EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(DEUXIEME ANNEE)

PLAN

I : Equations différentielles du premier ordre non linéaires
- 1) Définitions
- 2) Théorème de Cauchy-Lipschitz
- 3) Exemples

II : Systèmes d'équations linéaires
- 1) Définition
- 2) Structure des solutions de l'équation homogène
- 3) Cas des matrices diagonales ou triangulaires
- 4) Recherche d'une solution particulière
- 5) Matrice wronskienne

III : Equations différentielles du second ordre :
- 1) Equations linéaires à coefficients constants
- 2) Equations linéaires à coefficients non constants

Annexe I : Méthodes approchées de résolution
- 1) La méthode d'Euler
- 2) La méthode du point milieu
- 3) La méthode de Runge–Kutta

Annexe II : Le pendule de Foucault

Annexe III : Couplages
- 1) Couplage mécanique
- 2) Couplage capacitif

Annexe IV : Déviation vers l'est/Particule dans un champ électromagnétique.
- 1) Résolution
- 2) Déviation vers l'est
- 3) Particule dans un champ électromagnétique uniforme et constant

Annexe V : Un exemple d'équation non linéaire

Exercices
- 1) Enoncés
- 2) Solutions

Ce chapitre nécessite la connaissance du chapitre L2/DIAGONAL.PDF sur la diagonalisation et la trigonalisation des matrices.

I : Equations différentielles du premier ordre non linéaires

1- Définitions

On appelle **équation différentielle du premier ordre** une équation du type :

$$x' = f(t, x)$$

où f est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. On rappelle que U est ouvert si, pour tout $(t_0, x_0) \in$ U, il existe un disque de centre (t_0, x_0) inclus dans U (voir le chapitre L2/EVNORME.PDF pour plus de détails). x est une fonction du paramètre t et x' est la dérivée de x par rapport à t. Physiquement t représente le temps et x une quantité physique dépendant du temps. x est une solution sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si, pour tout t de I, on a $(t, x(t))$ élément de U et, pour tout t de I, $x'(t) = f(t, x(t))$. Le plus souvent, on prendra f de classe C^1 (f est continue ainsi que ses dérivées partielles). On appelle **courbe intégrale** une courbe représentative d'une solution.

Un cas particulier fréquent se produit lorsque le second membre ne dépend pas de t. On a alors :

$$x' = f(x)$$

où f est ici une fonction C^1 définie sur un ouvert V de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. x est une solution sur I si, pour tout t de I, on a $x(t)$ élément de V et, pour tout t de I, $x'(t) = f(x(t))$. Cette équation se résout facilement si I est un intervalle sur lequel f **ne s'annule pas**. En effet, elle est un cas particulier d'équations dites à **variables séparables**, où l'on peut isoler t dans un membre et x dans l'autre. On écrit en effet :

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \text{ ou bien } 1 = \frac{x'}{f(x)}$$

et on intégre les deux membres par rapport à t, ce qui donne $t = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \mathrm{F}(x)$ si F est une primitive de $\dfrac{1}{f}$ (définie à une constante près). Autrement dit, on obtient t en fonction de x. f ne s'annulant pas et étant continue, elle garde un signe constant sur I, donc $\dfrac{1}{f}$ également, donc la fonction $\mathrm{F} : x \to t$ est continue strictement monotone, donc bijective de I sur F(I). On peut donc l'inverser et définir x en fonction de t : $x(t) = \mathrm{F}^{-1}(t)$. On peut d'ailleurs vérifier que, en utilisant la dérivée d'une fonction réciproque :

$$x'(t) = \frac{1}{\mathrm{F}'(\mathrm{F}^{-1}(t))} = \frac{1}{\mathrm{F}'(x(t))} = f(x(t))$$

Cependant, il n'est pas toujours possible de définir explicitement x en fonction de t, l'expression de F^{-1} sous forme de fonctions élémentaires étant parfois impossible.

2- Théorème de Cauchy-Lipschitz

Le **problème de Cauchy** est le suivant : étant donné une équation différentielle du premier ordre $x' = f(t, x)$ et un point (t_0, x_0) du plan, on se pose la question de savoir s'il existe une solution x de l'équation différentielle, telle que $x(t_0) = x_0$. Cette dernière condition est qualifiée de **condition initiale**. On souhaite généralement définir cette solution x sur un intervalle le plus grand possible. On se demande également si cette solution est unique.

Une fonction $t \to x(t)$, définie sur un intervalle ouvert I, est dite **solution maximale** de l'équation différentielle s'il n'existe aucune fonction y solution sur un intervalle ouvert J contenant strictement I, et telle que la restriction de y à I soit égale à x. Autrement dit :

$$\begin{cases} \mathrm{I} \subset \mathrm{J} \text{ et } y|_{\mathrm{I}} = x \\ x \text{ et } y \text{ solutions} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{I} = \mathrm{J} \text{ et } y = x$$

C'est en fait I qui est maximal.

On peut montrer que, si f est C^1, il existe une solution maximale et une seule à ce problème

THEOREME DE CAUCHY-LIPSCHITZ

Soit f de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Soit (t_0, x_0) élément de U. Alors il existe une unique fonction x, solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$ sur un intervalle ouvert I contenant t_0, et vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Le cas de l'équation $x' = f(x)$ avec f définie sur un ouvert V de $\mathbf{R}$ n'est qu'un cas particulier, en considérant que f est définie sur $\mathrm{U} = \mathbf{R} \times \mathrm{V}$ avec $(t, x) \to f(x)$.

Ce théorème généralise le cas des équations linéaires de la forme $a(t)x' + b(t)x = 0$ sur les intervalles I où a ne s'annule pas (revoir au besoin le chapitre L1/EQUADIFF.PDF). Dans ce dernier cas en effet, les solutions sont de la forme $\lambda\exp(\mathrm{F}(t))$, où F est une primitive de $-\dfrac{b}{a}$, et λ étant un réel quelconque. Il en résulte que, si on se donne t_0 et x_0, il n'y a qu'un seul λ tel que $x(t_0) = x_0$. En particulier, ou bien x est identiquement nulle, ou bien x ne s'annule pas.

Il en est de même pour les équations linéaires avec second membre $a(t)x' + b(t)x = c(t)$, la solution générale étant la somme de $\lambda\exp(\mathrm{F}(t))$ et d'une solution particulière. L'ajout d'une condition initiale fixe la valeur de λ.

<u>Démonstration</u> :

Nous nous bornerons à montrer l'unicité de la solution maximale.

❑ On montre d'abord l'unicité localement, dans un voisinage suffisamment petit de (t_0, x_0). Quitte à effectuer une translation sur la variable t aussi bien que sur les valeurs que prend la fonction x, on peut supposer que $(t_0, x_0) = (0, 0)$, afin d'alléger les notations. On considère un pavé $[-a, a] \times [-b, b] \subset \mathrm{U}$. f étant C^1, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue, donc bornée sur le fermé borné $[-a, a] \times [-b, b]$ (voir au besoin le chapitre L2/EVNORME.PDF). Il existe donc une constante M telle que :

$$\forall (t, x) \in [-a, a] \times [-b, b], \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq \mathrm{M}$$

Si on applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \to f(t, x)$, on en déduit que :

$$\forall (t, x_1, x_2) \in [-a, a] \times [-b, b] \times [-b, b], \left|f(t, x_1) - f(t, x_2)\right| \leq \mathrm{M} \left|x_1 - x_2\right|$$

On dit que la fonction f est **localement lipschitzienne** en x. L'hypothèse f C^1 de l'énoncé est choisie pour la facilité à être mémorisée, mais seule sa conséquence d'être localement lipschitzienne en x sera utilisée. Aucune propriété relative à $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ n'est utile.

Supposons qu'il y ait deux solutions x_1 et x_2 de l'équation différentielle $x' = f(t, x)$, avec $x_1(0) = x_2(0) = 0$, définies sur le même intervalle $[-a, a]$, et soit b tel que x_1 et x_2 soient à valeurs dans $[-b, b]$. Posons $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. On fera le raisonnement pour $t \geq 0$ pour simplifier les notations. On a alors :

$$\left|x'(t)\right| = \left|x_1'(t) - x_2'(t)\right|$$
$$= \left|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\right|$$
$$\leq M \left|x_1(t) - x_2(t)\right| = M \left|x(t)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \left|x(t)\right| = \left| \int_0^t x'(u)\, du \right| \leq \int_0^t \left|x'(u)\right| du \leq M \int_0^t \left|x(u)\right| du$$

$$\Rightarrow \quad \left|x(t)\right| - M \int_0^t \left|x(u)\right| du \leq 0$$

Posons $w(t) = \displaystyle\int_0^t \left|x(u)\right| du \times e^{-Mt}$

On a alors :

$$w'(t) = -Mw(t) + \left|x(t)\right| e^{-Mt}$$
$$= e^{-Mt} \left(\left|x(t)\right| - M \int_0^t \left|x(u)\right| du\right)$$
$$\leq 0$$

Donc w est une fonction décroissante. Comme $w(0) = 0$ et que $w(t)$ est visiblement positive ou nulle pour $t > 0$, on en déduit que $w = 0$. Donc $x = 0$ et $x_1 = x_2$.

❑ L'unicité locale entraîne l'unicité globale. Soit deux solutions de l'équation différentielle x_1 et x_2 définies sur un intervalle I contenant t_0, et telles que $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Considérons les intervalles $[t_0, t] \subset I$ sur lequels x_1 et x_2 coïncident, et soit t_1 la borne supérieure de ces intervalles. :

$$t_1 = \text{Sup}\ \{t \in I,\ x_1 = x_2 \text{ sur } [t_0, t]\}$$

Pour tout $t \in [t_0, t_1[$, $x_1(t) = x_2(t)$. Si t_1 est intérieur à I, par continuité de x_1 et x_2, $x_1(t_1) = x_2(t_1)$. L'application de l'unicité locale précédemment démontrée et appliquée au couple $(t_1, x_1(t_1))$ montre que $x_1 = x_2$ sur un voisinage $]t_1 - a, t_1 + a[$ inclus dans I, donc $x_1 = x_2$ sur $[t_0, t_1 + a[$, contredisant le caractère de borne supérieure de t_1. Donc t_1 est une borne de I.
On raisonne de même pour la partie de I inférieure à t_0 et on montre ainsi que $x_1 = x_2$ sur I.

❑ Une démonstration de l'existence d'une solution dans un cas particulier est donnée dans le chapitre L3/METRIQUE.PDF, dans le paragraphe relatif au théorème du point fixe. Nous l'admettrons dans le cas général[1].

3- Exemples

Nous commençons par résoudre deux équations différentielles linéaires du premier ordre, afin d'illustrer le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas de ces exemples simples.

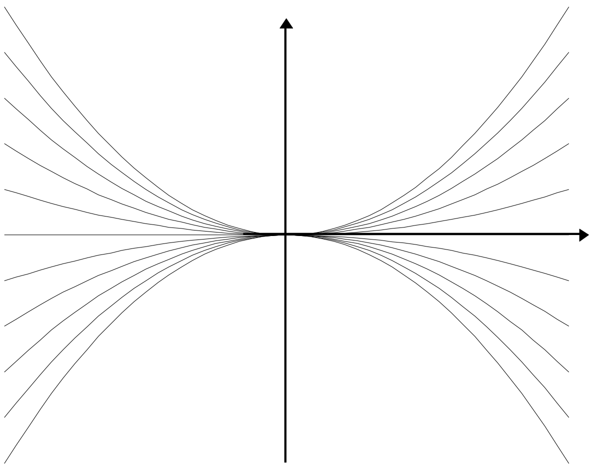
❑ Soit l'équation $tx' - 2x = 0$ ou $x' = \dfrac{2x}{t}$. On résout pour $t \in]0, +\infty[$ ou $t \in]-\infty, 0[$. Sur chacun de ces intervalles, les solutions sont de la forme $x = \lambda t^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

[1] On peut trouver des démonstrations de ce théorème par exemple dans : Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Grenoble Sciences (2016).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est vérifié sur U =]0, +∞[× $\mathbf{R}$ (ou sur]–∞, 0[× $\mathbf{R}$) , avec $f(t, x) = \dfrac{2x}{t}$. Si (t_0, x_0) est un élément de ce domaine, il existe une solution unique maximale, à savoir $x = x_0 \dfrac{t^2}{t_0^{\,2}}$, sur l'intervalle]–∞, 0[si $t_0 < 0$ et]0, +∞[si $t_0 > 0$.

Sur $\mathbf{R}^2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique plus. f n'est d'ailleurs pas définie sur $\mathbf{R}^2$. On remarque qu'il n'existe aucune solution de l'équation $tx' - 2x = 0$ initiale passant par $(0, x_0)$ avec x_0 non nul, que toutes les solutions se prolongent en passant par (0, 0), avec une dérivée nulle, et qu'il existe une infinité de solution de l'équation $tx' - 2x = 0$ sur $\mathbf{R}$ passant par (t_0, x_0) avec $t_0 > 0$, à savoir :

$$x = \begin{cases} \lambda t^2 \text{ si } t \leq 0 \\ x_0 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^2 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}, \lambda \text{ étant quelconque}$$



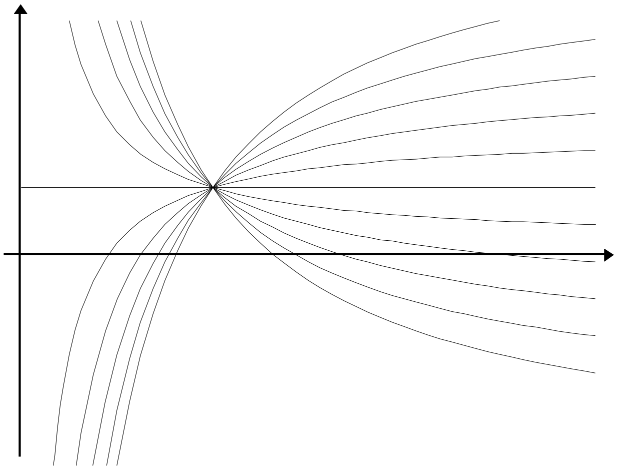
$tx' - 2x = 0$

Dans la figure précédente comme dans les suivantes, l'axe des abscisses est celui des t, l'axe des ordonnées est celui des x.

❑ Soit l'équation $(t^2 - t)x' = x - 1$. On résout sur chacun des intervalles]–∞, 0[ou sur]0, 1[ou sur]1, +∞[, là où le coefficient $t^2 - t$ de x ne s'annule pas. Le lecteur est invité à montrer que, sur chacun de ses intervalles, les solutions sont de la forme $x(t) = 1 + \lambda \dfrac{t-1}{t}$.

On a ici $f(t, x) = \dfrac{x-1}{t^2 - t}$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur les domaines U =]–∞, 0[× $\mathbf{R}$, ou bien U =]0, 1[× $\mathbf{R}$, ou bien U =]1, +∞[× $\mathbf{R}$. Si on se donne (t_0, x_0) dans l'un de ces domaines, il y a un et un seul λ possible.
Cependant, les solutions sur]0, 1[ou sur]1, +∞[se prolonge toutes en $t = 1$ par $x(1) = 1$, avec une dérivée $x'(1) = 1 + \lambda$ de sorte que $t \to 1 + \lambda \dfrac{t-1}{t}$ est solution de l'équation initiale sur]0, +∞[. Mais toutes ces solutions passent par (1, 1). Aucune ne passe par $(1, x_0)$ pour $x_0 \neq 1$. Le théorème de

Cauchy-Lipschitz n'est pas valide sur U = $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ ce qui n'est guère étonnant, la fonction $f(t, x) = \dfrac{x-1}{t^2-t}$ n'étant pas définie sur U.



$(t^2 - t)x' = x - 1$, pour $t > 0$

❑ Soit l'équation différentielle $x' = x^2$. C'est une équation à variables séparables, donc en théorie résoluble.

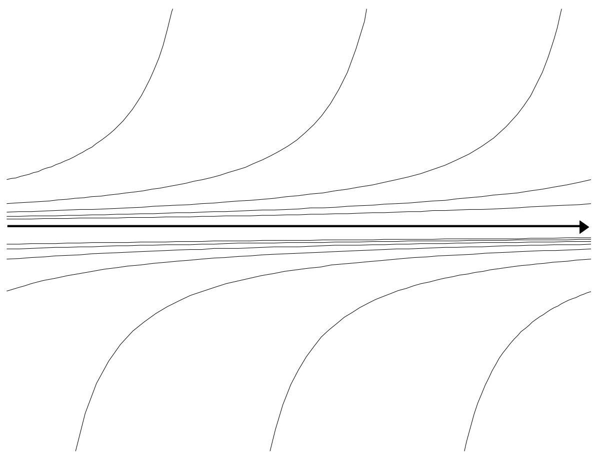
- Il y a la solution $x = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Si x ne s'annule pas, on peut écrire :

$$\frac{x'}{x^2} = 1$$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \forall\, t, -\dfrac{1}{x} = t - \lambda$ $\qquad$ λ est une constante par intervalle de définition de x

$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \forall\, t, x = \dfrac{1}{\lambda - t}$

$x = \dfrac{1}{\lambda - t}$ est donc solution maximale sur l'intervalle $]-\infty, \lambda[$ ou sur $]\lambda, +\infty[$. Il n'y a pas d'autre solution. En effet, les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées, avec la fonction $f(t, x) = x^2$. Par conséquent, si x est solution et s'annule en un point t_0, par unicité de la solution mximale, on en déduit que x est identiquement nulle. Sinon, x ne s'annule pas. Pour x_0 non nul et t_0 donnés, il n'y a qu'un seul λ qui convient, à savoir $\lambda = t_0 + \dfrac{1}{x_0}$. Si $x_0 > 0$, l'intervalle de résolution est $]-\infty, \lambda[$, et si $x_0 < 0$, c'est $]\lambda, +\infty[$ (on prend l'intervalle maximal contenant t_0).



$x' = x^2$

Dans la figure ci-dessus, l'axe vertical n'a pas été tracé. Il n'a en effet aucune signification dans le sens où le translaté d'une courbe intégrale parallèlement à l'axe des abscisses t donne une autre courbe intégrale. Ceci est général pour toutes les équations de la forme $x' = f(x)$. Si $t \to x(t)$ est la solution d'une telle équation passant par (t_0, x_0), alors la solution passant par (t_1, x_0) est donnée par la fonction $t \to x(t + t_0 - t_1)$. La deuxième courbe est la translatée de la première par une translation de vecteur $(t_1 - t_0, 0)$.
Graphiquement, le théorème de Cauchy-Lipschitz est illustré par le fait que, par chaque point du plan, passe une courbe intégrale et une seule. Deux courbes différentes ne se coupent pas, et l'ensemble de toutes les courbes remplit le plan.

On remarque que, dans l'exemple précédent, bien que $f(t, x) = x^2$ soit définie sur $\mathbf{R}^2$, la solution générale n'est pas définie sur $\mathbf{R}$ et l'intervalle sur lequel elle est définie dépend du choix de la constante d'intégration ou de la condition initiale. Cet intervalle n'est pas prévisible à partir de la forme de l'équation différentielle. Ainsi, pour chacun des problèmes de Cauchy suivants, le lecteur pourra vérifier que :

La solution de $x' = x^2$, $x(0) = 1$ est $x = \dfrac{1}{1 - t}$, définie sur $]-\infty, 1[$.

La solution de $x' = - x^2$, $x(0) = 1$ est $x = \dfrac{1}{1 + t}$, définie sur $]-1, +\infty[$.

La solution de $x' = tx^2$, $x(0) = 1$ est $x = \dfrac{2}{2 - t^2}$, définie sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

La solution de $x' = - tx^2$, $x(0) = 1$ est $x = \dfrac{2}{2 + t^2}$, définie sur $\mathbf{R}$.

REMARQUE :
❑ Supposons que l'on ait une solution maximale sur un intervalle I = $]a, b[$. Il est impossible que $x(t)$ admette une limite finie l lorsque t tend vers b avec (b, l) dans le domaine U d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz, car sinon, en prenant pour valeur de (t_0, x_0) la valeur du couple (b, l), on pourrait prolonger la solution sur un ouvert contenant (b, l), ce qui contredit la maximalité initiale. Le plus souvent, ou bien $b = \infty$, ou bien, $l = \infty$.
C'est bien ce qui arrive dans l'exemple précédent, où la borne λ de l'intervalle I est donnée par le fait que la solution diverge en cette borne.

