ **Volume de la boule de rayon R de centre O :**

La boule est l'ensemble  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ . Son volume est une intégrale triple :

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

De même, on peut voir une pomme de terre découpée en cubes comme la somme des petits cubes  $dx dy dz$ .

a) *Méthode 1* : On intègre d'abord par rapport à  $z$ .

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz dx dy \text{ où } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} \text{ est le disque équatorial} \\ &= \iint_D 2\sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy \end{aligned}$$

(La dernière expression ci-dessus correspond à un découpage de la pomme de terre en frites verticales)

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Delta} 2\sqrt{R^2-r^2} r dr d\theta \text{ en passant en polaire, } \Delta = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ &= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2-r^2} r dr = 4\pi \left[ -\frac{1}{3} (R^2-r^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

b) *Méthode 2* : On intègre d'abord par rapport à  $x$  et  $y$ .

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \iint_{D(z)} dx dy dz \text{ où } D(z) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\} \\ &= \int_{-R}^R \pi (R^2 - z^2) dz \end{aligned}$$

(On a découpé la pomme de terre en rondelles horizontales)

$$= \pi (2R^3 - \frac{2R^3}{3}) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

c) *Méthode 3* : On passe en coordonnées sphériques  $\begin{cases} x = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$ ,  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Comme pour les intégrales doubles, le changement de variables utilise la valeur absolue du jacobien  $\det(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}) = \langle \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r} \mid \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \rangle$ . On a déjà calculé  $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi}$  dans le calcul de l'aire de la sphère, d'où l'on tire :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = r^2 \sin(\theta) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ de norme } 1$$

Donc le jacobien vaut  $r^2 \sin(\theta)$ , et le volume de la boule vaut :

$$V = \iiint r^2 \sin(\theta) \, dr d\theta d\varphi$$

Si on intègre d'abord par rapport à  $\theta$  et  $\varphi$ , on retombe sur l'aire  $4\pi r^2$  de la sphère de rayon  $r$ , telle qu'on la vu plus haut. On obtient donc :

$$V = \int_0^R 4\pi r^2 \, dr \quad (\text{On a découpé, innovation culinaire ☺, la pomme de terre en sphères concentriques. Ca marche mieux avec un oignon})$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3$$

□ Volume de l'ellipsoïde :

On pourra de même montrer que le volume limité par l'ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  vaut  $\frac{4}{3} \pi abc$ .

□ Volume du cône :

Soit un cône de hauteur  $H$  et de surface de base quelconque, d'aire  $S$ .

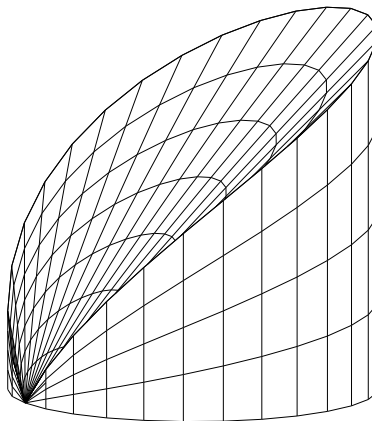
$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz \\ &= \int_0^H s(z) \, dz \end{aligned}$$

où  $s(z)$  est égale à l'aire de la surface obtenue par section du cône à la hauteur  $z$ . Par homothétie,  $s(z) = \frac{S z^2}{H^2}$ , donc :

$$V = \frac{S}{H^2} \times \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \times HS$$

□ Volume d'un cylindre tronqué :

Soit  $a > 0$ . Calculer le volume du domaine  $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - 2ax \leq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ .



Soit D le disque du plan Oxy d'équation  $x^2 + y^2 - 2ax \leq 0$ , ou encore  $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ . Son centre est  $(a, 0, 0)$  et son rayon est  $a$ . Le volume V cherché vaut  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ . On passe en polaire pour

obtenir  $\iint_{\Delta} r^2 \, dr d\theta$  où  $\Delta = \{(r, \theta) \mid r^2 \leq 2a \cos(\theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ . Donc :

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a \cos(\theta)} r^2 \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8a^3 \cos^3(\theta)}{3} \, d\theta = \frac{8a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2(\theta)) \cos(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{8a^3}{3} \left[ \sin(\theta) - \frac{\sin^3(\theta)}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{32a^3}{9} \end{aligned}$$

## II: Applications et formules diverses

### 1- Centre d'inertie

□ la masse d'une courbe  $\Gamma$  homogène de densité 1 est donnée par :

$$M = \int_{\Gamma} dl \quad \text{avec } dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \text{si } (x(t), y(t)) \text{ est un paramétrage } C^1 \text{ de } \Gamma$$

Ce n'est autre que la longueur de la courbe.

Le centre d'inertie de cette courbe est donnée par :

$$x_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x \, dl$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \, dl$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} z \, dl$$

□ La masse d'une plaque homogène de densité surfacique 1 est donnée par :

$$M = \iint_D dx dy$$

La masse d'une plaque de densité surfacique  $f(x,y)$  est donnée par :

$$M = \iint_D f(x,y) \, dx dy$$

Le centre d'inertie d'une plaque homogène de densité 1 est donné par :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_D x \, dx dy$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_D y \, dx dy$$

Le centre d'inertie d'une plaque de densité  $f(x,y)$  est donné par :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint x f(x,y) \, dx dy$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint y f(x,y) \, dx dy$$

□ En dimension 3, on aura de même, pour un solide de densité volumique  $f(x,y,z)$  :

$$M = \iiint f(x,y,z) \, dx dy dz$$

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint x f(x,y,z) \, dx dy dz$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint y f(x,y,z) \, dx dy dz$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint z f(x,y,z) \, dx dy dz$$

### THEOREME DE GULDIN

(i) Soit  $\Gamma$  une courbe coplanaire à l'axe  $Oz$ . L'aire de la surface engendrée par  $\Gamma$  en tournant d'un angle  $\theta$  autour de  $Oz$  est égale à  $L\theta D$ , produit de la longueur  $L$  de la courbe, par la longueur  $\theta D$  parcourue par son centre d'inertie. ( $D$  est la distance du centre d'inertie à l'axe)

(ii) Soit  $S$  une surface coplanaire à l'axe  $Oz$ . Le volume du solide engendré par  $S$  en tournant d'un angle  $\theta$  autour de  $Oz$  est égale à  $A\theta D$ , produit de l'aire  $A$  de la surface, par la longueur  $\theta D$  parcourue par son centre d'inertie.

Ce théorème peut aussi bien servir à calculer une aire ou un volume connaissant le centre d'inertie qu'à déterminer ce centre connaissant l'aire ou le volume.

Démonstration :

□ i) Soit  $G$  le centre d'inertie de  $\Gamma$ , se projetant en  $O$  sur  $Oz$ . Soit  $M$  un point de  $\Gamma$ , se projetant en  $H$  sur  $Oz$ . Soit  $x = HM$ . L'aire de la surface est égal à :

$$\int_{\Gamma} HM \theta \, dl = \theta \int_{\Gamma} x \, dl = \theta DL$$

□ ii) Soit  $M$  un point de  $S$ . Le volume engendré est égal à :

$$\iint_S HM \theta \, ds = \theta \iint_S x \, ds = \theta OG \iint_S ds = \theta DA$$

**EXEMPLES :**

□ Centre d'inertie d'un demi-cercle homogène  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$

La masse  $M$  est  $\pi R$ .  $x_G$  est nul par symétrie.

$$My_G = \int y \, dl = \int_0^\pi R \sin(\theta) R d\theta = 2R^2 \Rightarrow y_G = \frac{2R}{\pi}$$

On peut aussi appliquer le théorème de Guldin en faisant tourner de  $2\pi$  le demi-cercle autour de l'axe  $Ox$ . On engendre une sphère. On a donc :

$$4\pi R^2 = \pi R \times 2\pi y_G \Rightarrow y_G = \frac{2R}{\pi}$$

□ Centre d'inertie d'un demi-disque homogène  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$

La masse est  $\frac{\pi R^2}{2}$ .  $x_G$  est évidemment nul par symétrie. Calculons  $y_G$  :

$$\begin{aligned} My_G &= \iint y \, dx dy \\ &= \iint r \sin(\theta) \, r dr d\theta \text{ en passant en polaire, } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi \\ &= \frac{2}{3} R^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

On peut aussi appliquer le théorème de Guldin en faisant tourner de  $2\pi$  le demi-disque autour de l'axe  $Ox$ . On engendre une boule, ce qui donne :

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^2}{2} \times 2\pi y_G \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

□ Centre d'inertie d'une demi-boule de rayon  $R$ . Soit  $Oz$  son axe et  $d$  la distance du centre d'inertie de la demi-boule au centre du disque limite situé dans le plan  $Oxy$ . On a, en découpant la boule en tranche de hauteur  $z$  :

$$\frac{2\pi R^3}{3} d = \int_0^R \pi(R^2 - z^2) z \, dz = \pi R^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi R^4}{4} \Rightarrow d = \frac{3R}{8}$$

## 2- Moment d'inertie

□ d'un point  $M$  de masse  $m$  par rapport à un point  $O$  situé à une distance  $r$  :  $mr^2$

□ d'un point  $M$  de masse  $m$  par rapport à un axe situé à une distance  $r$  :  $mr^2$ . Exemple : si l'axe est  $Oz$  et si  $M$  a pour composante  $(x, y, z)$ , alors le moment est  $m(x^2 + y^2)$

□ d'un point  $M$  de masse  $m$  par rapport à un plan situé à une distance  $r$  :  $mr^2$ . Exemple : si le plan est  $Oyz$  et si  $M$  a pour composante  $(x, y, z)$ , alors le moment est  $mx^2$ .

En conséquence, le moment par rapport à  $O$  est égal à la somme des moments par rapport aux trois plans  $Oxy$ ,  $Oxz$  et  $Oyz$ . Le moment par rapport à  $Oz$  est égal à la somme des moments par rapport aux deux plans  $Oxz$  et  $Oyz$ .

Ces résultats s'applique à des courbes, des plaques ou à des solides en calculant une intégrale sur tous les points du solide. Par exemple, le moment d'inertie d'un solide  $V$  par rapport à l'axe  $Ox$  est :

$$\iiint_V y^2 + z^2 \, dx dy dz$$

Les remarques qui ont précédé évitent souvent de calculer des intégrales. Ainsi, le moment d'un cercle de centre O dans le plan Oxy de masse  $m$  de rayon  $r$  par rapport à son axe Oz est :

$$I_{Oz} = mr^2 = I_{Oxz} + I_{Oyz}$$

Par symétrie,  $I_{Oxz} = I_{Oyz} = \frac{mr^2}{2}$ , moment du cercle par rapport à l'un de ses diamètres.

On dispose également du

### THEOREME DE HUYGENS

*Le moment d'inertie d'un solide de masse M par rapport à un axe D est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$  parallèle à D et passant par le centre d'inertie G du solide, augmenté du moment d'inertie par rapport à D de G affecté de la masse M.*

Démonstration :

□ Le moment d'inertie du solide par rapport à D est :

$$I = \iiint_V R^2 dm \quad \text{où } R \text{ est la distance du point considéré à D}$$

Notons M un point quelconque du solide, H sa projection sur D, K sa projection sur  $\Delta$ . On a :

$$\mathbf{HM} = \mathbf{HK} + \mathbf{KM}$$

avec  $HM = R$ ,  $\mathbf{HK}$  vecteur constant *au* où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire porté par une perpendiculaire commune à D et  $\Delta$ ,  $a$  distance de D à  $\Delta$ . Posons  $r = \mathbf{KM}$

$$\Rightarrow R^2 = a^2 + r^2 + 2\langle \mathbf{HK}, \mathbf{KM} \rangle \quad \text{où } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ désigne le produit scalaire}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iiint_V a^2 + r^2 + 2\langle \mathbf{HK}, \mathbf{KM} \rangle dm \\ &= \iiint_V a^2 dm + \iiint_V r^2 dm + \iiint_V 2\langle \mathbf{HK}, \mathbf{KM} \rangle dm \\ &= a^2 M + \underbrace{\iiint_V r^2 dm}_{\text{moment par rapport à } \Delta} + 2 \underbrace{\langle \mathbf{HK}, \iiint_V \mathbf{KM} dm \rangle}_{\text{nul par proportionnel à la distance du centre d'inertie à } \Delta, \text{ et cette distance est nulle}} \end{aligned}$$

EXEMPLES :

□ **Barreau** de longueur L dont l'axe est orthogonal et passe par le centre :  $\frac{ML^2}{12}$

En effet, Soit I le moment d'inertie cherché, et soit  $I(L)$  le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal au barreau, mais passant par une extrémité. On a, d'après le théorème de Huygens :

$$I(L) = I + \frac{ML^2}{4}$$

mais  $I = 2I(\frac{L}{2})$  en considérons le barreau comme formé de deux demi-barreaux et  $I(\frac{L}{2}) = \frac{I(L)}{8}$  car les moments sont proportionnels à la masse et aux carrés des longueurs.

$$\Rightarrow I(L) = \frac{I(L)}{4} + \frac{ML^2}{4}$$

$$\Rightarrow I(L) = \frac{ML^2}{3}$$



$$\Rightarrow I\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{M}{2} \times \frac{L^2}{12} = \frac{ML^2}{24}$$

$$\Rightarrow I = \frac{ML^2}{12}$$

□ **Feuille rectangulaire**  $a \times b$  dont l'axe est parallèle au côté  $b$ , et passe par le centre :  $\frac{Ma^2}{12}$

On le considère comme somme de barreaux.

□ **Feuille rectangulaire**  $a \times b$  dont l'axe est orthogonal et passe par le centre :  $\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$

Si la feuille est contenue dans le plan Oxy, on a :  $I_z = I_{xz} + I_{yz} = I_x + I_y$  et l'on applique le résultat précédent.

□ **Anneau circulaire** compris entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$  dont l'axe est orthogonal à l'anneau et passe par le centre :  $\frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2}$

On découpe l'anneau en cercles concentriques.

$$I = \int_{R_1}^{R_2} r^2 2\pi r dr = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

$$= \frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2}$$

Le cas du **disque** de rayon  $R$  s'obtient en prenant  $R_1 = R$  et  $R_2 = 0$ , ce qui donne le moment  $\frac{MR^2}{2}$ .

□ **Anneau circulaire** compris entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ , l'axe étant diamétral :  $\frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{4}$

Si l'anneau est contenu dans le plan Oxy, on a :  $I_z = I_{xz} + I_{yz} = I_x + I_y$  et l'on applique le résultat précédent, avec  $I_x = I_y$  et  $I_z = \frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2}$ .

Le cas du **disque** de rayon  $R$  par rapport à un axe diamétral s'obtient avec  $R_1 = R$  et  $R_2 = 0$ , ce qui donne un moment d'inertie égal à  $\frac{MR^2}{4}$ .

□ **Cercle** de rayon  $R$  par rapport à un axe orthogonal  $I_z$  au cercle, passant par son centre :  $MR^2$ .

□ **Cercle** de rayon  $R$  par rapport à un axe diamétral :  $\frac{MR^2}{2}$ . En effet, si l'axe diamétral est Ox et si Oz est perpendiculaire au plan du cercle, on a  $I_z = I_x + I_y$  avec  $I_x = I_y$  et  $I_z = MR^2$ .

□ **Ellipse pleine**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  par rapport à l'axe Ox :  $\frac{Mb^2}{4}$ . En effet :

$$I_x = \iint y^2 dx dy = 4 \int_{y=0}^b y^2 a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy \quad \text{posons } y = b \sin(\theta)$$

$$= 4ab^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) d\theta = ab^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta) d\theta$$

$$= ab^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi ab^3}{4} = \frac{Mb^2}{4} \quad \text{car l'aire de l'ellipse est } M = \pi ab$$

C'est une généralisation du cas du disque.

□ **Ellipse pleine**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  par rapport à l'axe orthogonal à l'ellipse et passant par son centre :  $\frac{M(a^2 + b^2)}{4}$ .

En effet, il s'agit de  $I_x + I_y$  avec les moments par rapport à  $Ox$  et  $Oy$  calculés auparavant.

□ **Parallélépipède rectangle**  $a \times b \times c$  dont l'axe est parallèle au côté  $c$ , passant par le centre :  $\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$ . On le considère comme somme de feuilles.

□ **Ellipsoïde**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  par rapport à l'axe  $Oz$  :  $\frac{M(a^2 + b^2)}{5}$ . On rappelle que le volume  $M$  de l'ellipsoïde est  $\frac{4}{3} \pi abc$ . On découpe l'ellipsoïde en une succession d'ellipses pleines situées à la hauteur  $z$  :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}$ . La longueur des axes d'une telle ellipse est  $a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$  et  $b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$  :

$$I = 2 \int_0^c \frac{\pi ab(a^2 + b^2)}{4} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 dz = \frac{\pi ab(a^2 + b^2)}{2} \int_0^c \left(1 - \frac{2z^2}{c^2} + \frac{z^4}{c^4}\right) dz$$

$$= \frac{\pi abc(a^2 + b^2)}{2} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi abc(a^2 + b^2)}{15} = \frac{M(a^2 + b^2)}{5}$$

□ **Ellipsoïde de révolution**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  par rapport à l'axe  $Oz$  :  $\frac{2Ma^2}{5}$ . On applique le cas précédent avec  $a = b$ .

□ **Ellipsoïde de révolution**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  par rapport à l'axe  $Ox$  :  $\frac{M(a^2 + c^2)}{5}$

□ **Boule** de rayon  $R$  dont l'axe passe par le centre :  $\frac{2MR^2}{5}$ . On applique le cas de l'ellipsoïde avec  $a = b = c = R$ .

□ **Sphère** de rayon  $R$  dont l'axe passe par le centre.

Une boule de rayon  $R$  est vue comme la réunion de sphères concentriques de masse  $4\pi r^2 dr$ . Si  $I(R)dr$  est le moment d'inertie d'une telle sphère, alors celui de la sphère de rayon  $r$  vérifie  $I(r) = \frac{r^4}{R^4} I(R)$  car le moment d'inertie est proportionnel au carré des dimensions (ici le rayon) et à la masse, elle-même proportionnelle au carré du rayon. Le moment d'inertie de la boule est :

$$\frac{2 \times \frac{4}{3} \pi R^3 \times R^2}{5} = \int_0^R \frac{r^4}{R^4} I(R) dr = I(R) \times \frac{R}{5}$$

$\Rightarrow I(R) = \frac{8\pi R^4}{3}$   
 $= \frac{2R^2}{5} \times 4\pi R^2$  avec  $4\pi R^2$  masse surfacique  $M$  de la sphère de rayon  $R$ . Ainsi, le moment d'inertie de la sphère est  $\frac{2MR^2}{5}$ .

**□ Cylindre plein** de rayon  $R$  de longueur  $L$  dont l'axe  $Oz$  est parallèle à la génératrice, passant par le centre :  $I_z = \frac{MR^2}{2}$ . On le considère comme empilement de disques.

**□ Cylindre plein** de rayon  $R$  de longueur  $L$  dont l'axe  $Ox$  est orthogonal à la génératrice, passant par le centre :  $M(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12})$ . On peut le calculer en écrivant :

$$I_x + I_y = 2 \iiint_V z^2 dm + I_z$$

avec  $I_x = I_y$ ,  $I_z = \frac{MR^2}{2}$  vu précédemment et

$$\iiint_V z^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} z^2 \pi R^2 dz = \frac{\pi R^2 L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

On retrouve le cas du barreau en prenant  $R = 0$  et le cas du disque diamétral en prenant  $R = 0$ .