❑ Soit l'équation différentielle $x' = x^3$. Là aussi, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, donc, comme ci-dessus :

- ou bien x s'annule en un point x_0 pour une valeur t_0 du paramètre. $x = 0$ est une solution sur $\mathbf{R}$ au problème de Cauchy $\left[\begin{array}{l} x' = x^3 \\ x(t_0) = 0 \end{array}\right.$, et par application du théorème de Cauchy-Lipschitz au point $(t_0, 0)$, c'est la seule solution.
- ou bien x ne s'annule en aucun point, et, dans ce cas, on peut écrire :

$$\frac{x'}{x^3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\ \lambda, \forall\ t, -\frac{1}{2x^2} = t - \lambda$$

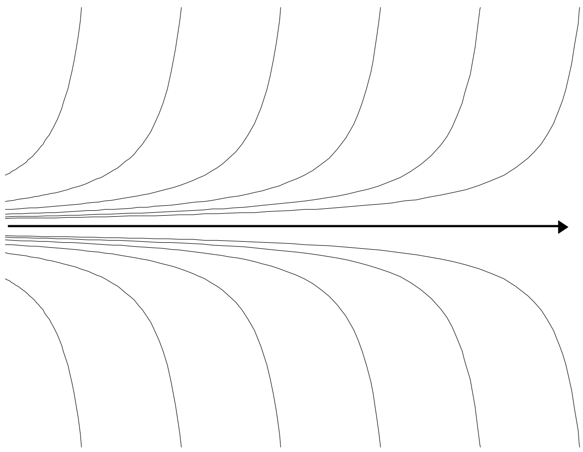
$$\Leftrightarrow \quad \exists\ \lambda, \forall\ t, x^2 = \frac{1}{2(\lambda - t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\ \lambda, \forall\ t, \left(x = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda - t)}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{2(\lambda - t)}}\right) \text{ définie sur }]-\infty, \lambda[.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\exists\ \lambda, \forall\ t, x = \frac{1}{\sqrt{2(\lambda - t)}}\right) \text{ ou } \left(\exists\ \lambda, \forall\ t, x = -\frac{1}{\sqrt{2(\lambda - t)}}\right)$$

car x ne s'annulant pas, le même x ne peut passer d'une expression à l'autre en changeant de signe.

Par application du théorème de Cauchy-Lipschitz, les courbes intégrales ne se coupent pas et remplissent le plan.



$x' = x^3$

L'équation différentielle étant de la forme $x' = f(x)$, comme dans l'exemple précédent, le translaté d'une courbe intégrale parallèlement à l'axe des abscisses donne une autre courbe intégrale.

❑ Soit l'équation $x' = \sqrt{|x|}$

On prendra garde que l'équation différentielle est de la forme $x' = f(t, x)$ avec $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ mais que f n'est pas C^1 en $x = 0$.

- Il y a la solution $x = 0$
- Si x est strictement positive, on peut écrire :

$$\frac{x'}{\sqrt{x}} = 1$$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x} = t + \lambda$ défini pour $t > -\lambda$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{(t+\lambda)^2}{4}$ pour $t > -\lambda$

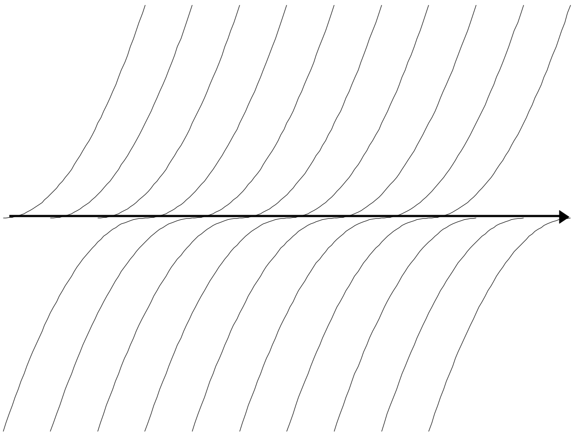
Si on se donne $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur le domaine $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Ci-dessus λ prend la valeur unique $2\sqrt{x_0} - t_0$.

Cependant, il existe une infinité de solutions passant par $(t_0, 0)$, (point où le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique plus) à savoir par exemple :

$$x = 0$$

ou $\quad x = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ sur }]-\infty, t_1] \\ \dfrac{(t-t_1)^2}{4} \text{ sur } [t_1, +\infty[\end{array}\right.$, avec $t_1 \geq t_0$

- Il y aussi les solutions négatives $x = -\dfrac{(t+\lambda)^2}{4}$ pour $t < -\lambda$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique aussi sur le domaine $U = \mathbb{R} \times]-\infty, 0[$.



$x' = \sqrt{|x|}$

L'équation différentielle étant de la forme $x' = f(x)$, comme dans l'exemple précédent, le translaté d'une courbe intégrale parallèlement à l'axe des abscisses donne une autre courbe intégrale.

❑ Soit l'équation différentielle $x' = x^{2/3}$.
- Il y a la solution $x = 0$.
- Si x ne s'annule pas, on peut écrire :

$$\frac{x'}{x^{2/3}} = 1$$

$\Leftrightarrow \quad 3x^{1/3} = t - \lambda$

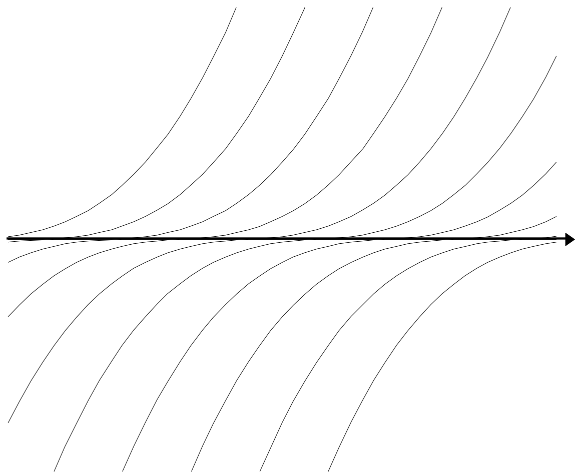
$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{(t-\lambda)^3}{27}$

Mais la fonction $f(t, x) = x^{2/3}$ n'est pas C^1 en $x = 0$. Et, comme dans l'exemple précédent, il existe effectivement plusieurs solutions passant par $(t_0, 0)$, à savoir, par exemple :

$$x = 0$$

ou $\qquad x = \begin{cases} 0 \text{ sur }]-\infty, t_1] \\ \dfrac{(t-t_1)^3}{27} \text{ sur } [t_1, +\infty[\end{cases}$, avec $t_1 \geq t_0$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique que sur les domaines $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ ou $U = \mathbb{R} \times]-\infty, 0[$.



$x' = x^{2/3}$

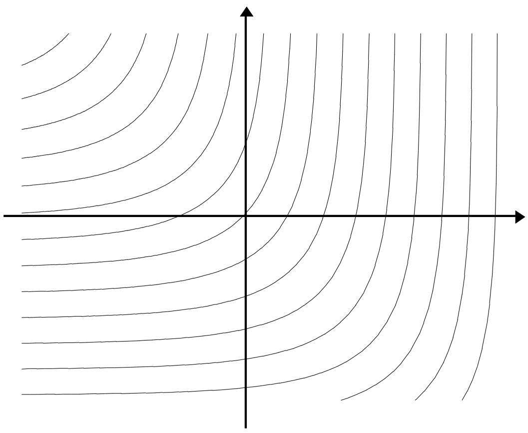
L'équation différentielle étant de la forme $x' = f(x)$, comme dans l'exemple précédent, le translaté d'une courbe intégrale parallèlement à l'axe des abscisses donne une autre courbe intégrale.

❑ Résoudre $x' = e^{x+t}$. La fonction $f(t, x) = e^{x+t}$ étant C^1 sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. L'équation équivaut à :

$x'e^{-x} = e^t$

$\Leftrightarrow \qquad \exists\, \lambda, \forall\, t, -e^{-x} = e^t - \lambda$

$\Leftrightarrow \qquad \exists\, \lambda, \forall\, t, x = -\ln(\lambda - e^t)$, définie pour $\lambda > 0$ sur l'intervalle $]-\infty, \ln(\lambda)[$



$x' = e^{x+t}$

Par chaque point du plan passe une courbe intégrale et une seule.

Montrons que les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par translation. Notons $\Gamma(\lambda)$ la courbe intégrale d'équation $x = -\ln(\lambda - e^t)$, et soit u un réel quelconque. On a :

$(t + u, x) \in \Gamma(\lambda)$

$\Leftrightarrow \qquad x = -\ln(\lambda - e^{t+u}) = -\ln((\lambda e^{-u} - e^t)e^u) = -u - \ln(\lambda e^{-u} - e^t)$

$\Leftrightarrow \qquad x + u = -\ln(\lambda e^{-u} - e^t)$

$\Leftrightarrow \qquad (t, x + u) \in \Gamma(\lambda e^{-u})$

On passe donc de la courbe $\Gamma(\lambda)$ à la courbe $\Gamma(\lambda e^{-u})$ par la translation de vecteur $(-u, u)$. Dans le graphique précédent, pour obtenir des courbes intégrales régulièrement espacées, on a choisi des valeurs de λ augmentant exponentiellement.

❑ Résoudre $x' = t\sqrt{|x|}$

Il y a la solution $x = 0$.

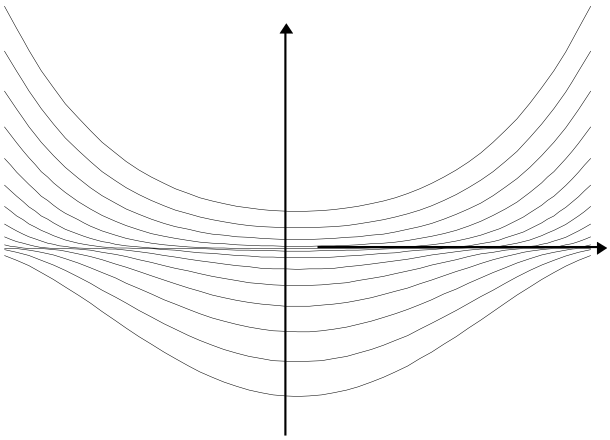
Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz ne sont vérifiées qu'en dehors de la droite $x = 0$, donc dans les domaines $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ ou $U = \mathbb{R} \times]-\infty, 0[$. Cherchons donc les solutions ne s'annulant pas :

$$\frac{x'}{\sqrt{|x|}} = t$$

$\Leftrightarrow \qquad 2\sqrt{|x|} \times \text{sg}(x) = \dfrac{1}{2}(t^2 + \lambda) \qquad\qquad$ ou sg(x) désigne le signe de x

$\Leftrightarrow \qquad x = \pm \dfrac{(t^2 + \lambda)^2}{16}$ et $t^2 + \lambda$ de même signe que x

$\Leftrightarrow \qquad x = \dfrac{(t^2 + \lambda)\,|t^2 + \lambda|}{16}$



$x' = t\sqrt{|x|}$

En un point (t_0, x_0) avec $x_0 \neq 0$ passe un courbe intégrale et une seule. Mais en $(t_0, 0)$ passe une infinité de solutions possibles.

Les équations différentielles des exemples qui précèdent peuvent être résolues expliciment car elles sont à variables séparables. Les exemples qui suivent font appel à des méthodes variées. Ils sont donnés ici à titre purement indicatif.

Utilisation de formes différentielles

Une équation différentielle du type $x' = f(t, x)$ peut se mettre sous la forme différentielle symbolique suivante $f(t, x)\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}x = 0$, ou également $\omega = g(t, x)f(t, x)\,\mathrm{d}t - g(t, x)\,\mathrm{d}x = 0$ où g est choisie de façon que ω soit la différentielle exacte $\omega = \mathrm{dF} = \partial_1\mathrm{F}\,\mathrm{d}t + \partial_2\mathrm{F}\,\mathrm{d}x$ d'une fonction $\mathrm{F}(t, x)$ (voir le chapitre

L2/CALCDIF2.PDF pour la définition d'une forme différentielle exacte), en désignant par ∂_1F et ∂_2F les dérivées partielles de F par rapport à sa première et sa deuxième variable. Autrement dit :

$$\left[\begin{array}{l} \partial_1 \mathrm{F}(t, x) = g(t, x) f(t, x) \\ \partial_2 \mathrm{F}(t, x) = -\, g(t, x) \end{array}\right.$$

g est dit **facteur intégrant**. Les courbes intégrales vérifient alors l'équation implicite $\mathrm{F}(t, x) = \mathrm{Cte}$. Soit en effet $x = \varphi(t)$ une fonction solution de l'équation différentielle sur un intervalle I. On a :

φ solution sur I

$\Rightarrow \quad \forall\, t \in \mathrm{I},\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$

$\Rightarrow \quad \forall\, t \in \mathrm{I},\ g(t, \varphi(t))\, f(t, \varphi(t)) - g(t, \varphi(t))\, \varphi'(t) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall\, t \in \mathrm{I},\ \partial_1 \mathrm{F}(t, \varphi(t)) + \partial_2 \mathrm{F}(t, \varphi(t))\varphi'(t) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall\, t \in \mathrm{I},\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{F}(t, \varphi(t)) = 0$

(revoir au besoin le chapitre L2/CALCDIF2.PDF pour la dérivation d'une composée de fonctions de plusieurs variables)

$\Leftrightarrow \quad \exists\, \mathrm{Cte},\ \forall\, t \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(t, \varphi(t)) = \mathrm{Cte}$

❑ Résoudre $x' = \dfrac{x}{t - x}$.

On écrit cette équation sous la forme $x\mathrm{d}t + (x - t)\mathrm{d}x = 0$. La forme différentielle n'est pas exacte. On cherche un facteur $g(t, x)$ de façon que $xg(t, x)\mathrm{d}t + (x - t)g(t, x)\mathrm{d}x = 0$ ait une primitive F. Il est nécessaire que :

$$\frac{\partial}{\partial x}(xg(t, x)) = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x \partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial t \partial x}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}((x - t)g(t, x))$$

$$\Leftrightarrow \quad g(t, x) + x\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = -\, g(t, x) + (x - t)\frac{\partial g}{\partial t}(t, x)$$

On peut chercher g ne dépendant que de x, ce qui donne :

$$2g(x) + xg'(x) = 0$$

d'où, par exemple, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On cherchera donc les solutions x ne s'annulant pas. La forme différentielle devient $\dfrac{\mathrm{d}t}{x} + (\dfrac{1}{x} - \dfrac{t}{x^2})\mathrm{d}x$. On cherche F telle que $\mathrm{dF} = \dfrac{\mathrm{d}t}{x} + (\dfrac{1}{x} - \dfrac{t}{x^2})\mathrm{d}x$:

$$\left[\begin{array}{l} \partial_1 \mathrm{F} = \dfrac{1}{x} \\ \partial_2 \mathrm{F} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{t}{x^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \psi, \left[\begin{array}{l} \mathrm{F}(t, x) = \dfrac{t}{x} + \psi(x) \\ \partial_2 \mathrm{F} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{t}{x^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \psi, \left[\begin{array}{l} \mathrm{F}(t, x) = \dfrac{t}{x} + \psi(x) \\ -\dfrac{t}{x^2} + \psi'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{t}{x^2} \end{array}\right.$$

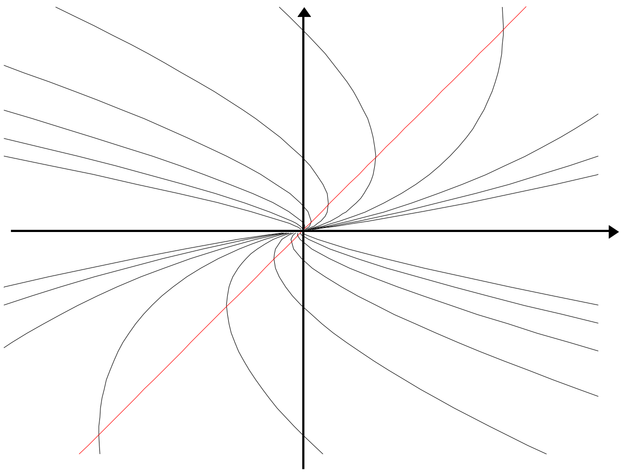
$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \psi, \left[\begin{array}{l} F(t, x) = \dfrac{t}{x} + \psi(x) \\ \\ \psi'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad F(t, x) = \frac{t}{x} + \ln(|x|) + \text{Cte}$$

L'équation différentielle aura donc des solutions $t \to x$ qui vérifieront $\dfrac{t}{x} + \ln(|x|) = \lambda$., $\lambda \in \mathbb{R}$ On obtient plutôt t en fonction de x que l'inverse :

$$t = x(\lambda - \ln|x|)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique avec la fonction $f(t, x) = \dfrac{x}{t - x}$ sur les ouverts ne contenant pas la diagonale $x = t$. Les courbes intégrales ont un point limite sur cette diagonale avec une tangente verticale. En effet, la dérivée $\dfrac{dt}{dx}$ vaut $\lambda - \ln|x| - 1$, qui s'annule pour $x = t$ (puisqu'alors $\lambda = \ln(|x|) + 1$ donc $\dfrac{dx}{dt}$ est infini.



$$x' = \frac{x}{t - x}$$

Il y a par ailleurs la solution $x = 0$ pour laquelle la méthode précédente ne s'applique pas, g n'étant alors pas définie. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de conclure que, si x s'annule en un point t différent de 0, alors x est identiquement nulle sur tout intervalle ne contenant pas 0.

❑ Résoudre $x' = \dfrac{x}{t + x^2}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur les ouverts du plan ne contenant pas la parabole d'équation $t + x^2 = 0$. Pour $x^2 + t \neq 0$, l'équation est équivalente à :

$$x\,dt - (t + x^2)dx = 0$$

La forme différentielle $x\,dt - (t + x^2)dx$ n'est pas une différentielle exacte. Cherchons une fonction g telle que $g(t, x)x\,dt - g(t, x)(t + x^2)dx$ soit exacte. Il est nécessaire que :

$$\frac{\partial}{\partial x}(xg(t, x)) = \frac{\partial}{\partial t}(-(t + x^2)g(t, x))$$

$\Leftrightarrow \qquad g(t, x) + x\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(t, x) = -\,g(t, x) - (t + x^2)\,\dfrac{\partial g}{\partial t}(t, x)$

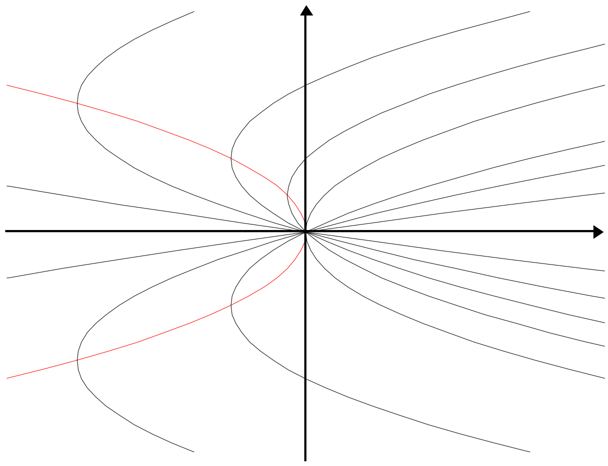
On peut chercher g uniquement fonction de x ce qui donne :

$$xg'(x) = -\,2g(x)$$

soit par exemple $g = \dfrac{1}{x^2}$. Nous résoudrons donc l'équation en dehors de $x = 0$. L'équation devient :

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}t - \frac{t + x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Le membre de gauche est la différentielle de $\dfrac{t}{x} - x$ + Cte. Les courbes intégrales vérifient donc l'équation $\dfrac{t}{x} - x = \lambda$. Il faut y ajouter la solution $x = 0$ pour laquelle g n'est pas définie.



$$x' = \frac{x}{t + x^2}$$

La parabole $x^2 + t = 0$, qui délimite les domaines U où s'applique le théorème deCauchy-Lipschitz, est l'ensemble des points limites des courbes intégrales. La tangente y devient verticale.

On trouvera une étude un peu plus détaillée dans le chapitre L2/CALCDIF2.PDF, et d'autres exemples dans les exercices dudit chapitre.

<u>Utilisation de paramétrages</u>

❑ Résoudre $x' = \dfrac{3x}{2t} + \dfrac{x^3}{2t^3}$. Dans cette équation, le second membre est uniquement fonction de $u = \dfrac{x}{t}$.

Au lieu de considérer $t \to x(t)$, on va considérer que x et t sont tous deux fonctions de u. On a alors :

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t/\mathrm{d}u} = \frac{3x}{2t} + \frac{x^3}{2t^3} = \frac{3u}{2} + \frac{u^3}{2}$$

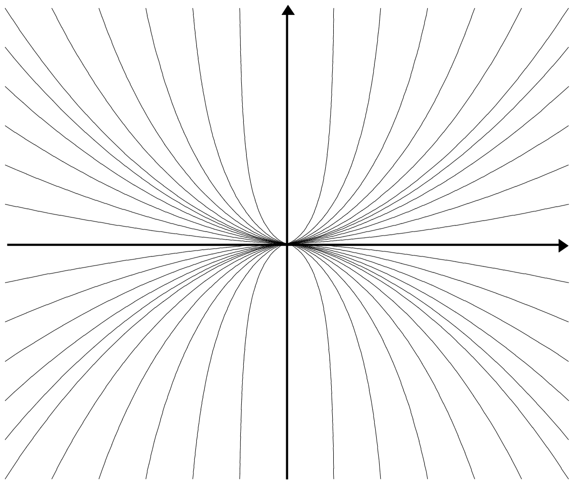
$\Leftrightarrow \qquad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = (\dfrac{3u}{2} + \dfrac{u^3}{2})\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = t + u\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$ cette dernière égalité provenant du fait que $x = tu$

$\Leftrightarrow \qquad (\dfrac{u}{2} + \dfrac{u^3}{2})\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = t$

qui est une équation linéaire en t et qu'on résout sur un intervalle où $\frac{u}{2} + \frac{u^3}{2}$ ne s'annule pas, donc $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Une primitive de $\frac{1}{\frac{u}{2} + \frac{u^3}{2}} = \frac{2}{u + u^3} = \frac{2}{u} - \frac{2u}{1 + u^2}$ est $2 \ln(|u|) - \ln(1 + u^2)$ + Cte, ou encore $\ln(\frac{u^2}{1 + u^2})$ + Cte, donc les solutions $u \to t(u)$ sont :

$$t = \frac{\lambda u^2}{1 + u^2}$$

et $$x = tu = \frac{\lambda u^3}{1 + u^2}$$



$$x' = \frac{3x}{2t} + \frac{x^3}{2t^3}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et sur $]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$. En chacun des points (t_0, x_0) avec $x_0 \neq 0$ de l'un de ces domaines passe une courbe et une seule, obtenue pour $u = \frac{x_0}{t_0}$ et $\lambda = t_0 (1 + \frac{t_0^2}{x_0^2})$. On a donc trouvé toutes les solutions passant par (t_0, x_0) avec $x_0 \neq 0$.

Mais si $x_0 = 0$ et $t_0 \neq 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit qu'il y a aussi une solution x telle $x(t_0) = 0$. Elle n'est pas donnée par les solutions précédentes. Il s'agit tout simplement de la solution $x = 0$, qu'il convient aussi de prendre en compte (elle correspond, si on le veut, au cas limite λ infini et u nul).

❑ L'utilisation de paramétrage se retrouve dans le cas suivant : $x^2 + x'^2 = 1$, où l'on est tenté de poser $x = \cos(\theta)$ et $x' = \frac{dx}{dt} = \sin(\theta)$. On obtient :

$$\left[\begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ \frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \sin(\theta)\frac{dt}{d\theta} \end{array}\right.$$

Si $\sin(\theta)$ ne s'annule pas (donc sur un intervalle du type $]k\pi, (k + 1)\pi[$, donc pour $x \in]-1, 1[$), on obtient :

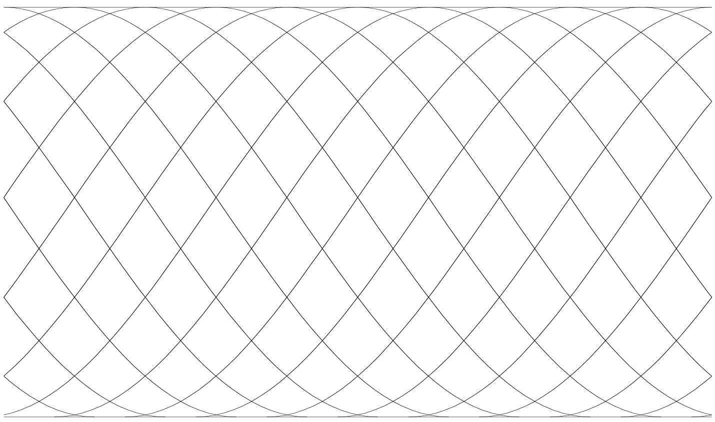
$$\left[\begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ \dfrac{dt}{d\theta} = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \exists\, \lambda, \forall\, t, \left[\begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ \theta = -\lambda - t \end{array}\right.$$

d'où $x = \cos(t + \lambda)$.
Par ailleurs, il y a les solutions $x = 1$ et $x = -1$, qui donnent des courbes enveloppes des courbes intégrales précédentes.
Considérons le domaine $U = \mathbb{R} \times]-1, 1[$. Les solutions sur ce domaine sont telles que $-1 < x < 1$, donc x' ne s'annule pas. Donc x' garde un signe constant. On a donc ou bien $x' = \sqrt{1 - x^2}$ (qui donnera des solutions strictement croissantes), ou bien $x' = -\sqrt{1 - x^2}$ (qui donnera des solutions strictement décroissantes). Pour chacune de ces deux dernières équations, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique dans le domaine U. Donc, pour tout (t_0, x_0) avec $-1 < x_0 < 1$, il existe une unique solution strictement croissante et une unique solution strictement décroissante vérifiant $x(t_0) = x_0$. Ce sont respectivement :

$$x = \cos(t - t_0 - \arccos(x_0)),\ t \in]t_0 + \arccos(x_0) - \pi, t_0 + \arccos(x_0)[$$
$$x = \cos(t - t_0 + \arccos(x_0)),\ t \in]t_0 - \arccos(x_0), t_0 - \arccos(x_0) + \pi[$$

L'intervalle du paramètre est de longueur π et choisi de façon qu'il contienne t_0.
Il y a une infinité de solutions vérifiant $x(t_0) = 1$ (ou -1), par exemple un arc de sinusoïde croissant qui atteint $x = 1$ avant le point t_0, suivi de la fonction constante 1 jusqu'à dépasser le point t_0, suivi éventuellement d'un arc de sinusoïde décroissant jusqu'à atteindre $x = -1$, etc. Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas aux points $(t_0, 1)$ ou $(t_0, -1)$.



$x^2 + x'^2 = 1$

Changement de variable
❑ Résoudre $(1 + t^3)x' + 2tx^2 + t^2x + 1 = 0$
On dispose de la solution évidente (?!?) $x = -t$. Effectuons alors dans l'équation initiale le changement de variable $x = z - t$. On obtient :

$$(1 + t^3)z' + 2tz^2 - 3t^2z = 0$$

Il y a la solution $z = 0$ correspondant à la solution $x = -t$ déjà trouvée. Par ailleurs, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique avec la fonction $f(t, x) = \dfrac{3t^2z - 2tz^2}{1 + t^3}$ sur les ouverts ne coupant pas la droite $t = -1$. Si z s'annule en un point autre que -1, z est donc identiquement nul sur tout intervalle ne contenant pas –1. On peut donc chercher les solutions z ne s'annulant pas, pour t élément de]–∞, –1[ou de]–1, +∞[:

$$(1 + t^3)\,\frac{z'}{z^2} + 2t - \frac{3t^2}{z} = 0$$

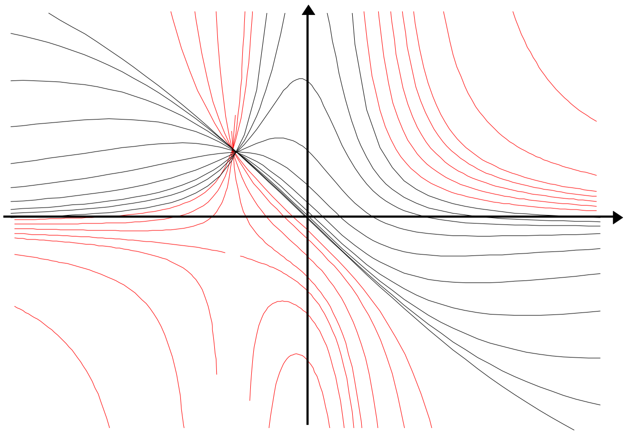
$$\Leftrightarrow \qquad -(1 + t^3)u' + 2t - 3t^2u = 0 \text{ avec } u = \frac{1}{z}$$

On a obtenu une équation différentielle linéaire, donc qu'on sait résoudre. Les solutions de l'équation sans second membre sont les $\frac{\lambda}{1 + t^3}$ et la méthode de variation de la constante donne la solution particulière $\frac{t^2}{1 + t^3}$. On a donc :

$$u = \frac{t^2 + \lambda}{1 + t^3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad z = \frac{1 + t^3}{t^2 + \lambda}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \frac{1 + t^3}{t^2 + \lambda} - t = \frac{1 - \lambda t}{t^2 + \lambda}$$



$$(1 + t^3)x' + 2tx^2 + t^2x + 1 = 0$$

En noir, on a représenté les courbes intégrales pour $\lambda > 0$, définie pour tout réel t, et en rouge les courbes intégrales pour $\lambda < 0$, définies pour $t \in \,]-\infty, -\sqrt{-\lambda}[$, ou $t \in \,]-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda}[$, ou $t \in \,]\sqrt{-\lambda}, +\infty[$. On remarquera la solution très particulière pour $\lambda = -1$, qui donne $x = \frac{1}{t-1}$, seule solution à ne pas se prolonger par le point (–1, 1). La solution $x = \frac{1}{t^2}$, obtenue pour $\lambda = 0$ est un cas limite des courbes noires lorsque λ tend vers 0, leur maximum tendant vers l'infini, ou aussi un cas limite des courbes rouges lorsque l'intervalle intermédiaire $]-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda}[$ se réduit en un point.

II : Systèmes d'équations linéaires

1- Définition

Soit X une fonction de classe C^1 d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). X est solution d'un système différentiel linéaire si, pour tout t élément de I, il existe une fonction A de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et une fonction B, de I dans $\mathbb{K}^n$, telles que :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

A et B seront supposées continues. L'équation $X'(t) = A(t)X(t)$ s'appelle **équation sans second membre** (ou **homogène**).

EXEMPLE :

❑ x et y étant fonction de t,

$$\begin{cases} x' = 2x + 3ty + e^t \\ y' = -4tx + y + \sin(t) \end{cases}$$

On a ici :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3t \\ -4t & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Le problème de Cauchy consiste à se donner un tel système différentiel linéaire, ainsi qu'une condition dite initiale de la forme $X(t_0) = X_0$, où t_0 est un réel donné élément de I, et X_0 un élément de $\mathbb{K}^n$. La question est alors de savoir s'il existe une solution à ce problème, et si cette solution est unique. Le théorème suivant, que nous admettrons, répond à la question :

THEOREME DE CAUCHY POUR LES EQUATIONS LINEAIRES :
Considérons le système différentiel linéaire $X' = A(t)X + B(t)$, *où* A *est une fonction continue d'un intervalle* I *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *et* B *une fonction continue de* I *dans* $\mathbb{K}^n$. *Etant donné* (t_0,X_0) *élément de* $I \times \mathbb{K}^n$, *il existe une solution unique* X *définie sur* I *telle que* $X(t_0) = X_0$.

On remarquera qu'on sait a priori que X est totalement défini sur le même intervalle I que A et B, ce qui est un avantage par rapport aux équations différentielles non linéaires vues au I, pour lesquelles on ne sait pas prévoir l'intervalle de définition.
On notera également qu'on se contente de supposer A et B continues et non C^1 comme c'était le cas pour les équations non linéaires.

2- Structure des solutions de l'équation homogène

Dans le cas où $n = 1$, on a vu dans le chapitre L1/EQUADIFF.PDF que la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation sans second membre. Il en est de même dans le cas général. En effet :

❑ Si X_g est une solution quelconque de $X' = AX$ et X_p une solution donnée de $X' = AX + B$, alors $X_g + X_p$ vérifie :

$$(X_g + X_p)' = X_g' + X_p' = AX_g + AX_p + B = A(X_g + X_p) + B$$

donc $X_g + X_p$ est solution de $X' = AX + B$

❑ Réciproquement, si X est solution de $X' = AX + B$, alors $X - X_p$ vérifie :

$$(X - X_p)' = X' - X_p' = AX + B - AX_p - B = A(X - X_p)$$
Donc $X - X_p$ est une des solutions X_g.

Intéressons-nous d'abord à l'équation sans second membre. Soit L l'ensemble des solutions X de l'équation $X' = A(t)X$, et soit t_0 un élément de I donné. Il est facile de vérifier que L est stable par + et . (i.e la somme de deux solutions de l'équation sans second membre, ou le produit d'une telle solution par un scalaire, sont encore des solutions). Donc L est un espace vectoriel. Considérons l'application suivante :

$$L \to \mathbb{K}^n$$
$$X \to X(t_0)$$

Cette application est clairement linéaire. Par ailleurs, le théorème de Cauchy s'appliquant à l'équation $X' = A(t)X$, on en déduit que l'application précédente admet une réciproque, à savoir l'application qui, à chaque vecteur X_0 de $\mathbb{K}^n$, associe la solution X élément de L telle que $X(t_0) = X_0$. L'application est donc un isomorphisme. Ceci a pour conséquence les points suivants :

❑ Si $X(t_0) = 0$, alors $X = 0$. Autrement dit, si une solution de l'équation sans second membre s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

❑ En prenant la contraposée de l'implication précédente, une solution de l'équation sans second membre non identiquement nulle ne s'annule jamais.

❑ $\mathbb{K}^n$ et L étant isomorphes ont même dimension. Par conséquent, l'espace L des solutions est de dimension n. Si X_1, ..., X_n sont des solutions linéairement indépendantes, étant au nombre de $n = \dim(L)$, elles forment une base de L. On dit aussi qu'elles forment un **système fondamental de solutions**. Toutes les solutions X sont de la forme $X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$, et dépendent de n paramètres arbitraires λ_i. Cependant, cela ne dit pas comment trouver X_1, ..., X_n et sauf cas particulier (tel que $A(t)$ matrice constante), il n'y a pas de méthode générale.

EXEMPLES :

❑ $$\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{2}(x + e^t y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(e^{-t}x - y) \end{array}\right.$$

On vérifiera que $X_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ sont solutions. Elles sont indépendantes. Toutes les solutions sont donc de la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, soit :

$$\left[\begin{array}{l} x(t) = \lambda_1 e^t - \lambda_2 \\ y(t) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{-t} \end{array}\right.$$

Le lecteur pourra se demander comment les solutions ont été trouvées. Cela relève ou bien d'une illumination inexplicable, ou bien du fait que le concepteur de l'exercice est parti des solutions X_1 et X_2 pour construire le système. En effet, si $X_1' = AX_1$ et $X_2' = AX_2$, alors :

$$(X_1'\ X_2') = A(X_1\ X_2)$$

où $(X_1\ X_2)$ est la matrice formée des deux colonnes X_1 et X_2 (et de même pour la dérivée), et la matrice A des coefficients du système se trouve facilement :

$$A = (X_1'\ X_2')(X_1\ X_2)^{-1}$$

❑ $\begin{cases} x' = \dfrac{tx - y}{t^2 - 1} \\ y' = \dfrac{-x + ty}{t^2 - 1} \end{cases}$

On résout sur $]-\infty, -1[$, ou sur $]-1, 1[$, ou sur $]1, +\infty[$. On vérifiera que $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont solutions. Elles sont indépendantes. Toutes les solutions sont donc de la forme $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, soit :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1 t + \lambda_2 \\ y(t) = \lambda_1 + \lambda_2 t \end{cases}$$

Dans les deux cas, si on se fixe $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, avec t_0 dans l'ensemble de définition de la matrice $A(t)$ des coefficients du système, on obtient un système linéaire de deux équations dont les deux inconnues sont λ_1 et λ_2. Le déterminant du système est non nul, comme on le vérifie facilement (y compris dans le second exemple où le déterminant vaut $t^2 - 1$, puisque la résolution a lieu sur un intervalle où $t^2 - 1 \neq 0$), donc λ_1 et λ_2 sont uniques. Si $x(t_0) = y(t_0) = 0$, alors x et y sont identiquement nulles.

3- Cas des matrices diagonales ou triangulaires

Deux cas sont faciles à résoudre, au besoin en se plaçant dans $\mathbb{C}$ plutôt que dans $\mathbb{R}$:

a) ***A est diagonale ou diagonalisable dans une base indépendante de t*** :

Si A est diagonale, le système $X' = A(t)X$ se réduit à n équations scalaires de la forme :

$$x_i' = a_i(t)x_i$$

Si A est diagonalisable (au besoin, revoir le chapitre L2/DIAGONAL.PDF) dans une base indépendante de t, notons P la matrice de passage (constante) à la nouvelle base, et $D(t)$ la matrice diagonale. On a :

$$A = PDP^{-1}$$

et $$X' = A(t)X \Leftrightarrow X' = PD(t)P^{-1}X$$
$$\Leftrightarrow P^{-1}X' = D(t)P^{-1}X$$

Posons $Y = P^{-1}X$. On a alors :

$Y' = P^{-1}X' = D(t)Y$ qui se résout comme vu précédemment. Connaissant Y, on en déduit $X = PY$.

Il est essentiel que P ne dépende pas de t, sinon on n'aurait pas $Y' = P^{-1}X'$ mais $Y' = (P^{-1})'X + P^{-1}X'$ sans simplification possible.

b) ***A est triangulaire ou trigonalisable dans une base indépendante de t*** :

Si A est triangulaire, on peut résoudre les systèmes en cascade. Il en de même si A est trigonalisable dans une base indépendante de t, une fois effectué le changement de base.

Cela s'applique en particulier lorsque A est une matrice constante :

EXEMPLES :

❑ Résoudre $\begin{cases} x' = 7x + 10y \\ y' = -3x - 4y \end{cases}$.

La matrice A vaut $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ d'où $\lambda = 1$ ou 2. Pour $\lambda = 1$, un vecteur propre est donné par $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, alors que pour $\lambda = 2$, un vecteur propre est donné par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On prend donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. On a $A = PDP^{-1}$.

On veut résoudre $X' = AX = PDP^{-1}X$ ou $Y' = P^{-1}X' = DP^{-1}X = DY$. Si $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = 2v \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} u = \lambda e^t \\ v = \mu e^{2t} \end{cases}$

donc $Y = \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^{2t} \end{pmatrix}$ et $X = PY = \begin{pmatrix} 5\lambda e^t + 2\mu e^{2t} \\ -3\lambda e^t - \mu e^{2t} \end{pmatrix}$. On remarquera qu'à aucun moment, il n'a été utile de calculer P^{-1}.

❑ Résoudre $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -4x - y \end{cases}$.

On a ici $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. $\lambda = 1$ est racine double. Un vecteur propre associé à $\lambda = 1$ est par exemple $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. A n'est pas diagonalisable. On peut chercher à la trigonaliser en cherchant e_2 tel que $Ae_2 = e_2 + e_1$, ce qui donne comme équation $2x + y = 1$, d'où par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si on pose $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Y = P^{-1}X$, on se ramène à $Y' = DY$ d'où le système plus simple :

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = v \end{cases}$$

d'où, après quelques calculs, $v = \lambda e^t$ et $u = \mu e^t + \lambda t e^t$. D'où $x = \mu e^t + \lambda t e^t$ et $y = -2\mu e^t + \lambda(-2t + 1)e^t$.