**□ Cylindre creux** de rayon  $R$  de longueur  $L$  dont l'axe  $Oz$  est parallèle à la génératrice, passant par le centre :  $I_z = MR^2$ . On le considère comme empilement de cercles.

**□ Cylindre creux** de rayon  $R$  de longueur  $L$  dont l'axe  $Ox$  est orthogonal à la génératrice, passant par le centre :  $M(\frac{R^2}{2} + \frac{L^2}{12})$ . On peut le calculer en écrivant :

$$I_x + I_y = 2 \iint z^2 dm + I_z$$

avec  $I_x = I_y$ ,  $I_z = MR^2$  vu précédemment et

$$\iint z^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} 2z^2 \pi R dz = \frac{2\pi RL^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$

On retrouve le cas du barreau en prenant  $R = 0$  et le cas du cercle d'axe diamétral en prenant  $L = 0$ .

## Exercices

### 1- Exercices

**Exo.1)** Tracer le domaine limité par la droite d'équation  $y = x$  et la courbe d'équation  $y^2 = 2ax$ . Soit  $D$  ce domaine. Calculer son aire et les coordonnées du centre d'inertie.

**Exo.2)** Calculer le volume du solide  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ .

**Exo.3)** Soit  $a$  un réel élément de  $]0, 1[$ . Calculer l'intégrale  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos(x))}{\cos(x)} dx$  à partir de l'intégrale double  $\iint_D \frac{1}{1 + y\cos(x)} dx dy$ , où  $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq a < 1\}$ .

**Exo.4)** Calculer les intégrales suivantes :

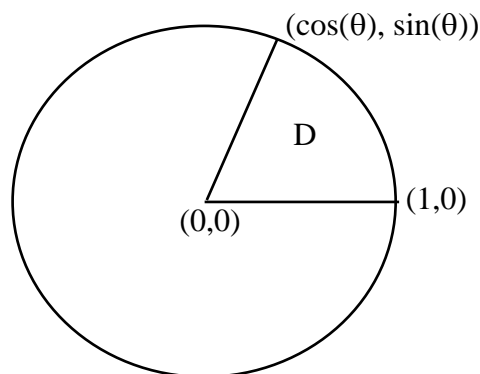
a)  $\iint_D xy \, dx dy$  avec  $D = \{(x, y) \mid 2x + y - 1 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$

b)  $\iint_D xy \, dx dy$  avec  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

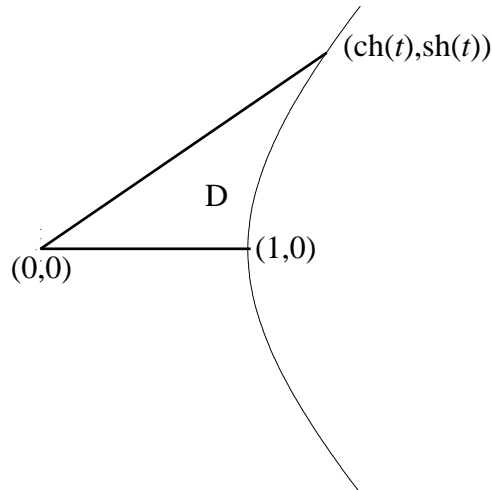
c)  $\iint_D x^2 + y^2 \, dx dy$  avec  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - y \geq 0\}$

**Exo.5)** Donner la valeur de  $\iint_D x^2 + y^2 \, dx dy$  où  $D = \{(x, y), 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ , par quatre méthodes différentes.

**Exo.6)** a) Soit  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Quelle est l'aire du domaine  $D$  suivant ?

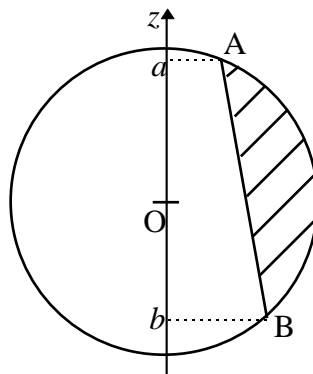


b) La courbe ci-dessous étant une branche d'hyperbole de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = \text{ch}(t) \\ y = \text{sh}(t) \end{cases}$ , quelle est l'aire du domaine  $D$ , où  $t > 0$  ?



**Exo.7) a) Boule évidée n°1** : on considère une boule de rayon  $R$  dans laquelle on a évidé un cylindre de révolution de hauteur  $h$ , dont l'axe passe par le centre de la sphère. Calculer le volume du solide restant.

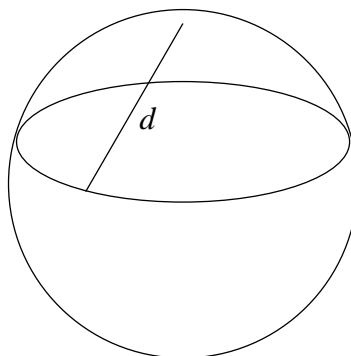
b) **Boule évidée n°2** : on considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe  $Oz$  de la partie hachurée du disque ci-dessous :



Montrer que le volume de ce solide vaut  $\frac{\pi}{6} AB^2 \times ab$ .

**Exo.8) a) Calotte sphérique** : calculer le volume de  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq h\}$ , pour  $0 < h < R$ .

b) Montrer que l'aire de cette calotte est égale à l'aire du disque plan de rayon  $d$  égal à la distance rectiligne du pôle au cercle frontière de la calotte.



**Exo.9)** Démonstration du **théorème de D'Alembert** (troisième démonstration de Gauss en 1815). Considérons un polynôme  $P$  à coefficient réel de degré  $n > 0$  et raisonnons par l'absurde en supposant que ce polynôme ne s'annule pas sur  $\mathbf{C}$ . Soit  $F$  la fonction de la variable complexe  $z$  définie par  $F(z) = \frac{zP'(z)}{P(z)}$ . Posons  $z = re^{i\theta}$ ,  $r \geq 0$ , et notons  $X(r, \theta)$  la partie réelle de  $F(z)$  et  $Y(r, \theta)$  sa partie imaginaire.

a) Que vaut la limite de  $F(z)$  quand  $z$  tend vers l'infini ? En déduire qu'il existe  $R > 0$  tel que  $X(R, \theta)$  est strictement positif pour tout  $\theta$ .

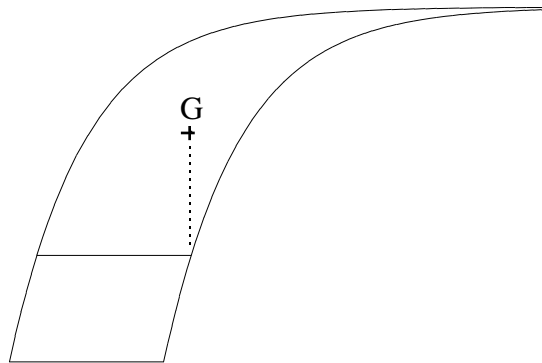
b) Montrer que, pour  $r \neq 0$ ,  $\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial \theta}$ .

c) Calculer de deux façons l'intégrale double suivante en coordonnées polaires  $\iint_D \frac{\partial X}{\partial r} dr d\theta$

où  $D$  est le disque de rayon  $R$ , et conclure.

**Exo.10)** On considère un domaine plan non borné, limité par le segment  $[-2, 0] \times \{0\}$  et par les deux courbes  $y = 1 - e^{-x}$  et  $y = 1 - e^{-(x+2)}$ ,  $x \geq 0$ . On coupe ce domaine par une droite  $y = h$ ,  $h \in ]0, 1[$ . Soit  $G$  le barycentre de la partie supérieure. Déterminer les coordonnées de  $G$ .

(D'après B. Polster, M. Ross, D. Treeby, *A case of continuous hangover*, Amer. Math. Monthly, 119(2), (février 2012), 122-139).



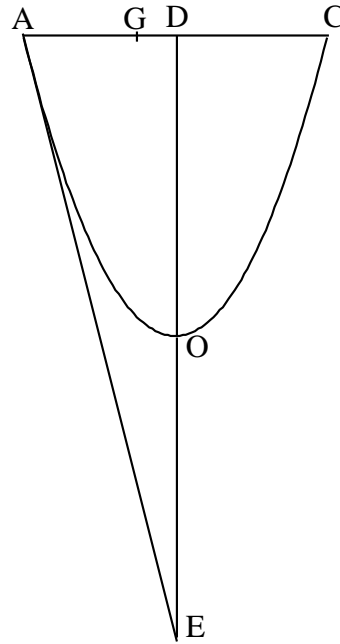
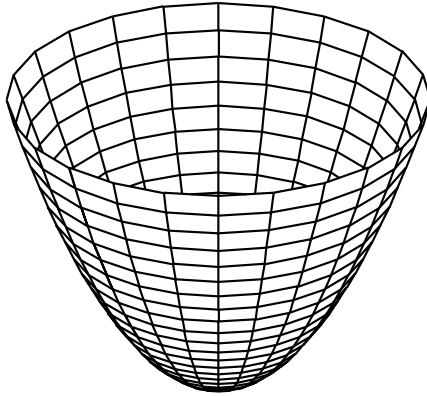
**Exo.11)** a) Soit  $U$  le domaine de  $\mathbf{R}^2$  défini par  $U = \{(t, y), 0 \leq t \leq 1, y \geq 0\}$ . En admettant qu'on peut appliquer le théorème de Fubini<sup>1</sup> sur l'intégrale  $\iint_{\Delta} \frac{y}{(1+t^2y^2)(1+y^2)} dt dy$ , déterminer la valeur

de l'intégrale  $-\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt$ .

b) En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

<sup>1</sup> Pour des intégrales généralisées, le théorème de Fubini s'applique pour des fonctions continues positives, ou plus généralement des fonctions intégrables, i.e. dont l'intégrale multiple, dans l'ordre que l'on veut, converge.