❑ Résoudre $\begin{cases} x' = -x + 8y - 2z \\ y' = x + 3y - z \\ z' = 3x - 6y + 2z \end{cases}$.

Alors $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 5)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$. Un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, un vecteur associé à la valeur propre -2 est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur associé à la valeur propre 5 est $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Les solutions de $Y' = DY$ sont $\begin{pmatrix} \lambda_1 e^t \\ \lambda_2 e^{-2t} \\ \lambda_3 e^{5t} \end{pmatrix}$. Donc $X = PY$ vaut $\begin{pmatrix} \lambda_1 e^t - 2\lambda_2 e^{-2t} - 3\lambda_3 e^{5t} \\ \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-2t} - 2\lambda_3 e^{5t} \\ 3\lambda_1 e^t + 3\lambda_2 e^{-2t} + \lambda_3 e^{5t} \end{pmatrix}$.

❑ Résoudre $\left[\begin{array}{l} x' = 19x + 11y - 45z \\ y' = 4x + 4y - 10z \\ z' = 8x + 5y - 19z \end{array}\right.$.

La matrice A vaut $\begin{pmatrix} 19 & 11 & -45 \\ 4 & 4 & -10 \\ 8 & 5 & -19 \end{pmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$. Pour $\lambda = 1$, un vecteur propre est $e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors que pour $\lambda = 2$, un vecteur propre est $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut chercher e_2 tel que $Ae_2 = e_2 + e_1$, par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La résolution de $Y' = DY$ donne comme solution, après quelques calculs, $\begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + \lambda_2 t e^t \\ \lambda_2 e^t \\ \lambda_3 e^{2t} \end{pmatrix}$. $X = PY$ donne finalement :

$$\left[\begin{array}{l} x = 5\lambda_1 e^t + 5\lambda_2 t e^t + 4\lambda_2 e^t + 2\lambda_3 e^{2t} \\ y = -2\lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t} \\ z = 2\lambda_1 e^t + 2\lambda_2 t e^t + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{2t} \end{array}\right.$$

Cela s'applique également dans le cas où A est variable, la matrice de passage P étant constante.

EXEMPLES :

❑ Résoudre $\left[\begin{array}{l} x' = t(4 - 3t)x + (2t^2 - 2t)y \\ y' = 6t(1 - t)x + (4t^2 - 3t)y \end{array}\right.$.

A est la matrice $\begin{pmatrix} 4t - 3t^2 & 2t^2 - 2t \\ 6t - 6t^2 & 4t^2 - 3t \end{pmatrix}$. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - t(t + 1)\lambda + t^3$. Les valeurs propres valent t et t^2. Un vecteur propre associé à t vaut $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, et un vecteur propre associé à t^2 vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut donc définir une matrice de passage P égale à $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice diagonale $D = P^{-1}AP$ vaut $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$. Posons $Y = P^{-1}X$. $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel $Y' = DY$ donc :

$$\left[\begin{array}{l} u' = tu \\ v' = t^2 v \end{array}\right.$$

ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{l} u = \lambda \exp(\frac{t^2}{2}) \\ y = \mu \exp(\frac{t^3}{3}) \end{array}\right.$$

La solution X vaut enfin PY, soit :

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\lambda \exp(\frac{t^2}{2}) + \mu \exp(\frac{t^3}{3}) \\ y = 3\lambda \exp(\frac{t^2}{2}) + 2\mu \exp(\frac{t^3}{3}) \end{array}\right.$$

❑ Résoudre $\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{tx - y}{t^2 - 1} \\ y' = \dfrac{-x + ty}{t^2 - 1} \end{array}\right.$, exemple déjà vu plus haut.

On a ici A = $\begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^2-1} & -\dfrac{1}{t^2-1} \\ -\dfrac{1}{t^2-1} & \dfrac{t}{t^2-1} \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont $\dfrac{1}{t-1}$ de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\dfrac{1}{t+1}$ de vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{t-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t+1} \end{pmatrix}$. Y = $P^{-1}X$ = $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ vérifie le système Y' = DY, ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{l} u' = \dfrac{u}{t-1} \\ v' = \dfrac{v}{t+1} \end{array}\right.$$

dont les solutions sont, sur chaque intervalle]–∞, –1[,]–1, 1[ou]1, +∞[:

$$\left[\begin{array}{l} u = \lambda(t-1) \\ v = \mu(t+1) \end{array}\right.$$

donc X = PY a pour composantes :

$$\left[\begin{array}{l} x = \lambda(t-1) + \mu(t+1) \\ y = -\lambda(t-1) + \mu(t+1) \end{array}\right.$$

Autrement dit, X = $(\lambda + \mu)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + (\mu - \lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. On retrouve le fait que l'espace des solutions est engendré par $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.

❑ Résoudre $\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{tx + y}{1 + t^2} \\ y' = \dfrac{-x + ty}{1 + t^2} \end{array}\right.$, variante du précédent, mais nécessitant l'usage des complexes.

La matrice A vaut $\begin{pmatrix} \dfrac{t}{1+t^2} & \dfrac{1}{1+t^2} \\ -\dfrac{1}{1+t^2} & \dfrac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique det(A – λI) vaut $(\lambda - \dfrac{t}{1+t^2})^2 + \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$. Il n'y a pas de valeurs propres réelles. On va donc résoudre le système différentiel en considérant que x et y sont des fonctions de la variable réelle t à valeurs complexes. Les valeurs propres complexes de Q sont $\lambda = \dfrac{t \pm i}{1+t^2}$. Pour $\lambda = \dfrac{t+i}{1+t^2}$, un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. De même, la valeur propre $\lambda = \dfrac{t-i}{1+t^2}$ admet pour vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. La matrice de passage est P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, et l'on a D = $\begin{pmatrix} \dfrac{t+i}{1+t^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{t-i}{1+t^2} \end{pmatrix}$. Résolvons Y' = DY, puis posons X = PY. La résolution de Y' = DY avec Y = $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ conduit à l'équation $u' = \dfrac{t+i}{1+t^2}\,u$ (respectivement $v' = \dfrac{t-i}{1+t^2}\,v$). Une primitive de $\dfrac{t+i}{1+t^2}$ est $\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + i\arctan(t)$, donc u est de la forme :

$$u = \lambda \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + i\arctan(t)\right) \qquad \lambda \text{ étant complexe}$$

$$= \lambda\sqrt{1+t^2}\,(\cos(\arctan(t)) + i\sin(\arctan(t)))$$

or $\cos(\arctan(t)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\sin(\arctan(t)) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Donc :

$$u = \lambda + \lambda i t$$

On trouve de même $v = \mu - \mu i t$, avec μ complexe. On en déduit que :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu + it(\lambda-\mu) \\ i(\lambda-\mu) - (\lambda+\mu)t \end{pmatrix} = i(\lambda-\mu)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - (\lambda+\mu)\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$$

combinaison à coefficients complexes de $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. Les solutions réelles sont obtenues en prenant une combinaison linéaire à coefficients réels.

❑ Considérons le système $\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{2}(x + e^t y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(e^{-t}x - y) \end{array}\right.$.

La matrice A vaut $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{e^t}{2} \\ \dfrac{e^{-t}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - \dfrac{1}{2}$. Les valeurs propres sont $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est $\begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$. Il dépend de t. La matrice de passage P dépendra de t et les méthodes précédentes ne peuvent s'appliquer. Nous avons pu résoudre plus haut ce système particulier car on a pu deviner l'expression de ses solutions, mais il n'existe pas de méthode générale de résolution de ce type de système. On aura alors le plus souvent recours à l'utilisation de logiciels pour obtenir une résolution numérique approchée.

4- Recherche d'une solution particulière

On applique une méthode de **variation des constantes**. Si l'on connaît n solutions indépendantes $(X_1, ..., X_n)$ de l'équation sans second membre, il est possible de chercher une solution particulière de l'équation générale $X' = A(t)X + B(t)$ sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \qquad \text{avec les notations du paragraphe 2)}$$

mais où les λ_i ne sont plus des constantes, mais des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On a alors :

$$X' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i' + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' X_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A X_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' X_i$$

$$= AX + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' X_i$$

Il suffit alors de résoudre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' X_i = B$, où les inconnues sont les λ_i'. On a en effet un système de Cramer pour tout t (i.e système de n équations en les n inconnues λ_i', et de rang n) car s'il existait un t_0 tel que $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ était lié, il existerait $\alpha_1, ..., \alpha_n$ scalaires non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 X_1(t_0) + ... + \alpha_n X_n(t_0) = 0$$

Mais dans ce cas, la fonction $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ vérifierait $X' = AX$ et $X(t_0) = 0$, donc, d'après le théorème de Cauchy, X serait identiquement nulle, ce qui signifierait que les fonctions $X_1, ..., X_n$ sont liées.

Par conséquent, on peut résoudre le système $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' X_i = B$, trouver les solutions λ_i', puis en les intégrant, trouver les λ_i.

EXEMPLES :

❑ Résoudre $\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{2}(x + e^t y) + 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}(e^{-t}x - y) + t \end{array}\right.$

On a vu plus haut qu'un système fondamental de solution du système sans second membre est donné par $X_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. On cherche X sous la forme $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, avec des fonctions λ_1 et λ_2, ce qui conduit au système :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1' e^t - \lambda_2' = 1 \\ \lambda_1' + \lambda_2' e^{-t} = t \end{array}\right.$$

d'où :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1' = \dfrac{e^{-t} + t}{2} \\ \lambda_2' = \dfrac{-1 + te^t}{2} \end{array}\right.$$

Une solution particulière est par exemple :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} e^{-t} + \dfrac{t^2}{4} \\ \lambda_2 = -\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}(t - 1)e^t \end{array}\right.$$

Donc finalement, la solution générale du système est, avec des constantes μ_1 et μ_2 quelconques :

$$\left[\begin{array}{l} x = \mu_1 e^t - \mu_2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{t^2 e^t}{4} + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2}(t-1)e^t \\ y = \mu_1 + \mu_2 e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{te^{-t}}{2} + \dfrac{1}{2}(t-1) \end{array}\right.$$

❑ Résoudre $\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{tx + y}{1 + t^2} + 1 + t^2 \\ y' = \dfrac{-x + ty}{1 + t^2} + 1 \end{array}\right.$.

On a vu plus haut qu'un système fondamental de solution du système sans second membre est donné par $X_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. On cherche X sous la forme $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, avec des fonctions λ_1 et λ_2, ce qui conduit au système :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1' t - \lambda_2' = 1 + t^2 \\ \lambda_1' + t\lambda_2' = 1 \end{array}\right.$$

d'où :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1' = t + \dfrac{1}{1 + t^2} \\ \lambda_2' = -1 + \dfrac{t}{1 + t^2} \end{array}\right.$$

Une solution particulière est par exemple :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{t^2}{2} + \arctan(t) \\ \lambda_2 = -t + \dfrac{1}{2}\ln(1 + t^2) \end{array}\right.$$

Donc finalement, la solution générale du système est, avec des constantes μ_1 et μ_2 quelconques :

$$\left[\begin{array}{l} x = \mu_1 t - \mu_2 + \dfrac{t^3}{2} + t\arctan(t) + t - \dfrac{1}{2}\ln(1 + t^2) \\ y = \mu_1 + \mu_2 t - \dfrac{t^2}{2} + \arctan(t) + \dfrac{t}{2}\ln(1 + t^2) \end{array}\right.$$

5- Matrice wronskienne

Soit $X' = A(t)X$ un système différentiel d'ordre n, A fonction continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, admettant $(X_1(t), X_2(t) ..., X_n(t))$ comme système fondamental de solutions. Appelons $W(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(X_1(t), X_2(t) ..., X_n(t))$. Nous avons vu que la solution générale X sur I de l'équation $X' = A(t)X$ s'écrit $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_n$, avec des constantes λ_i. Elle peut donc se mettre sous la forme $X(t) = W(t)\Lambda$, où Λ est la colonne de terme général λ_i. W s'appelle **matrice wronskienne**.

Chaque colonne X_i de W vérifiant $X_i' = AX_i$, il n'est pas difficile de vérifier que l'on a également $W' = AW$.

Par ailleurs, considérons les trois phrases suivantes :

(a) $\forall\, t \in I$, $(X_1(t), ..., X_n(t))$ forme un système libre de $\mathbf{K}^n$, autrement dit :

$$\forall\, t, [\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t) + ... + \lambda_n X_{\underline{n}}(t) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0]$$

(b) $\exists\, t_0 \in I$, $(X_1(t_0), ..., X_n(t_0))$ forme un système libre de $\mathbf{K}^n$, autrement dit :

$$\exists\, t_0, [\lambda_1 X_1(t_0) + \lambda_2 X_2(t_0) + ... + \lambda_n X_{\underline{n}}(t_0) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0]$$

(c) $(X_1, ..., X_n)$ sont n fonctions linéairement indépendantes, ce qui signifie :

$$[\forall\, t, \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t) + ... + \lambda_n X_{\underline{n}}(t) = 0] \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

Ces trois phrases sont en général différentes, mais dans le cas de solutions d'un système différentiel linéaire d'ordre n sans second membre, elles sont équivalentes.

- On a (a) $\Rightarrow$ (b) car si l'implication (a) est vraie pour tout t, elle sera vraie en particulier pour n'importe quel t_0 donné.
- On a aussi (b) $\Rightarrow$ (c) car si on suppose que la fonction $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + ... + \lambda_n X_{\underline{n}}$ est identiquement nulle, alors elle s'annule en t_0 et l'application de la propriété (b) entraîne la nullité de tous les λ_i.
- Enfin, la seule implication non évidente est (c) $\Rightarrow$ (a). Elle est fausse en général. Par exemple les deux fonctions $X_1 : t \to \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \to \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont indépendantes, mais $(X_1(1), X_2(1))$ forme un système lié. Le fait que l'implication (c) $\Rightarrow$ (a) soit vraie repose ici sur le théorème de Cauchy-Lipschitz. Supposons (c) vraie et choisissons un élément t_0 quelconque de l'intervalle I sur lequel on résout le système et supposons que l'on ait des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $\lambda_1 X_1(t_0) + \lambda_2 X_2(t_0) + ... + \lambda_n X_{\underline{n}}(t_0) = 0$. Considérons alors la solution $X = \lambda_1 X_1 + ... + \lambda_n X_n$. On a $X(t_0) = 0$. Mais le théorème de Cauchy-Lipschitz nous indique que, si la solution X à l'équation $X' = AX$ s'annule en un point, alors $X = 0$, du fait de l'unicité de la solution par le théorème de Cauchy et que la fonction identiquement nulle est solution. X étant identiquement nulle, on a :

$$\forall\, t, \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t) + ... + \lambda_n X_{\underline{n}}(t) = 0$$

et l'application de (c) entraîne la nullité des λ_i.

Les fonctions linéairement indépendantes $X_1 : t \to \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \to \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont solutions de $\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{tx - y}{t^2 - 1} \\ y' = \dfrac{-x + ty}{t^2 - 1} \end{array}\right.$, système qui se résout sur des intervalles ne contenant ni 1 ni – 1. Par conséquent, la possibilité de considérer le système lié $(X_1(1), X_2(1))$ est ici exclu.

Les trois propriétés s'expriment aussi sous la forme suivante :

(a) $\forall\, t \in I$, $W(t)$ est inversible.

(b) $\exists\, t_0 \in I$, $W(t_0)$ est inversible.

(c) Les colonnes de W sont n fonctions linéairement indépendantes

ou enfin :

(a) $\forall\, t \in I$, $\det(W(t)) \neq 0$

(b) $\exists\, t_0 \in I$, $\det(W(t_0)) \neq 0$

(c) Les colonnes de W sont n fonctions linéairement indépendantes.

det(W) s'appelle **wronskien** du système fondamental des solutions.

Notons que l'implication (b) $\exists\, t_0$, $\det(W(t_0)) \neq 0 \Rightarrow$ (a) $\forall\, t$, $\det(W(t)) \neq 0$ peut également se montrer directement de la façon suivante. Notons $L_1, L_2, ..., L_n$ les **lignes** de W. On a donc :

$$\det(W) = \det(L_1, ..., L_n)$$

Dérivons cette égalité, en tenant compte de la multilinéarité du déterminant :

$$\det(W)' = \sum_{i=1}^{n} \det(L_1, ..., L_{i-1}, L_i', L_{i+1}, ...,L_n) \qquad \text{(à ne pas confondre avec det(W') !!)}$$

or $L_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} L_j$ ($i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice W' = AW)

donc $\det(W)' = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(L_1, ..., L_{i-1}, L_j, L_{i+1}, ...,L_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \det(L_1, ..., L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, ...,L_n)$

les autres termes étant nuls puisqu'il y a deux lignes identiques

= Tr(A)det(W) où Tr (Trace) désigne la somme des éléments diagonaux.

det(W) vérifie donc une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre. Or une solution d'une telle équation ou bien est identiquement nulle, ou bien ne s'annule jamais. Si $\det(W(t_0))$ est non nul pour un t_0 donné, alors $\det(W(t))$ est non nul pour tout t.

La matrice W permet d'exprimer la solution X du système différentiel X' = AX avec $X(t_0) = X_0$. Elle s'écrit sous la forme :

$$X(t) = W(t)W(t_0)^{-1}X_0$$

Nous utilisons donc ici le fait que $W(t_0)$ est inversible.

EXEMPLES :

❑ Il existe plusieurs variantes ou conséquences de l'expression det(W)' = Tr(A)det(W) lorsque W est une matrice carrée vérifiant W' = AW. Par exemple :

a) Soit $M : t \in \mathbb{R} \to M(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ une application dérivable de dérivée M'. Alors :

$$\det(M)' = \mathrm{Tr}(M'M^{-1}) \det(M)$$

Il suffit de remarquer que $M' = (M'M^{-1})M = AM$ avec $A = M'M^{-1}$. On applique la relation det(W)' = Tr(A)det(W) en prenant W = M.

b) Soit V une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors la dérivée en 0 de la fonction $t \to \det(I_n + tV)$ vaut Tr(V).

En effet, la fonction $t \to \det(I_n + tV)$ est continue, prend la valeur 1 en $t = 0$, donc est non nulle sur un intervalle contenant 0. Donc $M(t) = I_n + tV$ est inversible pour t assez petit. D'après la propriété a), $\det(M)' = \mathrm{Tr}(M'M^{-1}) \det(M)$ au voisinage de 0. Pour $t = 0$, cette égalité donne le résultat annoncé, puisque $M(0) = I_n$ et $M'(0) = V$.

c) Soit U une matrice élément de $GL_n(\mathbb{R})$, et V une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors la dérivée en 0 de la fonction $t \to \det(U + tV)$ vaut $\mathrm{Tr}(U^{-1}V) \det(U)$.

Il suffit de remarquer que $\det(U + tV) = \det(U) \det(I_n + tU^{-1}V)$ et d'appliquer la propriété b).

d) Une généralisation du b) s'énonce comme suit. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(I_n + V) = 1 + \mathrm{Tr}(V) + o(V)$$

lorsque la matrice V tend vers la matrice nulle. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par exemple $\| V \| = \sum_{i,j} |v_{ij}|$. La notation o(V) quand V tend vers 0 signifie que $\dfrac{o(V)}{\| V \|}$ tend vers 0 quand V tend vers 0. C'est le cas par exemple du produit de deux coefficients $v_{ij} \times v_{pq}$ de V car $\dfrac{|v_{ij}\, v_{pq}|}{\| \mathrm{V} \|} \leq \dfrac{\| \mathrm{V} \|^2}{\| \mathrm{V} \|} = \| \mathrm{V} \|$. Notons (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et V_i les colonnes de V. On a, en utilisant la linéarité de déterminant par rapport à chacune de ses colonnes :

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{V}) &= \det(e_1 + \mathrm{V}_1, ..., e_n + \mathrm{V}_n) \\ &= \det(e_1, ..., e_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(e_1, ..., e_{k-1}, \mathrm{V}_k, e_{k+1}, ..., e_n) + \text{etc.}\end{aligned}$$

où etc. contient tous les déterminants possédant au moins deux colonnes de V. Ces déterminants sont des o(V) (développer successivement par rapport à deux de ces colonnes). Par ailleurs, $\det(e_1, ..., e_n) = 1$ et il suffit de vérifier que $\sum_{k=1}^{n} \det(e_1, ..., e_{k-1}, \mathrm{V}_k, e_{k+1}, ..., e_n) = \mathrm{Tr}(\mathrm{V})$.

e) Une généralisation du c) est :

$$\det(\mathrm{U} + \mathrm{V}) = \det(\mathrm{U}) + \det(\mathrm{U})\mathrm{Tr}(\mathrm{U}^{-1}\mathrm{V}) + o(\mathrm{V})$$

qu'on obtient à partir du d) en écrivant que $\det(\mathrm{U} + \mathrm{V}) = \det(\mathrm{U}) \det(\mathrm{I}_n + \mathrm{U}^{-1}\mathrm{V})$.
Le cas d'une matrice U non inversible est vu dans les exercices du chapitre L2/CALCDIF2.PDF traitant du *calcul différentiel*.