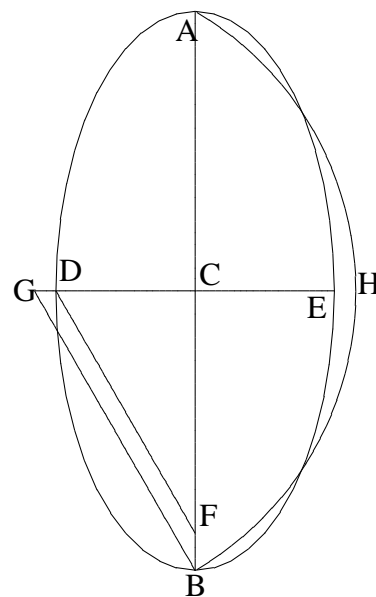
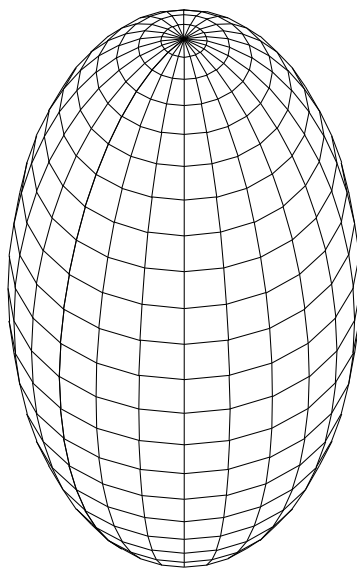
**Exo.12) Surface du paraboloïde de révolution** : On considère un paraboloïde de révolution, de sommet O, d'axe Oz, la section du paraboloïde par le plan  $xOz$  ayant pour équation  $az = x^2$ , où  $a$  est une constante strictement positive donnée.



a) Calculer l'aire de la surface du paraboloïde, limité par le cercle de rayon R.

b) Voici comment le résultat était énoncé par Huygens (Horl. Oscill., 1663, partie III, p.73). Soit [AC] le diamètre du cercle de rayon R et AOC la parabole obtenue comme intersection du paraboloïde par un plan passant par son axe. Soit (AE) la tangente à la parabole en A, coupant l'axe (OD) en E. Soit G tel que  $\frac{AE}{AD} = \frac{AG}{GD}$ . On pose  $H = AE + GD$ ,  $L = \frac{AC}{3}$  et K tel que  $K^2 = H \times L$ . Alors l'aire de la portion de paraboloïde est égale à l'aire du disque de rayon K. Vérifier cette affirmation.

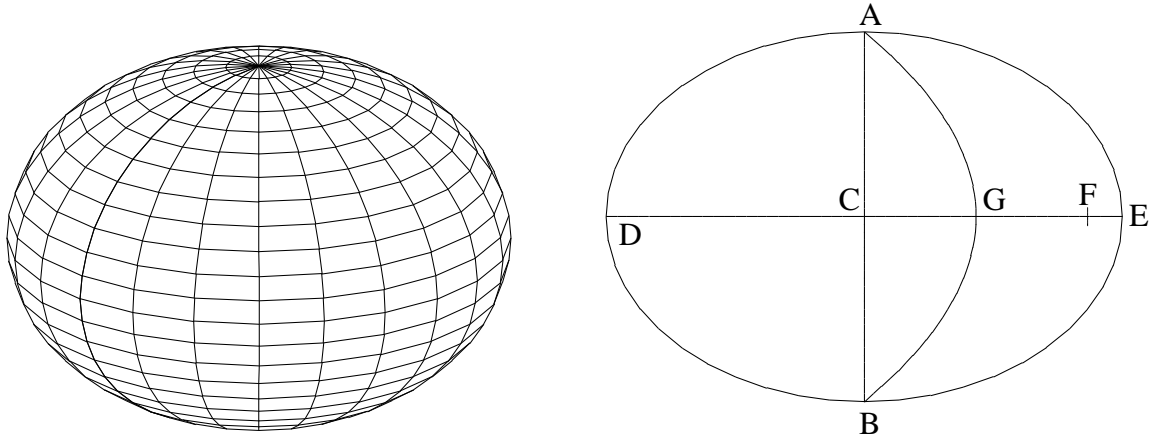
**Exo.13) La surface d'un ellipsoïde de révolution** : On considère un ellipsoïde de révolution de demi grand axe  $a$  et de demi petit axe  $b$ , l'axe de révolution de l'ellipsoïde étant l'axe  $a$ .



a) Calculer son aire.

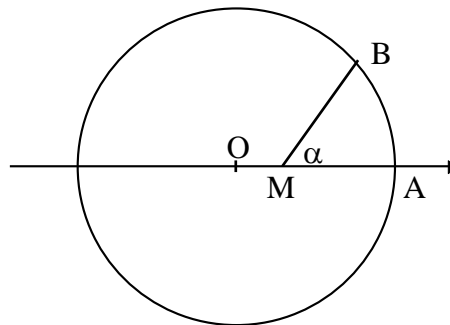
b) Voici comment le résultat était énoncé par Huygens (Horl. Oscill., 1663, partie III, p.74-75). Soit ADBE une ellipse de centre C, de demi grand axe  $AC = CB = a$ , de demi petit axe  $CE = CD = b$ . Soit F sur (AB) tel que  $DF = a$  (autrement dit, F est un foyer de l'ellipse). Soit (BG) parallèle à (DF) et coupant (DE) en G. On considère l'arc de cercle BHA de centre G et de rayon GB. Soit K la quantité telle que  $K^2 = CD \times (DE + \text{arc}(BHA))$ . Alors l'aire de l'ellipsoïde est égale à l'aire du disque de rayon K. Vérifier cette affirmation.

c) Calculer l'aire de l'ellipsoïde lorsque  $a$  est inférieur à  $b$ .



d) Soit F le foyer de l'ellipse ADBE situé entre C et E, avec  $AC = CB = a$ ,  $DC = CE = b$ . Soit G le milieu de [CF]. Soit L la longueur de l'arc de parabole BGA de sommet G et d'axe (DG), et H la longueur telle que  $H^2 = DE \times L$ . Alors l'aire de l'ellipsoïde est égal à l'aire du disque de rayon H. Vérifier cette affirmation.

**Exo.14)** Soit un disque de rayon 1 de centre O, origine d'un repère orthonormé du plan. Soit  $\alpha$  un réel élément de  $]0, \pi[$ . Soit  $a$  un réel élément de  $] -1, 1[$ . Quelle est l'aire du secteur angulaire AMB de sommet  $M = (a, 0)$  et d'angle  $\widehat{AMB}$  égal à  $\alpha$  ?



**Exo.15)** Montrer que l'isobarycentre d'une plaque triangulaire ABC coïncide avec l'isobarycentre des trois sommets A, B, C, mais pas avec celui des trois côtés [AB], [BC] et [CA]. Donner un exemple montrant que cette propriété ne se généralise pas à un quadrilatère ABCD, et donner une construction géométrique simple donnant l'isobarycentre de la plaque ABCD et celui des quatre sommets.

**Exo.16)** a) On considère le domaine de  $\mathbf{R}^3$  limité par les deux cylindres  $x^2 + z^2 = 1$  et  $y^2 + z^2 = 1$ . Quel est le volume de ce domaine ?

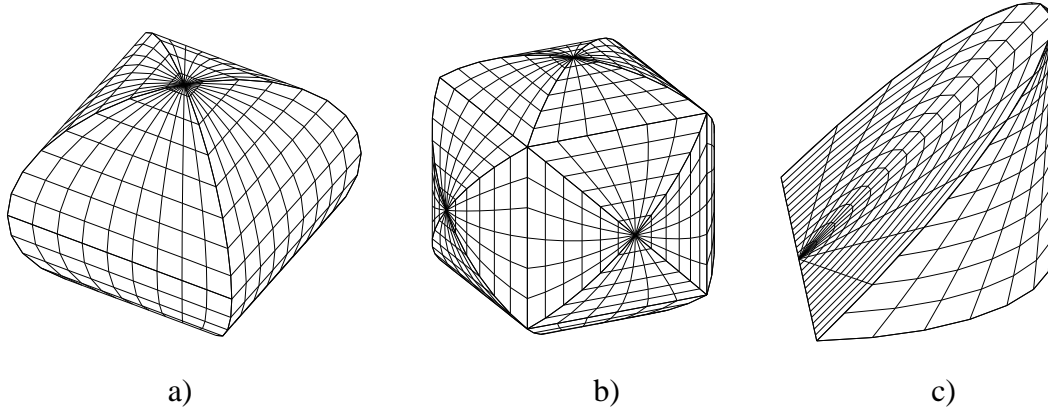
b) On considère le domaine de  $\mathbf{R}^3$  limité par les trois cylindres  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $y^2 + z^2 = 1$  et  $x^2 + y^2 = 1$ . Quel est le volume de ce domaine ?



c) On considère le domaine de  $\mathbf{R}^3$  limité par les plans  $z = 0$ ,  $z = y$  et le cylindre  $x^2 + y^2 = 1$ .  
 Quel est le volume de ce domaine ?

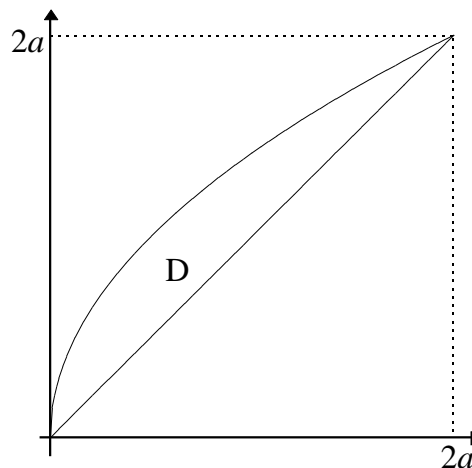
d) Calculer les aires des surfaces limitant les domaines a) et b).

Les questions a) et c) ont été résolues par Archimède.



## 2- Solutions

**Sol.1)** D est compris entre la première bissectrice et un arc de parabole.



Calcul de l'aire A du domaine D :

$$A = \iint_D dx dy = \int_0^{2a} \int_{y^2/2a}^y dx dy = \int_0^{2a} (y - \frac{y^2}{2a}) dy = 2a^2 - \frac{8a^3}{6a} = \frac{2a^2}{3}$$

On aurait pu aussi faire le calcul  $\int_0^{2a} \int_x^{\sqrt{2ax}} dy dx = \int_0^{2a} \sqrt{2ax} - x dx$  etc.

Calcul de l'abscisse du centre d'inertie :

$$A \times x_G = \iint_D x dx dy = \int_0^{2a} \int_{y^2/2a}^y x dx dy = \int_0^{2a} (\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8a^2}) dy = \frac{8a^3}{6} - \frac{32a^5}{40a^2} = \frac{8a^3}{15}$$

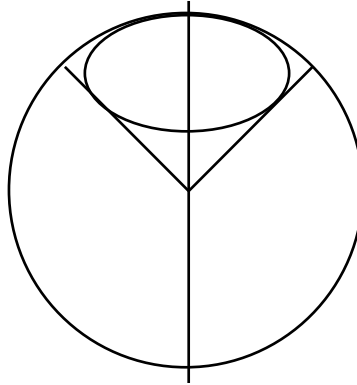
donc  $x_G = \frac{4a}{5}$ .

Calcul de l'ordonnée du centre d'inertie :

$$A \times y_G = \iint_D y \, dx dy = \int_0^{2a} \int_{y^2/2a}^y y \, dx \, dy = \int_0^{2a} (y^2 - \frac{y^3}{2a}) \, dy = \frac{8a^3}{3} - \frac{16a^4}{8a} = \frac{2a^3}{3}$$

donc  $y_G = a$ .

**Sol.2)** S est délimité par la sphère de centre O de rayon R, et un cône de révolution formant un demi-angle au sommet de  $\frac{\pi}{4}$ .



Son volume V est proportionnel à l'aire A de la sa calotte sphérique. Découpons cette aire en bande circulaire de largeur  $R d\theta$  et de rayon  $R \sin(\theta)$ , les points d'une bande étant situé à un angle  $\theta$  depuis l'axe Oz,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  :

$$A = \int_0^{\pi/4} 2\pi R \sin(\theta) R d\theta = 2\pi R^2 (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Rapporté à l'aire totale de la sphère et au volume correspond de la boule, on a :

$$\frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3}$$

donc  $V = \frac{1}{3} RA$  (le solide S peut être vu comme une somme de cônes ou de pyramides infinitésimales de hauteur R et dont les bases forment la surface A).

$$\text{Donc } V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

**Sol.3)** On a :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1 + y \cos(x)} \, dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a \frac{1}{1 + y \cos(x)} \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cos(x))}{\cos(x)} \, dx \end{aligned}$$

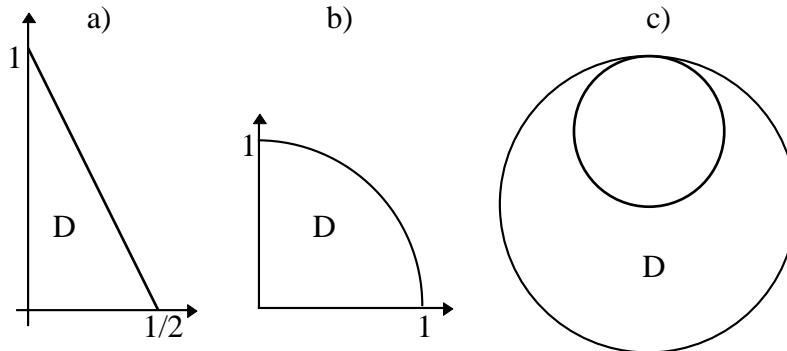
mais aussi :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1 + y \cos(x)} \, dx dy &= \int_0^a \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + y \cos(x)} \, dx \, dy && \text{posons } t = \tan(\frac{x}{2}) \\ &= \int_0^a \int_0^1 \frac{2}{1 + t^2 + y(1 - t^2)} \, dt \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a \int_0^1 \frac{2}{(1-y)t^2 + 1+y} dt dy \\
&= \int_0^a \left[ \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}} t\right) \right]_0^1 dy \\
&= \int_0^a \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right) dy \quad \text{posons } y = \cos(\theta) \\
&= \int_{\arccos(a)}^{\pi/2} \frac{2}{\sin(\theta)} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\right) \sin(\theta) d\theta \\
&= \int_{\arccos(a)}^{\pi/2} \frac{2}{\sin(\theta)} \arctan\left(\sqrt{\frac{\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}}\right) \sin(\theta) d\theta \\
&= \int_{\arccos(a)}^{\pi/2} 2 \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta \\
&= \int_{\arccos(a)}^{\pi/2} \theta d\theta \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\arccos(a)^2}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi :  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cos(x))}{\cos(x)} dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\arccos(a)^2}{2}$

**Sol.4)** Les domaines respectifs des questions a), b), c) sont respectivement :



a) On a  $0 \leq y \leq 1 - 2x$ , donc  $x$  peut varier de 0 à  $\frac{1}{2}$  et :

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} xy \, dy \, dx = \int_0^{1/2} \frac{x(1-2x)^2}{2} dx = \frac{1}{96}$$

b) On peut passer en polaire, avec  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , d'où :

$$\iint_D xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) r \, dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{4} \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} dr \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

c)  $D = D_1 \setminus D_2$  avec  $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  et  $D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - y \leq 0\}$ . On a :

$$\iint_D x^2 + y^2 dx dy = \iint_{D_1} x^2 + y^2 dx dy - \iint_{D_2} x^2 + y^2 dx dy$$

avec :

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} x^2 + y^2 dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta \quad \text{en passant en polaire} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$D_2$  est le disque de centre  $(0, \frac{1}{2})$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ . On change d'origine pour se placer au centre de ce disque :  $x = x'$ ,  $y = \frac{1}{2} + y'$ . Puis on passe en polaire  $x' = r \cos(\theta)$ ,  $y' = r \sin(\theta)$ ,  $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . On a :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 + y' + \frac{1}{4} = r^2 + r \sin(\theta) + \frac{1}{4} \\
\text{donc } \iint_{D_2} x^2 + y^2 dx dy &= \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (r^2 + r \sin(\theta) + \frac{1}{4}) d\theta r dr \\
&= \int_0^{1/2} 2\pi r^3 + \frac{\pi r}{2} dr \\
&= \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{32}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\iint_D x^2 + y^2 dx dy = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{32} = \frac{13\pi}{32}$$

On aurait pu dire aussi que  $\iint_{D_1} x^2 + y^2 dx dy$  est le moment d'inertie d'un disque de rayon 1 et de

masse  $M = \pi$  par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre, soit  $\frac{1}{2} M \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$ . De

même,  $\iint_{D_2} x^2 + y^2 dx dy$  est le moment d'inertie d'un disque de rayon  $\frac{1}{2}$  de masse  $m = \frac{\pi}{4}$  par rapport à

un axe perpendiculaire passant par un point de sa circonférence. Le théorème de Huygens donne :

$$\iint_{D_2} x^2 + y^2 dx dy = \frac{1}{2} m \times \frac{1}{2^2} + m \times \frac{1}{2^2} = \frac{3\pi}{32}$$

**Sol.5)** On trouve  $\frac{1}{3}$ .

□ intégrer par rapport à  $x$  puis par rapport à  $y$ .  $I = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x^2 + y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{4x^3}{3} \, dx = \frac{1}{3}$

□ intégrer par rapport à  $y$  puis par rapport à  $x$

□ passer en polaire. Dans ce cas,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $0 \leq r \leq \frac{1}{\cos(\theta)}$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos(\theta)} r^3 \, dr \, d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(\theta)^4} \, d\theta \quad \text{posons } u = \tan(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1 + u^2) \, du = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□ reconnaître le moment d'inertie du triangle de sommet  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  par rapport au point  $(0,0)$ . C'est le huitième du moment d'inertie du carré de côté 2 centré en  $(0,0)$ . Or le moment d'inertie d'un rectangle de côté  $a$  et  $b$  par rapport à son centre est  $\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$ , donc :

$$I = \frac{1}{8} \times \frac{4 \times 8}{12} = \frac{1}{3}$$

**Sol.6)** a) En passant en polaire,  $\iint_D dx dy = \int_0^\theta \int_0^1 r \, dr d\theta = \frac{\theta}{2}$ .

b) L'aire de  $D$  est celle du triangle  $(0,0)$ ,  $(\text{ch}(t), 0)$ ,  $(\text{ch}(t), \text{sh}(t))$  diminuée de celle du domaine situé sous la branche d'hyperbole, entre les points d'abscisse 1 et  $\text{ch}(t)$ . La branche d'hyperbole ayant pour équation cartésienne  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \frac{1}{2} \text{ch}(t) \text{sh}(t) - \int_1^{\text{argch}(t)} \sqrt{x^2 - 1} \, dx \\ &= \frac{\text{sh}(2t)}{4} - \int_0^t \text{sh}(u)^2 \, du \quad \text{avec } x = \text{ch}(u) \\ &= \frac{\text{sh}(2t)}{4} - \int_0^t \frac{\text{ch}(2u) - 1}{2} \, du \\ &= \frac{\text{sh}(2t)}{4} - \left( \frac{\text{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2} \right) \\ &= \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cercle comme dans l'hyperbole, les paramètres  $\theta$  et  $t$  s'interprètent de la même façon comme le double de l'aire limitée par  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et le point courant de la courbe.