❑ Dans le cas où la matrice A est constante, une solution du système W' = AW est donnée par :

$$\mathrm{W}(t) = \exp(t\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathrm{A}^k}{k!}$$

avec $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_n$ (Dans le chapitre L2/EVNORME.PDF, on montre que, pour toute matrice carrée M, $\sum \dfrac{\mathrm{M}^k}{k!}$ est une série convergente, la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{M}^k}{k!}$ étant notée exp(M) et appelée **exponentielle de matrice**).
En effet, chaque terme de la matrice W(t) étant une série entière, on peut dériver terme à terme, et l'on obtient :

$$\mathrm{W}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}\mathrm{A}^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathrm{A}^{k+1}}{k!} = \mathrm{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathrm{A}^k}{k!} = \mathrm{AW}(t)$$

Comme on le fait pour l'exponentielle complexe, on peut montrer que :

$$\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2, \exp((t + u)\mathrm{A}) = \exp(t\mathrm{A}) \exp(u\mathrm{A})$$

Comme $\exp(0\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$, en particulier pour $u = -t$, on obtient $\exp(-t\mathrm{A}) = (\exp(t\mathrm{A})^{-1}$.
La solution du problème de Cauchy $\left[\begin{array}{l} \mathrm{X}' = \mathrm{AX} \\ \mathrm{X}(t_0) = \mathrm{X}_0 \end{array}\right.$ est alors :

$$\mathrm{X}(t) = \mathrm{W}(t)\mathrm{W}(t_0)^{-1}\mathrm{X}_0 = \exp(t\mathrm{A}) \exp(-t_0\mathrm{A}) \mathrm{X}_0 = \exp((t - t_0)\mathrm{A})\mathrm{X}_0$$

dont l'expression est comparable à la solution de l'équation différentielle ordinaire $\left[\begin{array}{l} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right.$ dans $\mathbb{R}$, dont la solution est $x(t) = x_0 \exp((t - t_0)a)$.

❑ Pour toute matrice carrée, on a det(exp(A)) = exp(Tr(A)).
En effet, pour $\mathrm{W} = \exp(t\mathrm{A})$, on a W' = AW et donc $\det(\mathrm{W})' = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\det(\mathrm{W})$, comme on l'a vu précédemment. Or la solution générale de l'équation différentielle $y' = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})y$ est

$y(t) = \lambda\exp(t\mathrm{Tr}(A))$. Donc det(W) est de cette forme. De plus, W prend la valeur I_n pour $t = 0$, donc $\det(W(0)) = 1$ et on en tire $\lambda = 1$. On a donc, pour tout t :

$$\det(\exp(tA)) = \exp(t\mathrm{Tr}(A))$$

et en particulier, pour $t = 1$:

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$$

❑ Résoudre le système différentiel $\left[\begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x \end{array}\right.$ au moyen d'une exponentielle de matrice.

On a $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^2 = -I_2$. Donc, par récurrence :

$$A^{2p} = (-1)^p I_2$$
$$A^{2p+1} = (-1)^p A$$

La matrice wronskienne se calcule en séparant les indices pairs et impairs dans la somme de la série :

$$W(t) = \exp(tA) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} I_2 + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} A$$

$$= \cos(t)I_2 + \sin(t)A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

D'où, en notant $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ la valeur de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $t = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x = x_0\cos(t) - y_0\sin(t) \\ y = x_0 \sin(t) + y_0\cos(t) \end{array}\right.$$

❑ Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et $\mathbf{\Omega}$ un vecteur non nul. On demande de résoudre l'équation différentielle $\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$, où $\boldsymbol{u} : t \to \boldsymbol{u}(t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans E. Soit f l'endomorphisme défini par $f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$. La solution valant $\boldsymbol{u}_0$ pour $t = 0$ est $\exp(tf)(\boldsymbol{u}_0)$ où $\exp(tf) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n f^n}{n!}$. On a :

$$f^2(\boldsymbol{u}) = f(f(\boldsymbol{u})) = \mathbf{\Omega} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}) = \langle \mathbf{\Omega} \mid \boldsymbol{u} \rangle \, \mathbf{\Omega} - \Omega^2 \boldsymbol{u}$$

d'après la formule du double produit vectoriel (voir L1/DETERMNT.PDF)

$$f^3(\boldsymbol{u}) = \mathbf{\Omega} \wedge f^2(\boldsymbol{u}) = -\Omega^2 \, \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{u} = -\Omega^2 f(\boldsymbol{u})$$

Ainsi, $f^3 = -\Omega^2 f$, puis, par récurrence, pour $n \geq 1$.

$$f^{2n} = (-\Omega^2)^{n-1} f^2$$
$$f^{2n+1} = (-\Omega^2)^n f$$

donc $$\exp(tf) = \mathrm{Id} + tf + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} f^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n+1} f^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \mathrm{Id} + tf + \sum_{n=1}^{\infty} (-\Omega^2)^{n-1} \frac{t^{2n}}{(2n)!} f^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\Omega^2)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} f$$

$$= \mathrm{Id} + tf - \frac{1}{\Omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}\,\Omega^{2n}}{(2n)!} f^2 + \frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}\,\Omega^{2n+1}}{(2n+1)!} f$$

$$= \mathrm{Id} + tf - \frac{1}{\Omega^2}(\cos(\Omega t) - 1)\, f^2 + \frac{1}{\Omega}(\sin(\Omega t) - \Omega t)\ f$$

$$= \mathrm{Id} + \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} f^2 + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} f$$

donc $\boldsymbol{u}(t) = \exp(tf)(\boldsymbol{u}_0)$

$$= \boldsymbol{u}_0 + \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2}(\langle \boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{u}_0\rangle\, \boldsymbol{\Omega} - \Omega^2\, \boldsymbol{u}_0) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}_0$$

$$= \cos(\Omega t)\boldsymbol{u}_0 + \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \langle \boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{u}_0\rangle\, \boldsymbol{\Omega}\ + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}_0$$

On reconnaît la rotation d'axe dirigé par $\boldsymbol{\Omega}$ et d'angle Ωt, appliquée au vecteur $\boldsymbol{u}_0$. De fait, l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}$ est celle vérifiée par le mouvement circulaire suivi par un vecteur mobile par rapport à un référentiel fixe au cours du temps t, le vecteur constant $\boldsymbol{\Omega}$ étant à chaque instant le vecteur instantané de rotation. Au bout d'un temps t, le vecteur a effectué une rotation d'angle Ωt.

Cependant, le plus souvent, le calcul de $\exp(t\mathrm{A})$ n'évite en généralement pas de diagonaliser ou trigonaliser A, ce qui limite son intérêt.

Observons maintenant comment s'écrit la méthode de variation des constantes, permettant de trouver une solution particulière de l'équation avec second membre $X' = AX + B$. On prend la solution générale de l'équation sans second membre $X = W\Lambda$, mais en remplaçant les composantes constantes de Λ par des fonctions. On a alors :

$$X' = W'\Lambda + W\Lambda' = AX + B$$

or $W' = AW$, donc :

$$W\Lambda' = B$$

donc $\Lambda' = W^{-1}B$, W étant inversible pour tout t de I.

On cherche une primitive Λ de $W^{-1}B$ et on en déduit X.

APPLICATION A LA MECANIQUE DES FLUIDES :

Considérons une équation du type $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)$ où X est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et F une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. On peut interpréter physiquement cette équation de la façon suivante. F est un champ de vecteurs : en chaque point $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace, $F(X) = \begin{pmatrix} F_x(X) \\ F_y(X) \\ F_z(X) \end{pmatrix}$ désigne un vecteur, par exemple la vitesse d'écoulement d'un fluide en ce point X. Le fait que F ne dépende pas du temps signifie que l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire qu'en chaque point de l'espace, la vitesse du fluide est invariante au cours du temps, même si elle varie d'un point à l'autre. Si on abandonne dans ce fluide une particule suffisamment petite pour négliger sa masse ou les phénomènes d'inertie, elle sera entrainée par le fluide. Si à l'instant t, la particule se trouve en $X(t)$, alors sa vitesse $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ sera égale à celle du fluide en ce point, soit $F(X(t))$. L'équation vérifiée par $X(t)$ est donc bien $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(X)$. La résolution de cette équation donne la trajectoire parcourue par la particule ou encore une ligne de champ des vitesses du fluide.

Considérons quatre particules voisines X_0, X_1, X_2 et X_3, de façon que $\boldsymbol{X_0X_1}$, $\boldsymbol{X_0X_2}$ et $\boldsymbol{X_0X_3}$ forment un petit volume élémentaire V de l'espace. On souhaite savoir ce que devient ce volume au cours du temps. On notera $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$ les valeurs de $\boldsymbol{X_0X_1}$, $\boldsymbol{X_0X_2}$ et $\boldsymbol{X_0X_3}$ à l'instant initial t_0 et $V_0 = \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ le volume à l'instant t_0. On a :

$$\frac{dX_0}{dt} = F(X_0) \text{ et } \frac{dX_1}{dt} = F(X_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{X_0X_1}}{dt} = \frac{dX_1}{dt} - \frac{dX_0}{dt} = F(X_1) - F(X_0) = dF(X_0)(X_1 - X_0) + o(X_1 - X_0)$$

où dF est la différentielle de F, application linéaire de matrice la matrice jacobienne de F égale à :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(voir le chapitre L2/CALCDIF2.PDF). En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 (le physicien considérant ici un volume infiniment petit), on obtient le système différentiel <u>linéaire</u> :

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = dF(X_0)(\boldsymbol{u}) \qquad \text{avec } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{X_0X_1} \text{ et de même pour } \boldsymbol{X_0X_2} \text{ et } \boldsymbol{X_0X_3}$$

$$= A(\boldsymbol{u}) \text{ avec } A = dF(X_0)$$

La solution de ce système est de la forme $\boldsymbol{u}(t) = W(t)W(t_0)^{-1}\, \boldsymbol{u}_0$ avec $W(t)$ une matrice wronskienne du système et $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ou $\boldsymbol{e}_3$ selon que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{X_0X_1}$, $\boldsymbol{X_0X_2}$ ou $\boldsymbol{X_0X_3}$.

Le volume V constitué par les trois vecteurs $\boldsymbol{X_0X_1}$, $\boldsymbol{X_0X_2}$ ou $\boldsymbol{X_0X_3}$ à un instant quelconque est égal à :

$$V = \det(\boldsymbol{X_0X_1}, \boldsymbol{X_0X_2}, \boldsymbol{X_0X_3}) = \det(W(t)W(t_0)^{-1}\, \boldsymbol{e}_1, W(t)W(t_0)^{-1}\, \boldsymbol{e}_2, W(t)W(t_0)^{-1}\, \boldsymbol{e}_3)$$

$$= \det(W(t)W(t_0)^{-1}\, (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3))$$

où $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ est la matrice constituée des trois colonnes $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$)

$$= \det(W(t)) \det(W(t_0)^{-1}) \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$

$$= \det(W(t)) \det(W(t_0)^{-1})\, V_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \det(W(t)) \det(W(t_0)^{-1})\, V_0$$

$$= \mathrm{Tr}(A) \det(W) \det(W(t_0)^{-1})\, V_0$$

car on a vu que $\det(W)' = \mathrm{Tr}(A) \det(W)$

$$= \mathrm{Tr}(dF(X_0))\, V$$

Le fluide est dit **incompressible** si et seulement si le volume V reste inchangé au cours du temps, autrement dit si et seulement si $\mathrm{Tr}(dF(X_0)) = 0$, ce qui se traduit par $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$. La quantité $\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$ s'appelle la **divergence** de F. On a montré qu'un fluide est incompressible si et seulement si la divergence de son champ des vitesses est nulle.

III : Equations différentielles linéaires du second ordre

1- Equations linéaires à coefficients constants

On rappelle brièvement ce qui est exposé dans le chapitre L1/EQUADIFF.PDF de 1ère année :

Ces équations sont de la forme $ax'' + bx' + cx = d(t)$, a, b, c étant ici des constantes. Les solutions sont de la forme $z + x_p$ où x_p est une solution particulière de l'équation avec second membre, et z la solution générale de l'équation sans second membre.

z se trouve de la façon suivante. On écrit l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

- Si l'équation possède deux racines distinctes r et r', z est combinaison linéaire des deux exponentielles e^{rt} et $e^{r't}$.

- Si l'équation possède une racine double r, z est combinaison linéaire de e^{rt} et te^{rt}.

- Si a, b, c sont réels et si l'équation possède deux racines complexes non réelles r et r' conjuguées, de la forme $\alpha + i\beta$, z est combinaison linéaire des parties réelles et imaginaires de l'exponentielle complexe e^{rt}, à savoir $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ et $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

On remarque que, dans tous les cas, l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 2.

x_p se trouve de la façon suivante :

- cas $ax'' + bx' + cx = \mathrm{P}(t)e^{kt}$, où P est un polynôme, et k est éventuellement complexe. On cherche x_p sous la forme $\mathrm{Q}(t)e^{kt}$, avec Q polynôme de degré égal à deg(P) si k n'est pas racine de l'équation caractéristique, de degré égal à deg(P) + 1, si k est racine simple de l'équation caractéristique, et de degré égal à deg(P) + 2, si k est racine double de l'équation caractéristique.

- autres cas. Voir plus bas.

2- Equations linéaires à coefficients non constants

Ces équations sont de la forme $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$, où a, b, c et d sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle I. Nous garderons la variable t dans a, b, c, d pour bien prendre en compte qu'il s'agit de fonctions, mais pas dans x pour alléger les notations.

<u>a) Structure des solutions</u> :

Il est facile de vérifier que les solutions sont encore de la forme $z + x_p$ où x_p est une solution particulière, et z la solution générale de l'équation sans second membre. On résout ces équations sur des intervalles ouvert I où a ne s'annule pas. Quitte à diviser par a, on se ramène à une équation du type suivant, (en rebaptisant les coefficients) :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

En posant $y = x'$, et donc $y' = x''$, on peut lui associer le système suivant :

$$\left[\begin{array}{l} x' = y \\ y' = a(t)y + b(t)x + c(t) \end{array}\right.$$

ou encore

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$$

avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}(t)$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, et $\mathrm{B}(t)$ le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$.

Les résultats sur les systèmes différentiels linéaires du premier ordre s'applique donc ici. Ils nous permettent d'affirmer que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 2, et que, (t_0, x_0, y_0) étant donnés, avec $t_0 \in \mathrm{I}$, il existe une unique solution x

vérifiant $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$ (théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires du second ordre).

Pas plus qu'il n'existe de méthode générale de résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients variables, il n'existe pas de méthode générale de résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables.

Signalons cependant un cas où il est facile de trouver des solutions particulières de l'équation homogène. Il s'agit de l'**équation d'Euler** :

$$at^2x'' + btx' + cx = 0 \qquad a, b \text{ et } c \text{ étant constants}$$

On peut chercher x sous la forme $x = t^r$, ce qui conduit à l'équation :

$$ar(r - 1) + br + c = 0$$

permettant de déterminer r. On peut également effectuer le changement de variable $t = e^u$, qui conduit à une équation à coefficients constants.

On peut enfin parfois essayer de chercher des solutions sous forme de séries entières.

b) Cas où l'on connaît l'une des solutions de l'équation sans second membre :

Si l'on connaît, par un moyen ou un autre, une solution particulière z de l'équation sans second membre, et qui ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude, on peut chercher x sous la forme $x = uz$, avec u fonction auxiliaire. On a en effet :

$$x = uz$$
$$x' = uz' + u'z$$
$$x'' = uz'' + 2u'z' + u''z$$

or $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ et $z'' = a(t)z' + b(t)z$

On obtient donc :

$$uz'' + 2u'z' + u''z = a(t)(uz' + u'z) + buz + c(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2u'z' + u''z = a(t)u'z + c(t)$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en u', et qu'on sait donc résoudre dans tous les cas.

En ce qui concerne l'équation sans second membre $x'' = a(t)x' + b(t)x$, la méthode précédente conduit à l'équation $2u'z' + u''z = a(t)u'z$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre en u' sans second membre : les solutions d'une telle équation forment un espace vectoriel de dim 1. u' est donc le multiple d'une certaine fonction. Quant à u, on l'obtiendra en intégrant u' et en rajoutant une constante d'intégration arbitraire. On voit alors que u appartient à un espace vectoriel de dimension 2. On retrouve le fait que l'espace des solutions d'une équation linéaire du second ordre sans second membre est un plan.

c) Recherche d'une solution particulière :

Considérons deux solutions x_1 et x_2 linéairement indépendantes solutions de l'équation sans second membre $x'' = a(t)x' + b(t)x$. Appliquons la méthode de variation des constantes qu'elle qu'on l'a vue pour les systèmes différentiels linéaires, en introduisant la fonction $y = x'$. On a vu que notre équation différentielle du second ordre était équivalente au système :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$.

$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}$ forme un système fondamental de solutions de ce système. La matrice wronskienne associée est $W = (X_1\ X_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}$. La solution générale de l'équation sans second membre est $X = W\Lambda$ avec une colonne $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ à coefficients constants. On cherche une solution particulière du système avec second membre sous la forme $X = W\Lambda$, mais avec Λ constitué de deux fonctions, ce qui conduit à résoudre :

$$W\Lambda' = B$$

Autrement dit, on écrit :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = W\Lambda = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et on résout :

$$W\Lambda' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

ou encore, les fonctions λ_1 et λ_2 sont telles que :

$$\left[\begin{array}{l} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ x' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' \end{array}\right.$$

et on résout $\left[\begin{array}{l} \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0 \\ \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' = c(t) \end{array}\right.$

Remarquons que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ implique en général que :

$$x' = \lambda_1' x_1 + \lambda_1 x_1' + \lambda_2' x_2 + \lambda_2 x_2'$$

et que la condition supplémentaire $x' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2'$ entraîne que $\lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0$, première équation de notre système à résoudre, et réciproquement.
La deuxième équation à résoudre $\lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' = c$ provient alors simplement du calcul de x'' à partir de $x' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2'$:

$$\begin{aligned} x'' &= \lambda_1' x_1' + \lambda_1 x_1'' + \lambda_2' x_2' + \lambda_2 x_2'' \\ &= \lambda_1' x_1' + \lambda_1(a(t)x_1' + b(t)x_1) + \lambda_2' x_2' + \lambda_2(a(t)x_2' + b(t)x_2) \end{aligned}$$

mais aussi :

$$\begin{aligned} x'' &= a(t)x' + b(t)x + c(t)) \\ &= a(t)(\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2') + b(t)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + c(t)) \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions de x'', on arrive bien à $\lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' = c(t)$.

En résumé, on a :

METHODE DE VARIATION DES CONSTANTES

Soit une équation différentielle du second ordre $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ *dont on connaît un système fondamental de solutions* x_1 *et* x_2 *de l'équation sans second membre. On recherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme* :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

λ_1 *et* λ_2 *étant des fonctions solutions du système* :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 = 0 \\ \lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' = c(t) \end{array}\right.$$

Ce système est obtenu en imposant la condition supplémentaire $x' = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2'$.

EXEMPLES :

❑ Résoudre $-t^2x'' + t(2+t)x' - (2+t)x = -2t^3(t+1)e^t$

On résout l'équation sans second membre :

$$-t^2x'' + t(2+t)x' - (2+t)x = 0$$

On résout pour $t \neq 0$, de façon que le coefficient de x'' ne s'annule pas. On constate que $z = t$ est solution évidente (?). Cherchons l'autre sous la forme $x = ut$. On a $x' = u't + u$ et $x'' = u''t + 2u'$ d'où :

$$-t^3u'' - 2t^2u' + t(2+t)(u't+u) - (2+t)ut = 0$$

$\Leftrightarrow \quad -t^3u'' + t^3u' = 0$

$\Leftrightarrow \quad u'' = u'$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda, \forall\, t, u' = \lambda e^t$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, (\lambda, \mu)\ u = \lambda e^t + \mu$

d'où $x = \lambda te^t + \mu t$. On a ici $x_1 = te^t$ et $x_2 = t$.

Cherchons une solution particulière de l'équation complète avec le second membre $\dfrac{-2t^3(t+1)e^t}{-t^2} = 2t(t+1)e^t$ sous la forme $x = \lambda te^t + \mu t$, λ et μ étant des fonctions λ et μ vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1'x_1 + \lambda_2'x_2 = 0 \\ \lambda_1'x_1' + \lambda_2'x_2' = c(t) = 2t(t+1)e^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda'te^t + \mu't = 0 \\ \lambda'(t+1)e^t + \mu' = 2t(t+1)e^t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda' = 2(t+1) \\ \mu' = -2(t+1)e^t \end{cases}$$

Une solution est par exemple $\lambda = t^2 + 2t$ et $\mu = -2te^t$ d'où la solution particulière $x = t^3e^t$.

La solution générale de l'équation complète sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$ est :

$$x = \lambda te^t + \mu t + t^3e^t \qquad \lambda \text{ et } \mu \text{ étant ici des constantes}$$

❑ Dans l'exemple précédent, les solutions sur $\mathbf{R}^*$ sont :

$$x = \begin{cases} \lambda_1te^t + \mu_1t + t^3e^t \text{ si } t > 0 \\ \lambda_2te^t + \mu_2t + t^3e^t \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

avec quatre constantes arbitraires λ_1, μ_1, λ_2, μ_2.

Si on cherche des solutions sur $\mathbf{R}$, on exigera que les solutions précédentes se prolonge en 0, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, ce qui impose ici que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\mu_1 = \mu_2$.

Annexe I : Méthodes approchées de résolution

La majorité des équations différentielles qui arrivent "naturellement" dans des problèmes concrets est rarement résoluble. Il existe cependant des procédés numériques approchés implantés dans de nombreux logiciels. Cette annexe a pour but de donner une idée des méthodes utilisées dans ces logiciels.

1- La méthode d'Euler

Soit l'équation $x' = f(t, x)$. On choisit un pas h. On cherche une solution approchée de l'équation, vérifiant $x(t_0) = x_0$. On approxime la solution exacte x par une fonction affine par morceaux sur les intervalles $[nh, (n+1)h]$, les valeurs de x en nh valant x_n, définies de la façon suivante. On pose, par récurrence :

$$\begin{cases} t_n = t_0 + nh \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \end{cases}$$

En effet, puisque $x'(t_n) = f(t_n, x(t_n))$, en approximant $x'(t_n)$ par le taux d'accroissement $\dfrac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}$, et en remplaçant les $x(t_n)$ par x_n, on obtient la relation de récurrence indiquée.

Si f est C^1, on peut montrer que la fonction approchée converge vers la solution exacte au sens suivant : soit $[0, t]$ un intervalle subdivisé en n intervalles de longueur égales $h = \dfrac{t}{n}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\underset{0 \leq p \leq n}{\text{Max}} \left| x_p - x(t_p) \right| = 0$.

EXEMPLE :

❑ Soit l'équation différentielle $x' = x$.
Dans cet exemple, partons de x_0 en $t_0 = 0$, de sorte que $t_n = nh$.
La solution est évidemment $x = x_0e^t$. La méthode d'Euler donne :

$$\forall\, n,\ x_{n+1} = x_n + hx_n$$
$$\Rightarrow \quad \forall\, n,\ x_n = x_0(1 + h)^n$$

On peut comparer x_n avec $x(t_n) = x_0e^{nh} = x_0(e^h)^n$.
On constate que la méthode d'Euler a ici remplacé e^h par $1 + h$, partie polynomiale de degré 1 de son développement limité. La méthode d'Euler est peu précise, mais facile à programmer.

2- La méthode du point milieu

Elle a pour but d'améliorer la précision de la méthode d'Euler, en remarquant qu'entre (t_n, x_n) et (t_{n+1}, x_{n+1}), la dérivée x' est mieux approchée par la valeur de f au point milieu. Cela demande cependant d'estimer $\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$, estimation que l'on obtient à partir de la méthode d'Euler. On pose donc :

$$\begin{cases} t_n = t_0 + nh \\ t_{n+½} = t_n + \dfrac{h}{2} \\ x_{n+½} = x_n + \dfrac{h}{2} f(t_n, x_n) \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+½}, x_{n+½}) \end{cases}$$

EXEMPLE :

❑ Avec l'exemple $x' = x$, et toujours avec $t_0 = 0$, on obtient :

$$t_n = nh$$
$$t_{n+½} = nh + \frac{h}{2}$$
$$x_{n+½} = x_n\,(1 + \frac{h}{2})$$
$$x_{n+1} = x_n\,(1 + h + \frac{h^2}{2})$$

donc $\quad \forall\, n,\ x_n = x_0\,(1 + h + \dfrac{h^2}{2})^n$

On obtient en développement limité de $\exp(h)$ avec un ordre de plus. L'approximation sera meilleure.

3- La méthode de Runge-Kutta

Cette méthode est une généralisation de la méthode précédente, où des premières estimations grossières permettent d'obtenir ensuite de meilleures approximations.

$t_{n+½} = t_n + \frac{h}{2}$

$t_{n+1} = t_n + h$

$p_1 = f(t_n, x_n)$ valeur approchée de la dérivée en $x(t)$

$x_{n+½} = x_n + \frac{hp_1}{2}$ approximation par la méthode d'Euler du point milieu de $[x(t), x(t + h)]$

$p_2 = f(t_{n+½}, x_{n+½})$ approximation de la valeur de la dérivée au point milieu

$z_{n+½} = x_n + \frac{hp_2}{2}$ autre approximation du point milieu

$p_3 = f(t_{n+½}, z_{n+½})$ autre approximation de la valeur de la dérivée au point milieu

$z_{n+1} = x_n + hp_3$ approximation de $x(t + h)$

$p_4 = f(t_{n+1}, z_{n+1})$ approximation de la dérivée en $x(t + h)$

$x_{n+1} = x_n + h(\frac{p_1}{6} + \frac{p_2}{3} + \frac{p_3}{3} + \frac{p_4}{6})$ dernière approximation de $x(t + h)$ obtenue en pondérant toutes les pentes rencontrées à l'aide des coefficients intervenant dans l'intégrale de Simpson (définie dans l'annexe I du chapitre L1/INTEGRAL.PDF).

EXEMPLES :

❑ Avec $x' = x$, toujours en prenant $t_0 = 0$:

$t_{n+½} = (n + \frac{1}{2})h$

$t_{n+1} = (n + 1)h$

$p_1 = x_n$

$x_{n+½} = x_n(1 + \frac{h}{2})$

$p_2 = x_n(1 + \frac{h}{2})$

$z_{n+½} = x_n(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4})$

$p_3 = x_n(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4})$

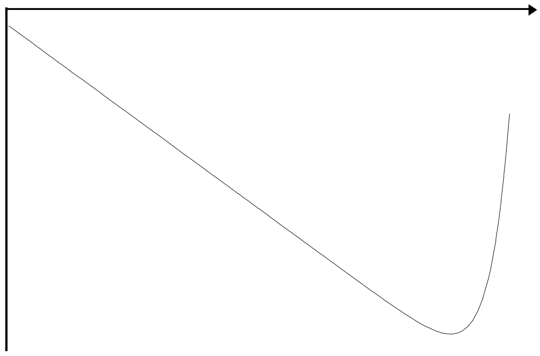
$z_{n+1} = x_n(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4})$

$p_4 = x_n(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4})$

$x_{n+1} = x_n(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})$

On remarque que l'on obtient le développement limité de $\exp(h)$ à l'ordre 4.

❑ Néanmoins, il faut toujours prendre garde qu'un résolution numérique itérative peut donner des résultats aberrants par accumulation d'erreurs. Considérons par exemple le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} x' - x = \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ x(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$. Le lecteur vérifiera que la solution de ce problème est $x = -\dfrac{t}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dont le graphe est une droite. Voici ci-dessous une représentation graphique au moyen d'un logiciel donnant une résolution numérique de l'équation différentielle[2] :



Le graphe ressemble initialement à une droite, mais prend finalement une allure aberrante, vers le haut ou vers le bas selon le logiciel utilisé, pour une valeur de t de quelques dizaines. Pourquoi ? Regardons par exemple ce qui se passe avec la méthode d'Euler. On a :

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_{n+1} = x_n + h(x_n + \frac{nh}{\sqrt{2}})$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall\, n,\ x_n = -\frac{nh}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1+h)^n(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

La relation est vérifiée pour $n = 0$. Si elle est vraie au rang n, alors :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h(x_n + \frac{nh}{\sqrt{2}}) = x_n + h(-\frac{1}{\sqrt{2}} + (1+h)^n(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}})) \\ &= -\frac{nh}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1+h)^n(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{h}{\sqrt{2}} + h(1+h)^n(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= -\frac{(n+1)h}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1+h)^{n+1}(x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

En théorie, $x_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc l'expression de x_n se simplifie en $x_n = -\dfrac{nh}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, tout à fait comparable à $x = -\dfrac{t}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Mais numériquement, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est arrondi dans un ordinateur ou une calculatrice, de sorte que $x_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ n'est pas tout à fait nul. Multiplié par $(1 + h)^n$, le terme $(1 + h)^{n+1}(x_0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ qui devrait être nul, va prendre une place prépondérante.

[2] Certains logiciel de calcul formel tels que Maple, Mathematica, SageMath, permettent de résoudre de manière exacte une équation différentielle linéaire. Pour observer le phénomène indiqué, il convient avec ces logiciels d'utiliser une option indiquant spécifiquement à la commande de résolution de l'équation différentielle d'utiliser un mode de résolution numérique.

❑ Le même phénomène risque de se produire avec l'équation différentielle $x' = -tx$. La solution exacte est donnée par $x = x_0\exp(-\frac{t^2}{2})$. La méthode d'Euler conduit à considérer la suite :

$$\forall\, n,\ x_{n+1} = x_n - nh^2x_n = (1 - nh^2)x_n$$

Cependant, selon le logiciel utilisé et la valeur donnée à h, une programmation numérique peut conduire après quelques centaines d'itérations à des valeurs de x_n de plus en plus grandes en valeur absolue, en changeant de signe, alors que la solution exacte tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Cela est dû au facteur $1 - nh^2$ qui possède ce comportement, et qui finira par le transmettre à la suite (x_n) si aucun des termes de cette suite ne prend numériquement la valeur 0.

Les résolutions numériques approchées peuvent donc être mises en défaut, et l'on conçoit les difficultés de prévision que l'on peut rencontrer lorsque l'équation différentielle n'est pas résoluble.

Annexe II : Le pendule de Foucault

L'expérience du pendule de Foucault, effectuée pour la première fois en 1851 au Panthéon, consiste à observer que le plan dans lequel se balance un pendule est affecté d'un mouvement de rotation par rapport à un référentiel lié à la Terre. Le phénomène étant assez lent, on utilise un pendule de grande longueur afin que la vitesse du pendule et donc les atténuations dues au frottement de l'air, soient faibles.

L'explication du phénomène dans un référentiel terrestre fait intervenir l'accélération de Coriolis. Soit (O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) un repère lié à la Terre. O est le point d'attache du pendule, $\boldsymbol{k}$ indique la direction verticale locale (vers le haut), $\boldsymbol{i}$ l'est, $\boldsymbol{j}$ le nord. Les équations du mouvement sont :

$$\left[\begin{array}{ll} x'' = -2\omega\cos(\theta)\, z' + 2\omega\sin(\theta)\, y' + \lambda x & (1) \\ y'' = -\,2\omega\sin(\theta)\, x' + \lambda y & (2) \\ z'' = -\,g + 2\omega\cos(\theta)\, x' + \lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = l^2 & (4) \end{array}\right.$$

$\omega = \frac{2\pi}{24\text{h}}$ est la vitesse de rotation de la Terre. θ est la latitude du lieu. g est l'accélération de la pesanteur. Les coefficients x', y', z' proviennent de l'accélération de Coriolis $-2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{V}$ qui a pour composantes $-2\begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos(\theta) \\ \omega\sin(\theta) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Les coefficients λx, λy et λz représentent la tension du fil. l est la longueur du fil. A cause de la dernière équation, le système n'est pas linéaire. On supposera donc que les oscillations sont faibles, de façon à négliger les déplacements verticaux et à ne conserver que les termes du premier ordre dans le plan xy. On posera alors :

(4) $z = -\,l$

(3) $\lambda = -\frac{g}{l}$

Le terme en x' dans l'expression de λ est également négligé car, dans (1) et (2), il fournirait des termes en xx' ou yx' qui seront du second ordre. Le système linéarisé obtenu est :

$$\left[\begin{array}{ll} x'' = 2\omega\sin(\theta)\, y' - \frac{g}{l}\, x & (1) \\ y'' = -\,2\omega\sin(\theta)\, x' - \frac{g}{l}\, y & (2) \end{array}\right.$$

On dispose alors de plusieurs méthodes de résolution :

METHODE 1 :

❑ Le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega\sin(\theta) & -\frac{g}{l} & 0 \\ -2\omega\sin(\theta) & 0 & 0 & -\frac{g}{l} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

de la forme V' = AV avec V = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x \\ y \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A vaut :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^4 + (4\omega^2\sin^2(\theta) + 2\frac{g}{l})\lambda^2 + \frac{g^2}{l^2}$$

$$= (\lambda^2 + \frac{g}{l})^2 + 4\omega^2\sin^2(\theta)\lambda^2$$

$$= (\lambda^2 + 2i\omega\sin(\theta)\lambda + \frac{g}{l})(\lambda^2 - 2i\omega\sin(\theta)\lambda + \frac{g}{l})$$

dont les racines complexes sont :

$\lambda_0 = -i\omega\sin(\theta) + i\Omega$

$\lambda_1 = -i\omega\sin(\theta) - i\Omega$

$\lambda_2 = i\omega\sin(\theta) + i\Omega$

$\lambda_3 = i\omega\sin(\theta) - i\Omega$

avec $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \omega^2\sin^2(\theta)} \approx \sqrt{\frac{g}{l}}$. Pour $\theta \neq 0$ (hors de l'équateur), A posséde quatre valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable. On en déduit que x et y sont combinaisons linéaires des quatre exponentielles $\exp(\lambda_k t)$. Ecrivons donc :

$$x = a_0\exp(\lambda_0 t) + a_1\exp(\lambda_1 t) + a_2\exp(\lambda_2 t) + a_3\exp(\lambda_3 t)$$

Si l'on reporte cette expression dans l'équation (1), cela permet de trouver y', et donc y en intégrant :

$$2\omega\sin(\theta)\, y' = x'' + \frac{g}{l}x$$

$$= \sum_{k=0}^{3} a_k\,(\lambda_k^2 + \frac{g}{l})\exp(\lambda_k t)$$

$$= -\sum_{k=0}^{1} 2i\omega\sin(\theta)\lambda_k\, a_k \exp(\lambda_k t) + \sum_{k=2}^{3} 2i\omega\sin(\theta)\lambda_k\, a_k \exp(\lambda_k t)$$

d'où :

$$y' = -\sum_{k=0}^{1} i\lambda_k\, a_k \exp(\lambda_k t) + \sum_{k=2}^{3} i\lambda_k\, a_k \exp(\lambda_k t)$$

et $\quad y = -ia_0\exp(\lambda_0 t) - ia_1\exp(\lambda_1 t) + ia_2\exp(\lambda_2 t) + ia_3\exp(\lambda_3 t)$

Il n'y a pas de constante d'intégration compte tenu du fait que 0 est la position moyenne de y.

On peut vérifier que l'équation (2) est bien valide. Les coefficients a_k sont définis à partir des conditions initiales, à savoir les valeurs de $x(0)$, $x'(0)$, $y(0)$ et $y'(0)$.

METHODE 2 :

❑ Reprenons le système.

$$\begin{cases} x'' = 2\omega\sin(\theta)\, y' - \frac{g}{l}x & (1) \\ y'' = -\,2\omega\sin\theta\, x' - \frac{g}{l}y & (2) \end{cases}$$

Posons $z = x + iy$. Le système est alors équivalent à l'équation différentielle unique, à coefficients constants :

$$z'' + 2i\omega\sin(\theta)\, z' + \frac{g}{l}\, z = 0$$

Son équation caractéristique est $r^2 + 2i\omega\sin(\theta)r + \frac{g}{l} = 0$ dont les racines sont $-\,i\omega\sin(\theta) \pm i\Omega$, où, comme ci-dessus, $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \omega^2\sin^2(\theta)}$. Donc z est combinaison linéaire à coefficients complexes des deux exponentielles $\exp((-\,i\omega\sin\theta \pm i\Omega)t) = \exp(\lambda_0 t)$ ou $\exp(\lambda_1 t)$. On obtient x et y en en prenant les parties réelles et imaginaires.

Considérons par exemple les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = V_0$, i.e. $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = V_0$, $y'(0) = 0$. Le pendule passe par la position d'équilibre à l'instant $t = 0$ avec une vitesse V_0 vers l'est. La soution est :

$$z = \frac{V_0}{\lambda_0 - \lambda_1}\,(\exp(\lambda_0 t) - \exp(\lambda_1 t)) = \frac{V_0}{\Omega}\exp(-i\omega\sin(\theta)t)\,\sin(\Omega t)$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on trouve x et y.

$$x(t) = \frac{V_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\cos(\omega\sin(\theta)\, t)$$

$$y(t) = -\,\frac{V_0}{\Omega}\sin(\Omega t)\sin(\omega\sin(\theta)\, t)$$

Outre l'oscillation du pendule de pulsation Ω, il y a rotation du plan d'oscillation avec la pulsation $-\,\omega\sin(\theta)$, négative dans l'hémisphère Nord, (le plan tourne dans le sens des aiguilles d'une montre), positive dans l'hémisphère Sud (le plan tourne dans le sens trigonométrique), nulle à l'équateur (le plan ne tourne pas).

La période de rotation de ce plan est $T = \frac{2\pi}{\omega|\sin(\theta)|} = \frac{24\text{h}}{|\sin(\theta)|}$, soit environ 31h48mn à Paris.

Si on part des conditions initiales $x(0) = x_m$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, consistant à faire partir le pendule avec une vitesse nulle hors de la position d'équilibre, on trouvera :

$$z = x_m\,(\cos(\Omega t) + i\,\frac{\omega\sin(\theta)}{\Omega}\sin(\Omega t))\exp(-\,i\omega\sin(\theta)\, t)$$

Considérons un référentiel (O, ***I***, ***J***, ***k***) en rotation d'axe ***k*** par rapport au référentiel (O, ***i***, ***j***, ***k***), avec la pulsation $-\,\omega\sin(\theta)$, qui est la pulsation du plan d'oscillation vu précédemment. Dans le nouveau repère, l'affixe complexe ζ repérant le pendule vaut :

$$\zeta = z\exp(i\omega\sin(\theta)\, t)$$

$$= x_m\,(\cos(\Omega t) + i\,\frac{\omega\sin(\theta)}{\Omega}\sin(\Omega t))$$

ζ ne reste pas dans le plan d'oscillation mais décrit une ellipse dont les demi-grands axes sont x_m et $x_m \dfrac{\omega\sin(\theta)}{\Omega}$. Dans le cas de la Terre, le petit axe est 10 000 à 100 000 fois plus petit que le grand, ce qui est imperceptible. Cette ellipse ne doit pas être confondue avec celle que l'on observe communément lorsque le pendule n'est pas rigoureusement lancé dans un plan. On observe alors une ellipse banale d'un système harmonique bidimensionnel.