**Sol.7)** a) On peut supposer que l'axe est  $Oz$ . Par symétrie, on peut supposer  $z \geq 0$ . Le cylindre a pour rayon  $\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$ . On coupe le volume en tranches de hauteur  $z$ ,  $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ . Le rayon du disque situé à cette hauteur est  $\sqrt{R^2 - z^2}$  de sorte que l'aire de la section située à la hauteur  $z \geq 0$  est :

$$\pi(R^2 - z^2) - \pi(R^2 - \frac{h^2}{4}) = \pi(\frac{h^2}{4} - z^2)$$

Donc le volume est :

$$V = 2 \int_0^{h/2} \pi(\frac{h^2}{4} - z^2) dz = 2\pi(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24}) = \frac{\pi h^3}{6}$$

Ce volume ne dépend pas de R. Pour  $h = 2R$ , on retrouve le volume de la boule de rayon R, aucun cylindre n'ayant été évidé dans ce cas.

b) Soit R le rayon du disque. Calculons le volume du tronc de sphère, constitué des éléments  $(x, y, z)$  vérifiant  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  et  $z_b \leq z \leq z_a$ , et retranchons lui le volume du tronc de cône engendré par la rotation autour de Oz du quadrilatère  $aABb$ . Le volume du tronc de sphère est (on coupe le tronc par des plans de hauteur  $z$ , le disque situé à la hauteur  $z$  a pour rayon  $\sqrt{R^2 - z^2}$ ) :

$$\int_{z_b}^{z_a} \pi(R^2 - z^2) dz = \pi R^2(z_a - z_b) - \pi \frac{z_a^3 - z_b^3}{3} = \pi R^2(z_a - z_b) - \frac{\pi}{3}(z_a - z_b)(z_a^2 + z_a z_b + z_b^2)$$

Le volume du tronc de cône est (on coupe le tronc par des plans de hauteur  $z$ , le disque situé à la hauteur  $z$  a pour rayon  $(x_A - x_B) \frac{(z - z_b)}{(z_a - z_b)} + x_B$ ) :

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_a} \pi \left( (x_A - x_B) \frac{(z - z_b)}{(z_a - z_b)} + x_B \right)^2 dz \\ = \pi(x_A - x_B)^2 \frac{z_a - z_b}{3} + 2\pi(x_A - x_B)x_B \frac{(z_a - z_b)}{2} + \pi x_B^2(z_a - z_b) \end{aligned}$$

On a par ailleurs  $R^2 = z_a^2 + x_A^2 = z_b^2 + x_B^2$ ,  $ab = z_a - z_b$ ,  $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + ab^2$ , donc le volume du tronc de cône vaut aussi :

$$\pi(x_A - x_B)^2 \frac{ab}{3} + 2\pi(x_A - x_B)x_B \frac{ab}{2} + \pi x_B^2 ab = \pi \frac{ab}{3} (x_A^2 + x_A x_B + x_B^2)$$

et celui du tronc de sphère vaut  $\pi R^2 ab - \frac{\pi}{3} ab(z_a^2 + z_a z_b + z_b^2)$ . La différence vaut :

$$\begin{aligned} \pi R^2 ab - \frac{\pi}{3} ab(z_a^2 + z_a z_b + z_b^2) - \frac{\pi ab}{3} (x_A^2 + x_A x_B + x_B^2) \\ = \frac{\pi}{6} ab (6R^2 - 2z_a^2 - 2z_a z_b - 2z_b^2 - 2x_A^2 - 2x_A x_B - 2x_B^2) \\ = \frac{\pi}{6} ab (6R^2 - 2z_a^2 - 2z_a z_b - 2z_b^2 - 3x_A^2 - 3x_B^2 - ab^2 + AB^2) \\ = \frac{\pi}{6} ab (z_a^2 - 2z_a z_b + z_b^2 - ab^2 + AB^2) \\ = \frac{\pi}{6} ab \times AB^2 \end{aligned}$$

Dans le cas où AB est parallèle à  $ab$  et  $h = ab = AB$ , on retrouve le résultat du a).

**Sol.8)** a) On calcule ici le volume de la calotte sphérique située à une distance  $h$  du centre de la boule.

On coupe le volume en tranches de hauteur  $z$  :

$$V = \int_h^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi(R^2(R - h) - \frac{R^3}{3} + \frac{h^3}{3}) = \frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2 h + h^3)$$

$$= \frac{\pi}{3} (R - h)(2R^2 - hR - h^2) = \frac{\pi}{3} (R - h)^2(2R + h)$$

Pour  $h = 0$ , on obtient  $\frac{2\pi R^3}{3}$ , volume de la demi-boule de rayon  $R$ . Pour  $h = -R$ , on obtient  $\frac{4\pi R^3}{3}$ , volume de la boule.

b) Nous avons calculé dans le cours l'aire d'un tronc de sphère compris entre deux angles. La calotte sphérique en est un cas particulier. Si  $\theta$  est l'angle au centre interceptant la calotte, l'aire de la calotte est égale à :

$$2\pi R^2(1 - \cos(\theta)) = 4\pi R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pi d^2.$$

Pour la sphère tout entière,  $d = 2R$ , et l'on obtient  $4\pi R^2$ .

**Sol.9)** a) La limite est  $n$  (regarder les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur).

Il existe donc  $R > 0$  tel que  $|z| \geq R \Rightarrow |F(z) - n| \leq \frac{1}{2}$ . En particulier, pour tout  $\theta$ ,  $|F(Re^{i\theta}) - n| \leq \frac{1}{2}$ .

Donc :

$$|X(R, \theta) - n| \leq |F(Re^{i\theta}) - n| \leq \frac{1}{2}$$

donc  $X(R, \theta) \geq n - \frac{1}{2} > 0$ .

b)  $F(z) = F(re^{i\theta}) = X + iY$  donc, si on dérive par rapport à  $r$ , on a :

$$e^{i\theta} F'(z) = \frac{\partial X}{\partial r} + i \frac{\partial Y}{\partial r}$$

Si on dérive par rapport à  $\theta$ , on a :

$$ire^{i\theta} F'(z) = \frac{\partial X}{\partial \theta} + i \frac{\partial Y}{\partial \theta}$$

Il en résulte que, pour  $r \neq 0$ ,  $\frac{\partial X}{\partial r} + i \frac{\partial Y}{\partial r} = e^{i\theta} F'(z) = \frac{1}{ir} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial \theta}$ . On obtient le résultat demandé en prenant la partie réelle.

$$c) \iint_D \frac{\partial X}{\partial r} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial X}{\partial r} dr d\theta = \int_0^{2\pi} (X(R, \theta) - X(0, \theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} X(R, \theta) d\theta \text{ car}$$

$X(0, \theta) = \operatorname{Re}(F(0)) = 0$ . Donc  $\iint_D \frac{\partial X}{\partial r} dr d\theta > 0$  car  $X(R, \theta)$  est une fonction continue strictement positive.

Par ailleurs :

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial r} dr d\theta = \iint \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial \theta} dr d\theta = 0 \text{ car, pour tout } t, \int_0^{2\pi} \frac{\partial Y}{\partial \theta} d\theta = Y(r, 2\pi) - Y(r, 0) = 0 \text{ puisque}$$

les fonctions  $F$ ,  $X$ ,  $Y$  sont périodiques en  $\theta$  de période  $2\pi$ .

Les deux résultats obtenus sont incohérents. L'hypothèse selon laquelle  $P$  ne s'annule pas est donc absurde.

La démarche menée en c) peut s'appliquer à n'importe quelle fonction  $F$  dérivable d'une variable complexe, et permet de montrer en fait que  $F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(Re^{i\theta}) d\theta$ , ce qui conduit à une

contradiction si on prend  $F = \frac{zP'(z)}{P(z)}$  mais aussi  $F(z) = \frac{1}{P(z)}$  avec  $P$  polynôme non constant supposé ne pas s'annuler. L'étude générale des fonctions dérivables d'une variable complexe est conduite dans L3/HOLOMRPH.PDF. Voir aussi R.B. Burckel : *Fubinito (immediately) implies FTA*, Amer. Math. Monthly, **113**, 4 (2006) 344-347.

**Sol.10)** Les deux courbes ont aussi pour équation  $x = -\ln(1-y)$  et  $x = -\ln(1-y) - 2$ .

L'aire de la partie supérieure est  $\iint_D dx dy = \int_h^1 2 dy = 2(1-h)$ .

On a part ailleurs :

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= 2 \int_h^1 (-\ln(1-y) - 1) dy = 2 \int_0^{1-h} (-\ln(y) - 1) dy \\ &= 2[-y \ln(y)]_0^{1-h} = -2(1-h) \ln(1-h) \end{aligned}$$

donc  $x_G = -\ln(1-h)$  à l'aplomb du point inférieur droit de la partie supérieure.

$$\iint_D y dx dy = 2 \int_h^1 y dy = 1 - h^2$$

donc  $y_G = \frac{1+h}{2}$ , à mi-hauteur de la partie supérieure.

Si le domaine est placé verticalement dans un champ de pesanteur constant, la partie supérieure découpée reste tout juste en équilibre sur la partie inférieure. C'est une variante de l'empilement des dominos s'étendant à une longueur  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  vers la droite (voir L2/SERIES.PDF).

**Sol.11)** a) D'une part :

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^1 \int_{y=0}^{\infty} \frac{y}{(1+t^2 y^2)(1+y^2)} dy dt &= \int_{t=0}^1 \frac{1}{1-t^2} \int_{y=0}^{\infty} \frac{y}{1+y^2} - \frac{t^2 y}{1+t^2 y^2} dy dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-t^2} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y^2}{1+t^2 y^2}\right) dt = - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\infty} \int_{t=0}^1 \frac{y}{(1+t^2 y^2)(1+y^2)} dt dy &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+y^2} [\arctan(ty)]_{t=0}^{t=1} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\arctan(y)}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan^2(y) = \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\pi^2}{8} &= - \int_0^1 \ln(t) \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \ln(t) t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt \quad \text{en intégrant par parties} \end{aligned}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Il est légitime de permuter série et intégrale car  $\sum \int_0^1 \left| \frac{t^{2n}}{2n+1} \right| dt$  converge.