On affirme souvent que l'expérience de Foucault a enfin permis de prouver la rotation de la Terre. Cette affirmation, compréhensible par le grand public, ne nous paraît pas cependant refléter la réelle innovation de l'expérience de Foucault. En effet, on omet de dire qu'on s'intéresse à la rotation de la Terre ***par rapport*** à un référentiel galiléen. Or une excellente approximation de référentiel galiléen est donné par un référentiel géocentrique (ou mieux héliocentrique) dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines. Pour observer la rotation par rapport à un référentiel galiléen, il suffit donc de passer une ou deux heures le soir dehors et d'observer à l'oeil nu le mouvement des étoiles. Nul besoin d'expérience sophistiquée pour cela.
Ce qui fait l'originalité de l'expérience de Foucault, ce n'est pas le fait qu'il permet d'observer une rotation de la Terre par rapport à un référentiel galiléen, mais plutôt que cette observation peut se faire ***dans un local fermé, sans aucune observation astronomique***. Il ramène donc à une échelle locale de quelques mètres un phénomène qui était jusque là à l'échelle de l'Univers.
Bien mieux, l'observation de la période de rotation du plan du pendule permet également, tout en restant dans une pièce fermée, de ***pouvoir déterminer la latitude du lieu***, là aussi, sans aucune observation astronomique. Le sens de rotation du plan du pendule permet également de savoir si l'expérience se fait dans l'hémisphère Nord ou l'hémisphère Sud. C'est en cela que l'expérience du pendule de Foucault est remarquable.

Annexe III : Couplages

1- Couplage mécanique

Considérons deux systèmes mécaniques oscillants. Le système i (i = 1 ou 2) dépend d'un paramètre x_i. x_i mesure par exemple l'écart entre la position du système et sa position à l'équilibre. Il est soumis à une force de rappel proportionnelle à x_i avec un coefficient k_i lui donnant une pulsation propre $\omega_i = \sqrt{\dfrac{k_i}{m_i}}$ où m_i où m_i est la masse du système i. En outre, les deux systèmes sont reliés entre eux, de sorte qu'il s'exerce sur le système i une force $K(x_{i+1} - x_i)$, avec une constante K que nous supposerons strictement positive. (les indices sont calculés modulo 2). Ce type de système est donné par exemple par deux pendules oscillants, reliés entre eux par un ressort.

Les équations du mouvement sont :

$$\left[\begin{array}{l} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_2 + K(x_1 - x_2) \end{array}\right.$$

On se ramène à une équation différentielle matricielle du second ordre X'' = AX en écrivant le système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_1 + K}{m_1} & \dfrac{K}{m_1} \\ \dfrac{K}{m_2} & -\dfrac{k_2 + K}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalisons directement la matrice sans nous ramener à un système différentiel du premier ordre, comme on l'a fait pour le pendule de Foucault. A a pour forme $\begin{pmatrix} -\omega_1^2-\Omega_1^2 & \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 & -\omega_2^2-\Omega_2^2 \end{pmatrix}$ où $\Omega_i = \sqrt{\dfrac{K}{m_i}}$. Le polynôme caractéristique $\Pi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de la matrice vaut :

$$\lambda^2 + (\,\omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2)\lambda + (\omega_1^2 + \Omega_1^2)(\omega_2^2 + \Omega_2^2) - \Omega_1^2\Omega_2^2$$

Le discriminant vaut $\Delta = (\omega_1^2 + \Omega_1^2 - \omega_2^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\Omega_1^2\,\Omega_2^2$. Les deux racines du polynôme, étant de produit positif et de somme négative sont toutes deux négatives. Elles valent $\dfrac{-(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Notons λ_1 et λ_2 ces deux valeurs propres négatives. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à une base de vecteurs propres. Notons D la matrice diagonale correspondante. On a $A = PDP^{-1}$, donc le système différentiel $X'' = AX$ équivaut à $X'' = PDP^{-1}X$ ou $P^{-1}X'' = DP^{-1}X$. Si on pose $Y = P^{-1}X$, alors Y vérifie l'équation différentielle $Y'' = DY$, soit :

$$\begin{cases} y_1'' = \lambda_1 y_1 \\ y_2'' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Les λ_i étant négatifs, les solutions y_i sont des combinaisons linéaires de $\exp(\pm\, i\Omega t)$, ou si l'on préfère de $\cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t)$, avec $\Omega^2 = -\lambda_i$. Comme $X = PY$, x_1 et x_2 seront combinaisons linéaires de $\cos(\sqrt{-\lambda_1}t)$, $\sin(\sqrt{-\lambda_1}t)$, $\cos(\sqrt{-\lambda_2}t)$ et $\sin(\sqrt{-\lambda_2}t)$. Les deux pulsations possibles $\sqrt{-\lambda_1}$ ou $\sqrt{-\lambda_2}$, à savoir $\sqrt{\dfrac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) + \sqrt{\Delta}}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) - \sqrt{\Delta}}{2}}$, sont appelées **pulsations propres** du système.

Comparons-les aux deux pulsations ω_1 et ω_2. Supposons par exemple $\omega_1 \geq \omega_2$. Alors :

$$\Pi(-\,\omega_1^2) = \Omega_1^2(-\,\omega_1^2 + \omega_2^2) \leq 0$$
$$\Pi(-\,\omega_2^2) = \Omega_2^2(\omega_1^2 - \omega_2^2) \geq 0$$

Donc $-\,\omega_1^2$ est entre les racines λ_1 et λ_2, et $-\omega_2^2$ à l'extérieur des racines. Soit :

$$\lambda_1 = \frac{-(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) - \sqrt{\Delta}}{2} < -\,\omega_1^2 < \frac{-(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) + \sqrt{\Delta}}{2} = \lambda_2 < -\,\omega_2^2$$

ou encore :

$$-\,\lambda_1 = \frac{\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2 + \sqrt{\Delta}}{2} > \omega_1^2 > \frac{\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2 - \sqrt{\Delta}}{2} = -\,\lambda_2 > \omega_2^2$$

Ainsi :

$$\sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) + \sqrt{\Delta}}{2}} > \omega_1 > \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \Omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) - \sqrt{\Delta}}{2}} > \omega_2$$

L'une des pulsations propres du système est plus grande que les deux pulsations ω_1 et ω_2, l'autre est comprise entre les deux.

Le fait de savoir qu'il n'y a comme solutions que des combinaisons d'exponentielles complexes fournit une autre méthode de résolution. Elle consiste à chercher directement les solutions du système sous la forme $x_1 = x_{10}\exp(i\Omega t)$ et $x_2 = x_{20}\exp(i\Omega t)$. Le système différentiel se transforme alors en un système de deux équations aux deux inconnues x_{10} et x_{20} sans second membre, les coefficients du système dépendant du paramètre Ω :

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2 x_2 + K(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (-m_1\Omega^2 + k_1 + K)x_{10} - Kx_{20} = 0 \\ -Kx_{10} + (-m_2\Omega^2 + k_2 + K)x_{20} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1(-\Omega^2 + \omega_1^2 + \Omega_1^2)x_{10} - m_2\Omega_2^2x_{20} = 0 \\ -m_1\Omega_1^2x_{10} + m_2(-\Omega^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2)x_{20} = 0 \end{cases}$$ avec les notations précédentes.

On trouve le polynôme caractéristique vérifié par $\Omega = \sqrt{-\lambda}$ en écrivant que le déterminant du système est nul (de façon qu'il y ait une solution non triviale), ce qui donne bien :

$$(-\Omega^2 + \omega_1^2 + \Omega_1^2)(-\Omega^2 + \omega_2^2 + \Omega_2^2) - \Omega_1^2\Omega_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2)\,\Omega^2 + (\omega_1^2 + \Omega_1^2)(\omega_2^2 + \Omega_2^2) - \Omega_1^2\Omega_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2)\lambda + (\omega_1^2 + \Omega_1^2)(\omega_2^2 + \Omega_2^2) - \Omega_1^2\Omega_2^2 = 0$$

comme précédemment.

Des cas limites peuvent être considérés :

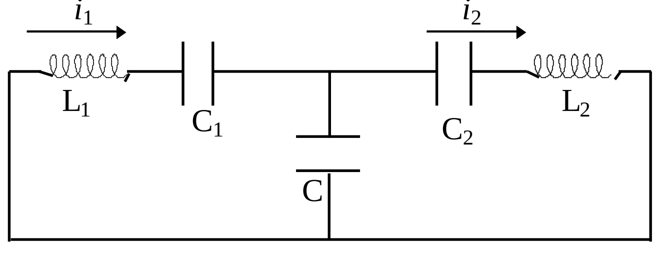
❑ K = 0 (pas de couplage). Dans ce cas, $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\sqrt{\Delta} = \omega_1^2 - \omega_2^2$ et les pulsations propres du système sont simplement ω_1 et ω_2, pulsations de chaque masse prise isolément (ce qui est normal, puisqu'il n'y a pas de couplage).

❑ $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$. $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. $\Omega_1 = \Omega_2 = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \Omega$. $\sqrt{\Delta} = 2\Omega^2$. Les deux pulsations du système sont $\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}$ et ω. Cette situation est obtenue par exemple par deux pendules identiques reliés par un ressort. La pulsation ω est obtenue lorsque les deux pendules oscillent en phase et la pulsation $\sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}$ lorsqu'ils sont en opposition de phase.

❑ K tend vers $+\infty$. $\sqrt{\Delta}$ est équivalent à $\Omega_1^2 + \Omega_2^2$. La pulsation la plus forte est équivalente à $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$. On vérifiera que la plus faible tend vers $\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}}$. Cette dernière pulsation correspond à un système unique de masse $m_1 + m_2$ soumis à une force de rappel de coefficient $k_1 + k_2$. Cette situation est obtenue par exemple par deux pendules reliés par une barre rigide de masse négligeable.

2- Couplage capacitif

Un système électrique (sans résistance, au même titre que le système mécanique était sans frottement) conduisant aux mêmes équations que le système mécanique précédent est le suivant :



En effet, en négligeant les effets d'inductance mutuelle entre les deux bobines, on pourra vérifier que les équations sont :

$$\begin{cases} L_1\, q_1'' = -\dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_2 - q_1}{C} \\ L_2\, q_2'' = -\dfrac{q_2}{C_2} + \dfrac{q_1 - q_2}{C} \end{cases}$$

avec q_1 et q_2 les charges des condensateurs C_1 et C_2 telles que $i_1 = \dfrac{dq_1}{dt}$ et $i_2 = \dfrac{dq_2}{dt}$. Le système est équivalent au système mécanique

$$\begin{cases} m_1\, x_1'' = -k_1\, x_1 + K(x_2 - x_1) \\ m_2\, x_2'' = -k_2\, x_2 + K(x_1 - x_2) \end{cases}$$

à condition d'identifier :

q_1	à	x_1
q_2	à	x_2
L_1	à	m_1
L_2	à	m_2
k_1	à	$\dfrac{1}{C_1}$
k_2	à	$\dfrac{1}{C_2}$
K	à	$\dfrac{1}{C}$

Les solutions sont évidemment identiques au cas mécanique, avec les cas limites suivants :

❑ $C = \infty$ (pas de couplage). On remplace C par un court-circuit. Les pulsations propres du système sont simplement ω_1 et ω_2, pulsations de chaque circuit indépendamment de l'autre.

❑ $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = \Gamma$. $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \dfrac{1}{\sqrt{L\Gamma}}$. $\Omega_1 = \Omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \Omega$. $\sqrt{\Delta} = 2\Omega^2$. Les deux pulsations du système sont $\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\Delta}}$ et ω. Cette situation est obtenue pour deux circuits identiques. La pulsation ω est obtenue lorsque les deux circuits oscillent en phase (avec la charge de C qui reste identiquement nulle) et la pulsation $\sqrt{\omega^2 + \sqrt{\Delta}}$ lorsqu'ils sont en opposition de phase.

❑ $C = 0$ (on a coupé le circuit en C). La seule pulsation ayant un sens physique correspond à celle d'une circuit série d'inductance $L_1 + L_2$ et de capacité $\dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$.

Annexe IV : Déviation vers l'est/Particule dans un champ électromagnétique.

Soient $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ deux vecteurs de l'espace euclidien orienté de dimension 3. Dans cette annexe, on s'intéresse à l'équation différentielle $\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{V} + \boldsymbol{D}$ où $\boldsymbol{V}$ est une fonction dépendant de la variable t. Cette équation intervient en physique dans deux domaines totalement différents, t représentant alors le temps :

- Soit un corps pesant M dans un référentiel terrestre. On le lâche sans vitesse initiale d'un point O et on observe sa chute libre dans le champ de pesanteur $\boldsymbol{g}$. Du fait que le référentiel terrestre n'est pas galiléen, le corps est soumis à une force de Coriolis (les autres forces d'inertie sont contenues dans la définition de $\boldsymbol{g}$), et l'équation du mouvement est donnée par l'équation $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{V}$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur rotation de la Terre par rapport à un référentiel galiléen. L'équation est du type précédent, avec $\boldsymbol{C} = -2\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{g}$. On observe une déviation vers l'est par rapport à une chute dans un référentiel galiléen.

- Soit une particule M de charge q de masse m dans un champ électrique uniforme $\boldsymbol{E}$ et dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$. Cette particule est soumise à la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}$. L'application du principe fondamental de la dynamique donne $m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}$, équation du type précédent avec $\boldsymbol{C} = -\frac{q}{m}\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}$.

1- Résolution

Nous supposerons que $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont linéairement indépendants. Sous cette hypothèse, $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D})$ forme une base de l'espace (en général non orthonormée). Appelons (u, v, w) les composantes de $\boldsymbol{V}$ dans cette base. Dans les applications physiques précédentes, $\boldsymbol{V}$ étant une vitesse, le module C de $\boldsymbol{C}$ est homogène à l'inverse d'un temps, le module D de $\boldsymbol{D}$ à une accélération, u à une longueur, v à un temps, w au carré d'un temps.

On a alors, en utilisant une formule de double produit vectoriel $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle\, \boldsymbol{b} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle\, \boldsymbol{c}$ (voir le chapitre L1/DETERMNT.PDF) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{V} + \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{C} \wedge (u\boldsymbol{C} + v\boldsymbol{D} + w\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \\
&= v\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D} + w\boldsymbol{C} \wedge (\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \\
&= v\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D} + w\,(\langle \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D} \rangle\, \boldsymbol{C} - \mathrm{C}^2\, \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \\
&= w\,\langle \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D} \rangle\, \boldsymbol{C} + (1 - w\mathrm{C}^2)\boldsymbol{D} + v\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = u'\boldsymbol{C} + v'\boldsymbol{D} + w'\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}$$

où u', v', w' sont les dérivées de u, v, w par rapport à t. D'où le système différentiel :

$$\begin{cases} u' = w\,\langle \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D} \rangle \\ v' = 1 - w\mathrm{C}^2 \\ w' = v \end{cases}$$

On a donc $v'' = -w'\mathrm{C}^2 = -v\mathrm{C}^2$. Les solutions de cette équation différentielle du second ordre sont :

$$v = \lambda\cos(\mathrm{C}t) + \mu\sin(\mathrm{C}t)$$

où λ et μ sont des constantes (homogènes à des temps). D'où :

$$w = \frac{1}{\mathrm{C}^2} - \frac{v'}{\mathrm{C}^2} = \frac{1}{\mathrm{C}^2} + \lambda\frac{\sin(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}} - \mu\frac{\cos(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}}$$

qui redonne bien $w' = v$. Enfin :

$$u' = w\,\langle \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D} \rangle = \left(\frac{1}{\mathrm{C}^2} + \lambda\frac{\sin(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}} - \mu\frac{\cos(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}}\right) \langle \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D} \rangle$$

donc $$u = \left(\frac{t}{\mathrm{C}^2} - \lambda\frac{\cos(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}^2} - \mu\frac{\sin(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}^2}\right) \langle \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D} \rangle + \nu$$

où ν est une constante (homogène à une longueur). On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} = {} & \left(\left(\frac{t}{\mathrm{C}^2} - \lambda\frac{\cos(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}^2} - \mu\frac{\sin(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}^2}\right) \langle \boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D} \rangle + \nu\right) \boldsymbol{C} \\
& + (\lambda\cos(\mathrm{C}t) + \mu\sin(\mathrm{C}t))\, \boldsymbol{D} \\
& + \left(\frac{1}{\mathrm{C}^2} + \lambda\frac{\sin(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}} - \mu\frac{\cos(\mathrm{C}t)}{\mathrm{C}}\right) \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

Notons (u_0, v_0, w_0) les composantes de la vitesse $\boldsymbol{V}$ en $t = 0$ dans la base ($\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}$). On a :

$$u_0 = -\frac{\lambda}{C^2} <\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D}> + \nu$$

$$v_0 = \lambda$$

$$w_0 = \frac{1}{C^2} - \frac{\mu}{C}$$

donc $\lambda = v_0$

$$\mu = \frac{1}{C} - Cw_0$$

$$\nu = u_0 + \frac{v_0}{C^2} <\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D}>$$

donc :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} = &\left(\frac{t}{C^2} - \frac{\sin(Ct)}{C^3} + v_0 \frac{1-\cos(Ct)}{C^2} + w_0 \frac{\sin(Ct)}{C}\right) <\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D}> \boldsymbol{C} + u_0\boldsymbol{C} \\ &+ \left(v_0 \cos(Ct) + \left(\frac{1}{C} - Cw_0\right) \sin(Ct)\right) \boldsymbol{D} \\ &+ \left(\frac{1-\cos(Ct)}{C^2} + v_0 \frac{\sin(Ct)}{C} + w_0 \cos(Ct)\right) \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}\end{aligned}$$

Dans les applications physiques, $\boldsymbol{V}$ étant la vitesse du point M, il suffit de prendre une primitive pour obtenir la position de M (en supposant que O est choisi de façon que M = O pour $t = 0$) :

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{OM} = &\left(\frac{t^2}{2C^2} - \frac{1-\cos(Ct)}{C^4} + v_0 \left(\frac{t}{C^2} - \frac{\sin(Ct)}{C^3}\right) + w_0 \frac{1-\cos(Ct)}{C^2}\right) <\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{D}> \boldsymbol{C} + u_0 t\, \boldsymbol{C} \\ &+ \left(v_0 \frac{\sin(Ct)}{C} + \left(\frac{1}{C} - Cw_0\right) \frac{1-\cos(Ct)}{C}\right) \boldsymbol{D} \\ &+ \left(\frac{t}{C^2} - \frac{\sin(Ct)}{C^3} + v_0 \frac{1-\cos(Ct)}{C^2} + w_0 \frac{\sin(Ct)}{C}\right) \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}\end{aligned}}$$

REMARQUE :

❑ Dans le cas limite où l'on fait tendre $\boldsymbol{D}$ vers 0 en gardant une direction fixe définie par un vecteur $\boldsymbol{u}$ unitaire, et où v_0 et w_0 tendent vers l'infini de façon que v_0D tende vers une quantité v_1, et w_0D tende vers w_1, la solution limite que l'on obtient pour $\boldsymbol{V}$ est :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} = &\left(v_1 \frac{1-\cos(Ct)}{C^2} + w_1 \frac{\sin(Ct)}{C}\right) <\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{u}> \boldsymbol{C} + u_0\boldsymbol{C} \\ &+ \left(v_1 \cos(Ct) - Cw_1 \sin(Ct)\right) \boldsymbol{u} \\ &+ \left(v_1 \frac{\sin(Ct)}{C} + w_1 \cos(Ct)\right) \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Si on pose $\boldsymbol{V}_0 = u_0\boldsymbol{C} + v_1\boldsymbol{u} + w_1\, \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{u}$, alors l'expression précédente n'est autre que :

$$\boldsymbol{V} = \cos(Ct)\boldsymbol{V}_0 + \frac{1-\cos(Ct)}{C^2} <\boldsymbol{C} \mid \boldsymbol{V}_0> \boldsymbol{C} + \frac{\sin(Ct)}{C} \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{V}_0$$

C'est la solution de l'équation différentielle $\dfrac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{V}$ que l'on a trouvée plus haut au moyen de l'exponentielle de l'endomorphisme $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{V}$, et où $\boldsymbol{V}$ s'obtient à partir de $\boldsymbol{V}_0$ par une rotation d'axe $\boldsymbol{C}$ et d'angle Ct.