**Sol.12)** a) Le paraboloïde admet pour représentation paramétrique  $M = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ r^2/a \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq R$ . Donc :

$\frac{\partial M}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 2r/a \end{pmatrix}$  et  $\frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$  dont le produit vectoriel vaut  $\begin{pmatrix} -2r^2 \cos(\theta)/a \\ -2r^2 \sin(\theta)/a \\ r \end{pmatrix}$ , de norme  $r \sqrt{1 + \frac{4r^2}{a^2}}$ . L'élément de surface vaut donc  $r \sqrt{1 + \frac{4r^2}{a^2}} dr d\theta$ , donc :

$$S = 2\pi \int_0^R r \sqrt{1 + \frac{4r^2}{a^2}} dr = 2\pi \frac{a^2}{12} \left[ \left(1 + \frac{4r^2}{a^2}\right)^{3/2} \right]_0^R = \frac{\pi a^2}{6} \left( \left(1 + \frac{4R^2}{a^2}\right)^{3/2} - 1 \right)$$

b) On a  $AD = R$ , et la valeur absolue de la pente de la tangente (AE) est  $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=R} = \frac{2R}{a}$ . Donc :

$$DE = \frac{2R^2}{a}$$

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = R \sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}}$$

$$\frac{AD}{GD} = 1 + \frac{AG}{GD} = 1 + \frac{AE}{AD} = 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}}$$

$$GD = \frac{AD}{1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}}} = \frac{R}{1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}}} = \frac{a^2}{4R} (\sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}} - 1)$$

$$H = AE + GD = R \sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}} + \frac{a^2}{4R} (\sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}} - 1) = \sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}} \left( R + \frac{a^2}{4R} \right) - \frac{a^2}{4R}$$

$$L = \frac{AC}{3} = \frac{2R}{3}$$

$$K^2 = H \times L = \frac{2R^2}{3} \sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}} \left( 1 + \frac{a^2}{4R^2} \right) - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{6} (\sqrt{1 + \frac{4R^2}{a^2}})^3 - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{6} \left( \left(1 + \frac{4R^2}{a^2}\right)^{3/2} - 1 \right)$$

On a bien  $S = \pi K^2$ .

**Sol.13)** a) L'ellipsoïde est paramétrée par  $M = \begin{pmatrix} b \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ b \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ a \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . On a :

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} b \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ b \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -a \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial M}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -b \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ b \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ de produit vectoriel } \begin{pmatrix} ab \sin^2(\theta) \cos(\varphi) \\ ab \sin^2(\theta) \sin(\varphi) \\ b^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ de}$$

norme  $b \sin(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)}$ , donc l'élément de surface vaut :

$$\begin{aligned}
dS &= b \sin(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} d\theta d\varphi \\
\text{et } S &= 2\pi b \int_0^\pi \sin(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} d\theta \\
&= 2\pi b \int_{-1}^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du \quad \text{en posant } u = \cos(\theta) \\
&= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})u^2} du \\
&= 4\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^A \cos^2(t) dt \quad \text{en posant } \sin(t) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} u \text{ et } A = \arcsin(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}) \\
&= 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^A 1 + \cos(2t) dt \\
&= 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} (A + \sin(A)\cos(A)) \quad \text{avec } \cos(A) = \sqrt{1 - \sin(A)^2} = \frac{b}{a} \\
&= 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}) + 2\pi b^2
\end{aligned}$$

b) La valeur absolue de la pente de (DF), et donc de (GD) est  $\frac{c}{b}$  avec  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Donc :

$$GC = \frac{ab}{c}$$

$$\text{le rayon de l'arc de cercle BHA vaut } GB = \sqrt{GC^2 + CB^2} = a \sqrt{\frac{b^2}{c^2} + 1} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\text{le sinus de l'angle CGB vaut } \frac{CB}{GB} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$DE = 2CD = 2b$$

$$\text{arc(AHB)} = GB \times 2 \arcsin(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}) = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a})$$

$$K^2 = CD \times (DE + \text{arc(BHA)}) = b(2b + \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}))$$

On a bien  $S = \pi K^2$

c) Lorsque  $a < b$ , les mêmes calculs conduisent à :

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{b^2}{a^2} - 1)u^2} du \quad \text{et on pose } \text{sh}(t) = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} u \text{ et } A = \text{argsh}(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}) \\
&= 4\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_0^A \text{ch}^2(t) dt \\
&= 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_0^A 1 + \text{ch}(2t) dt \\
&= 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} (A + \text{sh}(A)\text{ch}(A)) \quad \text{avec } \text{ch}(A) = \sqrt{1 + \text{sh}(A)^2} = \frac{b}{a} \\
&= 2\pi \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \text{argsh}(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}) + 2\pi b^2
\end{aligned}$$

On notera la ressemblance avec la formule précédente, mais avec usage du sinus hyperbolique.

d) La représentation paramétrique de la parabole est  $\left( \frac{c(1-t^2)/2}{at} \right)$  dans le repère de centre C et d'axe ceux de l'ellipse, avec  $c = CF = \sqrt{b^2 - a^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . La longueur de cette arc de parabole est :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{a^2 + c^2 t^2} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{a^2 + c^2 t^2} dt$$

donc  $H^2 = 4b \int_0^1 \sqrt{a^2 + c^2 t^2} dt = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)t^2} dt$ , intégrale égale à  $\frac{S}{\pi}$  comme on l'a vu ci-dessus

#### **Sol.14) Méthode 1 :**

L'équation du cercle de rayon 1, en se plaçant dans un repère d'origine en M, est :

$$(X + a)^2 + Y^2 = 1$$

soit  $X^2 + 2aX + Y^2 + a^2 = 1$

Passons en polaire, le pôle étant M :

$$X = r \cos(\theta), Y = r \sin(\theta) \text{ avec } r^2 + 2a r \cos(\theta) + a^2 - 1 = 0, r > 0$$

soit encore :

$$r(\theta) = -a \cos(\theta) + \sqrt{1 - a^2 \sin^2(\theta)} \quad \text{avec } r(\theta) > 0$$

$$\text{L'aire cherchée vaut } \int_0^\alpha \int_0^{r(\theta)} \rho d\rho d\theta = \int_0^\alpha \frac{r(\theta)^2}{2} d\theta.$$

Plusieurs changements de variables seront nécessaires pour calculer cette intégrale, et il faudra prendre garde aux intervalles sur lesquels on peut prendre la réciproque du sinus. Rappelons la forme générale de la formule de changement de variables :

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u) du = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

où  $\varphi$  et  $f$  sont  $C^1$ . Il n'est pas nécessaire que  $\varphi$  soit bijective. (Voir L1/INTEGRAL.PDF).

Pour  $c = 0, d = \alpha, f(u) = \sqrt{1 - a^2 u^2}, \varphi(t) = \sin(t)$  :

$$\int_0^{\sin(\alpha)} \sqrt{1 - a^2 u^2} du = \int_0^\alpha \sqrt{1 - a^2 \sin^2(t)} \cos(t) dt \quad (*)$$

Pour  $c = 0, d = \sin(\alpha), f(u) = \sqrt{1 - u^2}, \varphi(t) = at$  :

$$\int_0^{a \sin(\alpha)} \sqrt{1 - u^2} du = a \int_0^{\sin(\alpha)} \sqrt{1 - a^2 t^2} dt \quad (**)$$

Pour  $c = 0, d = \arcsin(a \sin(\alpha)), f(u) = \sqrt{1 - u^2}, \varphi(t) = \sin(t)$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{a \sin(\alpha)} \sqrt{1 - u^2} du &= \int_0^{\arcsin(a \sin(\alpha))} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int_0^{\arcsin(a \sin(\alpha))} \cos^2(t) dt \end{aligned} \quad (***)$$

car  $\cos(t) \geq 0$  pour  $t \in [0, \arcsin(a \sin(\alpha))]$ . Donc :

$$\int_0^\alpha \frac{r(\theta)^2}{2} d\theta = \int_0^\alpha \frac{1 + a^2 \cos(2\theta)}{2} - a \cos(\theta) \sqrt{1 - a^2 \sin^2(\theta)} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2 \sin(2\alpha)}{4} - a \int_0^{\sin(\alpha)} \sqrt{1-a^2 u^2} \, du && \text{d'après (*)} \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2 \sin(2\alpha)}{4} - \int_0^{a \sin(\alpha)} \sqrt{1-v^2} \, dv && \text{d'après (**)} \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2 \sin(2\alpha)}{4} - \int_0^{\arcsin(a \sin(\alpha))} \cos^2(\theta) \, d\theta && \text{d'après (***)} \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2 \sin(2\alpha)}{4} - \int_0^{\arcsin(a \sin(\alpha))} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \, d\theta \\
&= \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2 \sin(2\alpha)}{4} - \frac{\arcsin(a \sin(\alpha))}{2} - \frac{a \sin(\alpha) \sqrt{1-a^2 \sin^2(\alpha)}}{2}
\end{aligned}$$

On peut effectuer quelques vérifications tests, à vérifier par un raisonnement géométrique direct.

Pour  $a = 0$ , on obtient  $\frac{\alpha}{2}$

Pour  $\alpha = \pi$ , on obtient  $\frac{\pi}{2}$

Pour  $a = 1$  et  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , on obtient  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2} = 0$

Pour  $a = 1$  et  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ , on obtient  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} - \frac{\pi - \alpha}{2} + \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2} = \alpha + \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \frac{\pi}{2}$

Pour  $a = -1$  et  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , on obtient  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2} = \alpha + \sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Pour  $a = -1$  et  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ , on obtient  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin(2\alpha)}{4} + \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2} = \frac{\pi}{2}$

### Méthode 2 :

On peut obtenir le même résultat géométriquement, sans intégrale double. Dans le repère de centre O, (BM) a pour équation  $y = \tan(\alpha)(x - a)$  (on traitera le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  comme cas limite) et coupe le cercle en B de coordonnées  $(x, y)$  telles que  $y \geq 0$  et  $x^2 + y^2 = 1$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&x^2 + \tan^2(\alpha)(x - a)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow &x^2 - 2ax \sin^2(\alpha) + a^2 \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = 0
\end{aligned}$$

On a  $x \geq a$  si  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ , et  $x \leq a$  si  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ . Donc, dans les deux cas :

$$\begin{aligned}
x &= a \sin^2(\alpha) + \cos(\alpha) \sqrt{1 - a^2 \sin^2(\alpha)} \\
&= \cos(\alpha - \arcsin(a \sin(\alpha)))
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
y &= \tan(\alpha)(x - a) = \tan(\alpha)(\cos(\alpha) \sqrt{1 - a^2 \sin^2(\alpha)} - a \cos^2(\alpha)) \\
&= \sin(\alpha) \sqrt{1 - a^2 \sin^2(\alpha)} - a \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\
&= \sin(\alpha - \arcsin(a \sin(\alpha)))
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'angle au centre  $\widehat{AOB}$  vaut  $\alpha - \arcsin(a \sin(\alpha))$ .

Le secteur angulaire OAB a pour aire  $\frac{\alpha - \arcsin(a \sin(\alpha))}{2}$ .

Le triangle OAB a pour aire  $\frac{y}{2}$ .

La portion de disque limité par l'arc AB et le segment [AB] vaut  $\frac{\alpha - \arcsin(asin(\alpha))}{2} - \frac{y}{2}$ .

Le triangle MAB a pour aire  $\frac{(1-a)y}{2}$

Le secteur angulaire MAB a pour aire :

$$\begin{aligned} \frac{(1-a)y}{2} + \frac{\alpha - \arcsin(asin(\alpha))}{2} - \frac{y}{2} &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\arcsin(asin(\alpha))}{2} - \frac{ay}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\arcsin(asin(\alpha))}{2} - \frac{asin(\alpha) \sqrt{1-a^2 \sin^2(\alpha)}}{2} + \frac{a^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{2} \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2 \sin(2\alpha)}{4} - \frac{\arcsin(asin(\alpha))}{2} - \frac{asin(\alpha) \sqrt{1-a^2 \sin^2(\alpha)}}{2} \end{aligned}$$

comme précédemment.

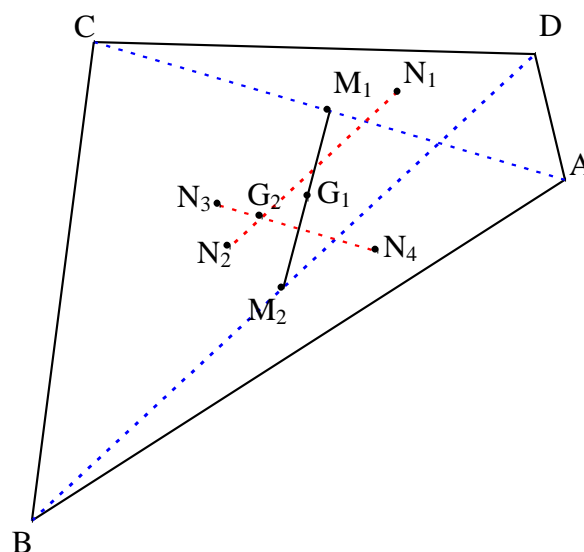
**Sol.15)** Les formules sont invariantes par transformation affine, de sorte qu'on peut supposer que  $A = (0,0)$ ,  $B = (1,0)$ ,  $C = (0,1)$ . L'isobarycentre des sommets est  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . La masse de la plaque ou son aire vaut  $\frac{1}{2}$ . Le barycentre de la plaque est donné par :

$$x_G = 2 \int_0^1 \int_0^{1-y} x \, dx \, dy = \int_0^1 (1-y)^2 \, dy = \frac{1}{3} = y_G$$

Par contre, pour les côtés, l'isobarycentre est formé des milieux de ces côtés affectés comme masse des longueurs de ces côtés, longueurs qui n'ont aucune raison d'être égales.

Pour un quadrilatère ABCD, les milieux  $M_1$  et  $M_2$  de [AC] et [BD] sont les barycentres de deux sommets opposés.  $G_1$  milieu de  $[M_1 M_2]$  est le barycentre des quatre sommets.

Pour la plaque (divisée éventuellement en deux triangles), le barycentre  $G_2$  est nécessairement sur la droite  $(N_1 N_2)$  joignant l'isobarycentre  $N_1$  de ACD à celui  $N_2$  de ABC, mais également sur la droite  $(N_3 N_4)$  joignant l'isobarycentre  $N_3$  de CAD à celui  $N_4$  de BAD, ce qui donne un moyen de le tracer.



La différence entre les deux barycentres  $G_1$  et  $G_2$  est évidente lorsque  $A$  tend vers  $D$  puisqu'alors,  $G_1$ , barycentre des sommets, tend vers le barycentre de  $(A,2)$   $(B,1)$   $(C,1)$ , alors que  $G_2$ , barycentre de la plaque, tend vers l'isobarycentre de  $ABC$ .

**Sol.16)** Pour une résolution sans calcul intégral, voir :

Nicolas Pippenger, *Two extensions of results of Archimedes*, Amer. Math. Monthly, vol.118, n°1, (janvier 2011), p.66-71

a) Pour tout  $z \in [-1, 1]$ , on a  $-\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}$ ,  $-\sqrt{1-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-z^2}$ , donc les intersections du domaine par des plans de cote  $z$  sont des carrés de côté  $2\sqrt{1-z^2}$ . Donc :

$$V = 2 \int_0^1 4(1-z^2) dz = 8(1 - \frac{1}{3}) = \frac{16}{3}$$

b) Si  $z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , l'intersection du domaine par des plans de cote  $z$  donne les mêmes carrés que précédemment, car les sommets de ce carré vérifient  $x^2 + y^2 = 2(1-z^2) \leq 1$ , donc le carré n'est pas affecté par le troisième cylindre.

Si  $0 \leq z < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , les carrés précédents débordent du cylindre  $x^2 + y^2 = 1$  et il faut en supprimer les parties extérieures à ce cylindre. Ce qui reste est, dans le plan de cote  $z$ , l'intersection d'un cercle et d'un carré, symétrique par rapport aux plans  $Oxz$  et  $Oyz$ . Pour  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , il est constitué (en omettant la coordonnée  $z$ ) :

du triangle  $[(0, 0), (\sqrt{1-z^2}, 0), (\sqrt{1-z^2}, z)]$  d'aire  $\frac{1}{2} z\sqrt{1-z^2}$ . Si on pose  $z = \sin(\theta)$ , l'angle

en  $O$  de ce triangle est  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

d'un secteur angulaire  $[(0,0), (\sqrt{1-z^2}, z), (z, \sqrt{1-z^2})]$  de rayon 1 et d'aire  $\frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - 2\theta)$

du triangle  $[(0, 0), (0, \sqrt{1-z^2}), (z, \sqrt{1-z^2})]$  d'aire  $\frac{1}{2} z\sqrt{1-z^2}$

On a donc :

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{1/\sqrt{2}}^1 4(1-z^2) dz + 8 \int_0^{1/\sqrt{2}} z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - 2\theta) dz \\ &= 8(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}}) + 8 \int_0^{\pi/4} (\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - 2\theta)) \cos(\theta) d\theta \\ &= \dots = 16 - 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

c) Si on coupe par un plan de cote  $z = \sin(\theta)$ ,  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $z \leq y \leq 1$ ,  $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ . Il

s'agit, dans ce plan, d'une portion du disque de rayon 1, au-delà de l'ordonnée  $y = \sin(\theta)$ . Son aire est celle du secteur angulaire  $[\theta, \pi - \theta]$  correspondant auquel on enlève un triangle de hauteur  $\sin(\theta)$ , soit :

$$\frac{\pi}{2} - \theta - \sin(\theta)\cos(\theta)$$

On trouve le volume en intégrant par rapport à  $z$ , avec  $dz = \cos(\theta) d\theta$ . Donc :

$$V = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta - \sin(\theta)\cos(\theta) \right) \cos(\theta) d\theta = \dots = \frac{2}{3}$$

d) Le domaine a) a une surface formée de 16 morceaux, tous isométriques à la surface définie par  $x \geq y \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 = 1$ . On peut paramétrer cette petite surface par :

$$z = \sin(t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos(t)$$

$$y = u\cos(t), 0 \leq u \leq 1$$

Si on pose  $M = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ u\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ , on a  $\frac{\partial M}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -u\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial M}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ , dont le produit vectoriel vaut

$\begin{pmatrix} -\cos^2(t) \\ 0 \\ -\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}$ , de norme  $\cos(t)$ . L'aire cherchée est :

$$16 \int_{u=0}^{u=1} \int_{t=0}^{\pi/2} \cos(t) dt du = 16$$

Le domaine b) a une surface formée de 48 morceaux, tous isométriques à la surface définie par  $x \geq y \geq 0, z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, x^2 + z^2 = 1$  et paramétrée par :

$$z = \sin(t), \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos(t)$$

$$y = u\cos(t), 0 \leq u \leq 1$$

L'aire cherchée est alors :

$$48 \int_{u=0}^{u=1} \int_{t=\pi/4}^{\pi/2} \cos(t) dt du = 48 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 14.1$$