2- Déviation vers l'est

On suppose la chute pas trop longue de façon à pouvoir supposer $\boldsymbol{g}$ constant. On rappelle qu'on prend ici $\boldsymbol{C} = -2\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{g}$. En supposant la vitesse initiale nulle, l'expression précédente se simplifie en :

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{OM} = &\left(\frac{t^2}{2\Omega^2} - \frac{1-\cos(2\Omega t)}{4\Omega^4}\right) < \boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{g} > \boldsymbol{\Omega} \\ &+ \frac{1-\cos(2\Omega t)}{4\Omega^2}\,\boldsymbol{g} \\ &+ \left(\frac{\sin(2\Omega t)}{4\Omega^3} - \frac{t}{2\Omega^2}\right) \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{g}\end{aligned}}$$

t étant supposé petit, un équivalent du terme $\dfrac{1-\cos(2\Omega t)}{4\Omega^2}\,\boldsymbol{g}$ est $\dfrac{t^2}{2}\,\boldsymbol{g}$. On reconnaît la chute libre usuelle.

Un équivalent de $\left(\dfrac{\sin(2\Omega t)}{4\Omega^3} - \dfrac{t}{2\Omega^2}\right) \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{g}$ est $-\dfrac{t^3}{3}\,\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{g}$. C'est la déviation vers l'est, négligeable devant le terme de la chute libre quand t tend vers 0.

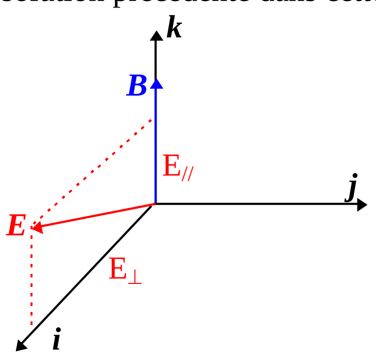
Un équivalent de $\left(\dfrac{t^2}{2\Omega^2} - \dfrac{1-\cos(2\Omega t)}{4\Omega^4}\right) < \boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{g} > \boldsymbol{\Omega}$ est $\dfrac{t^4}{6} < \boldsymbol{\Omega} \mid \boldsymbol{g} > \boldsymbol{\Omega}$. Sa projection sur le méridien donne une déviation supplémentaire vers l'équateur, négligeable devant la déviation vers l'est.

3- Particule dans un champ électromagnétique uniforme et constant

On prend maintenant $\boldsymbol{C} = -\dfrac{q}{m}\,\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D} = \dfrac{q}{m}\,\boldsymbol{E}$, d'où, en posant ici $\Omega = C = \dfrac{q\mathrm{B}}{m}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OM} = &\left(\frac{t^2}{2\Omega^2} - \frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega^4} + v_0\left(\frac{t}{\Omega^2} - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega^3}\right) + w_0\,\frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega^2}\right) \frac{q^3}{m^3} < \boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{B} > \boldsymbol{B} - \frac{u_0 t q}{m}\,\boldsymbol{B} \\ &+ \left(v_0\,\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} + \left(\frac{1}{\Omega} - \Omega w_0\right) \frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega}\right) \frac{q}{m}\,\boldsymbol{E} \\ &+ \left(\frac{t}{\Omega^2} - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega^3} + v_0\,\frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega^2} + w_0\,\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}\right) \frac{q^2}{m^2}\,\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B}\end{aligned}$$

Choisissons des axes de coordonnées de façon que $\boldsymbol{B} = \mathrm{B}\boldsymbol{k}$ et que $\boldsymbol{E} = \mathrm{E}_\perp\,\boldsymbol{i} + \mathrm{E}_{//}\,\boldsymbol{k}$, $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ étant une base orthonormée, et exprimons la solution précédente dans cette base.



La vitesse initiale vaut :

$$u_0\boldsymbol{C} + v_0\boldsymbol{D} + w_0\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D} = -\frac{u_0 q}{m}\boldsymbol{B} + \frac{v_0 q}{m}\boldsymbol{E} + \frac{w_0 q^2}{m^2}\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B}$$
$$= -\frac{u_0 q\mathrm{B}}{m}\boldsymbol{k} + \frac{v_0 q}{m}(\mathrm{E}_\perp \boldsymbol{i} + \mathrm{E}_{//}\boldsymbol{k}) - \frac{w_0 q^2 \mathrm{E}_\perp \mathrm{B}}{m^2}\boldsymbol{j}$$
$$= \frac{v_0 q\mathrm{E}_\perp}{m}\boldsymbol{i} - \frac{w_0 q^2\mathrm{E}_\perp\mathrm{B}}{m^2}\boldsymbol{j} + \left(\frac{v_0 q\mathrm{E}_{//}}{m} - \frac{u_0 q\mathrm{B}}{m}\right)\boldsymbol{k}$$

Notons ces composantes $\mathrm{V}_{0x}\,\boldsymbol{i} + \mathrm{V}_{0y}\,\boldsymbol{j} + \mathrm{V}_{0z}\,\boldsymbol{k}$, et rappelons que $\dfrac{q\mathrm{B}}{m} = \Omega$. Le lecteur pourra alors vérifier que, après quelques simplifications, la solution trouvée précédemment s'exprime sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{OM} = {} & \frac{t^2}{2}\frac{q\mathrm{E}_{//}}{m}\boldsymbol{k} \\ & + \mathrm{V}_{0z}t\,\boldsymbol{k} + \sin(\Omega t)\left(\frac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{j}\right) + \cos(\Omega t)\left(-\frac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{j}\right) + \frac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{j} \\ & + \frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega^2}\frac{q\mathrm{E}_\perp}{m}\boldsymbol{i} + \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t}{\Omega^2}\frac{q\mathrm{E}_\perp}{m}\boldsymbol{j}\end{aligned}}$$

Le mouvement général est la superposition de trois mouvements :

- $\dfrac{t^2}{2}\dfrac{q\mathrm{E}_{//}}{m}\boldsymbol{k}$ est un mouvement uniformément accéléré dû à la composante du champ électrique parallèle au champ magnétique.
- $\sin(\Omega t)\left(\dfrac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{j}\right) + \cos(\Omega t)\left(-\dfrac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{j}\right)$ est un mouvement de rotation uniforme dans le plan (O, ***i***, ***j***). En effet, les deux vecteurs $\dfrac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{j}$ et $-\dfrac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \dfrac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{j}$ sont orthogonaux et de même norme. Le rayon du cercle est la norme de ces deux vecteurs, à savoir le module de la composante de la vitesse initiale dans le plan (***i***, ***j***) divisée par Ω. Le terme supplémentaire $\dfrac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{i} - \dfrac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{j}$ donne la position du centre du cercle, et le terme $\mathrm{V}_{0z}t\,\boldsymbol{k}$ transforme le mouvement circulaire en mouvement hélicoïdal selon l'axe ***k***.
- $\dfrac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega^2}\dfrac{q\mathrm{E}_\perp}{m}\boldsymbol{i} + \dfrac{\sin(\Omega t) - \Omega t}{\Omega^2}\dfrac{q\mathrm{E}_\perp}{m}\boldsymbol{j}$ est le plus curieux. Il décrit une trajectoire selon une cycloïde (pour la définition d'une cycloïde, voir le chapitre L1/GEOMAFF.PDF ou L2/ARCPARAM.PDF), avec un déplacement global dans la direction – ***j***, orthogonal au champ électrique et au champ magnétique.

Plusieurs cas particuliers sont intéressants, qu'on obtiendra éventuellement par passage à la limite du cas général.

❑ ***E*** = 0. On obtient :

$$\boldsymbol{OM} = \mathrm{V}_{0z}t\,\boldsymbol{k} + \sin(\Omega t)\left(\frac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{j}\right) + \cos(\Omega t)\left(-\frac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{j}\right) + \frac{\mathrm{V}_{0y}}{\Omega}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{V}_{0x}}{\Omega}\boldsymbol{j}$$

qui est le seul mouvement hélicoïdal. Le mouvement est dû au seul champ magnétique. Les particules chargées en déplacement dans le champ ont des trajectoires qui s'enroulent autour des lignes de champ.

❑ $\boldsymbol{B}$ = 0. Faisons tendre Ω (qui est proportionnel au module de $\boldsymbol{B}$) vers 0 en prenant des développements limités du sinus et du cosinus. On obtient :

$$\boldsymbol{OM} = \frac{t^2}{2}\frac{qE_{//}}{m}\,\boldsymbol{k}$$
$$+ V_{0z}t\,\boldsymbol{k} + V_{0x}t\,\boldsymbol{i} + V_{0y}t\,\boldsymbol{j}$$
$$+ \frac{t^2}{2}\frac{qE_{\perp}}{m}\,\boldsymbol{i}$$

i.e. $\boldsymbol{OM} = t\,\boldsymbol{V}_0 + \frac{t^2}{2}\frac{q}{m}\,\boldsymbol{E}$. On retrouve le mouvement accéléré d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et constant.

❑ Le fonctionnement d'un oscilloscope est modélisé par l'existence d'un champ magnétique $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{k}$ et d'un champ électrique $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{k}$. $E_{\perp}$ est donc nul. Une particule chargée pénètre dans le champ au point O avec une vitesse initiale $\boldsymbol{V} = V_0\boldsymbol{i}$.

$$\boldsymbol{OM} = \frac{t^2}{2}\frac{qE}{m}\,\boldsymbol{k}$$
$$+ \sin(\Omega t)\,\frac{V_0}{\Omega}\,\boldsymbol{i} + \cos(\Omega t)\,\frac{V_0}{\Omega}\,\boldsymbol{j} - \frac{V_0}{\Omega}\,\boldsymbol{j}$$

On constate que la solution trouvée est la superposition des deux solutions obtenues en calculant séparément l'influence du champ magnétique et du champ électrique, à savoir :

une déviation verticale due au champ électrique : $z = \frac{qE}{2m}\,t^2$

une déviation horizontale due au champ magnétique. Soit $R = \frac{V_0}{\Omega}$. Si on se limite aux termes en t^2, cette déviation a pour composantes : $\left[\begin{array}{l} x = R\Omega t = V_0 t \\ y = -\frac{1}{2}R\Omega^2 t^2 = -\frac{1}{2}V_0\frac{Bq}{m}\,t^2 \end{array}\right.$

❑ Le mouvement cycloïdal est obtenu quand $E_{//} = 0$, et quand la particule est abandonnée sans vitesse initiale à l'origine.

$$\boldsymbol{OM} = \frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega^2}\frac{qE_{\perp}}{m}\,\boldsymbol{i} + \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t}{\Omega^2}\frac{qE_{\perp}}{m}\,\boldsymbol{j}$$

❑ Reprenons une fois encore le cas $E_{//} = 0$, mais cette fois avec une vitesse non nulle $\boldsymbol{V}_0$, perpendiculaire aux deux champs, donc de direction Oy et dont la composante V_0 selon $\boldsymbol{j}$ est précisément égale à $-\frac{E}{B} = -\frac{qE}{m\Omega}$. On obtient :

$$\boldsymbol{OM} = -t\,\frac{qE}{m\Omega}\,\boldsymbol{j} = t\,\boldsymbol{V}_0$$

Le mouvement est rectiligne selon Oy. La force exercée par le champ électrique équilibre parfaitement la force exercée par le champ magnétique. Un filtre placé sur cet axe permettra donc de sélectionner les particules animées précisément de la vitesse $-\frac{E}{B}$ selon l'axe Oy (filtre de Wien).

Annexe V : Un exemple d'équation non linéaire

Ces équations sont en général non résolubles. Nous nous contenterons d'étudier le cas des équations du type $x'' = f(x)$, intervenant par exemple en mécanique lorsqu'une force dérive d'un potentiel. Si on multiplie les deux membres par la dérivée x', on obtient :

$$x'x'' = x'f(x)$$

équation qui s'intègre sous la forme suivante, en notant g une primitive de f :

$$\frac{1}{2}x'^2 = g(x) + \mathrm{C}$$

C'est physiquement une variante du théorème de conservation de l'énergie mécanique, puisque, écrite sous la forme $\frac{1}{2}mx'^2 - mg(x) = \mathrm{C}$ ou encore $\frac{1}{2}m\mathrm{V}^2 + \mathrm{E}_p = \mathrm{C}$, on obtient à gauche la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. L'équation obtenue s'appelle **intégrale première**. On peut ensuite écrire, sur des intervalle où x' ne s'annule pas, que :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x' = \sqrt{2g(x) + 2\mathrm{C}} \text{ ou } x' = -\sqrt{2g(x) + 2\mathrm{C}}$$

Dans le premier cas, on en déduit que $t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2g(x) + 2\mathrm{C}}} = \Phi(x)$ d'où enfin $x = \Phi^{-1}(t)$. Les obstacles de calcul proviennent du fait, qu'en général, on ne connait pas de primitive de $\frac{1}{\sqrt{2g(x) + 2\mathrm{C}}}$ sous forme de fonction élémentaire, et que d'autre part, même si Φ est calculable, on ne sait pas toujours expliciter Φ^{-1}. Cependant, la démarche suivie permet souvent une étude qualitative du mouvement à défaut d'une expression explicite. En particulier, la représentation des courbes $\frac{1}{2}y^2 = g(x) + \mathrm{C}$ peut être d'un précieux secours.

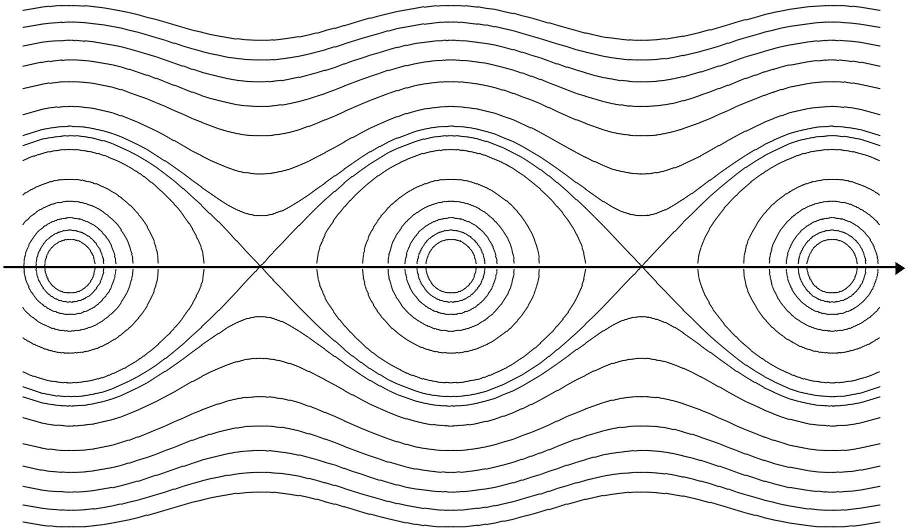
EXEMPLE :

❑ L'équation du pendule simple est $x'' + \sin(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x'x'' + x'\sin(x) = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}x'^2 - \cos(x) = \mathrm{C}$

On représente ci-dessous les courbes $\frac{1}{2}y^2 - \cos(x) = \mathrm{C}$.



En abscisse se trouve la position angulaire x du pendule et en ordonnée sa vitesse angulaire $y = x'$. Les courbes fermées correspondent au pendule oscillant. Ces courbes admettent une courbe limite, correspondant au pendule basculant de l'angle $-\pi$ à π (module 2π). Au-delà se trouvent les courbes décrivant le mouvement du pendule tournoyant.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Résoudre $(1 + t^2)x' = 1 + x^2$.

Exo.2) Résoudre l'équation différentielle $tx' - (1 + t^2)x + x^3 = 0$ en cherchant une solution particulière "évidente" $t \to x_0(t)$, puis en cherchant la solution générale x sous la forme $x = ux_0$, où u est une fonction auxiliaire.

Exo.3) Une goutte d'eau, tombant verticalement, est soumise à l'accélération de la pesanteur g et à une accélération due au frottement, proportionnelle au carré de sa vitesse V. On note a le coefficient de proportionnalité. A l'instant $t = 0$, la vitesse initiale de la goutte est nulle et sa position sert d'origine du repère.

a) Ecrire une équation différentielle vérifiée par V fonction du temps t, et la résoudre. Donner l'expression de la vitesse limite de V quand t tend vers l'infini.

b) Déterminer la hauteur z en fonction de t. Donner un développement limité de z au voisinage de $t = 0$ à l'ordre 2. Donner la limite de $z(t)$ quand a tend vers 0.

Exo.4) Soit k et C des constantes strictement positives, et σ un élément de]0, 1[. Résoudre le problème de Cauchy $\left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} = ky(C - y) \\ y(0) = \dfrac{\sigma C}{1 + \sigma} \end{array}\right.$. Quelle est la limite de y quand t tend vers $+\infty$?

L'équation différentielle proposée intervient dans deux modèles :

i) Etude de l'évolution d'une population modélisée par Verhulst. t est le temps, y l'effectif de la population. Une équation du type $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Cte} \times y$ conduisant à une croissance exponentielle, Verhulst proposa de remplacer la Cte par un coefficient qui décroît au fur et à mesure que la population croît. Le plus simple est de prendre une fonction affine $k(\mathrm{C} - y)$.
ii) Vitesse d'une réaction chimique $\mathrm{A} + \mathrm{X} \to \mathrm{B} + \mathrm{Y}$. y est la concentration [B] du corps B. $\mathrm{C} - y$ celle [A] du corps A. C = [A] + [B] mesure la concentration globale constante d'un corps simple se trouvant à la fois dans A et dans B et uniquement dans ceux-ci. Dans ce modèle, on suppose que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ est proportionnelle à la fois à [A] et à [B] et que les corps X et Y n'interviennent pas dans cette vitesse. D'où l'équation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$.

Exo.5) La résolution de l'équation différentielle $x' = f(x)$ donne lieu à une interprétation intéressante. Considérons un expérimentateur observant l'évolution d'un système en fonction du temps, l'état x du système vérifiant l'équation différentielle précédente. Il commence son observation à l'instant $t = 0$, l'état du système étant x_0. A un instant t_1, où le système est à l'état x_1, il se fait remplacer par un collègue à qui il demande de rester pendant une durée t_2 et de lui communiquer l'état x_2 du système à l'issue de cette durée. Or, la veille, ce collègue a justement réalisé une expérience analogue, mais en partant à l'instant $t = 0$ de l'état x_1. Il consulte ses résultats pour voir quelle était la valeur de x_2 au bout de la durée t_2 et il peut communiquer immédiatement le résultat. Il n'a pas besoin de connaître ni l'état initial x_0 ni la durée déjà écoulée t_1 de l'expérience pour répondre. En effet, notons $\varphi_t(a)$ l'état du système au bout d'une durée t en partant de l'état initial $x = a$ en $t = 0$. Le premier collègue souhaite connaître $\varphi_{t_1+t_2}(x_0)$ et a observé $x_1 = \varphi_{t_1}(x_0)$. Le second collègue a déjà observé $x_2 = \varphi_{t_2}(x_1)$. Il affirme que cette valeur de x_2 est bien le résultat attendu $\varphi_{t_1+t_2}(x_0)$. Autrement dit, il prétend que :

$$\varphi_{t_1+t_2}(x_0) = \varphi_{t_2}(x_1) = \varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(x_0))$$

ou encore :

$$\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1}$$

Déterminer φ_t et vérifier ce résultat dans les cas suivants :

a) $x' = 1$
b) $x' = x$
c) $x' = x^2$ pour $x > 0$.
d) $x' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.
e) cas général avec f continue quelconque, sur un intervalle où f ne s'annule pas.

Exo.6) a) On considère l'équation différentielle $x' = t - x^2$. Soit $t \to x(t)$ une de ses solutions et X une primitive de x. Soit $v = \exp(\mathrm{X})$. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre simple vérifiée par v. Comment retrouve-t-on x à partir de v ?

b) Déterminer les solutions v développables en série entière.

Exo.7) On considère l'équation différentielle $x' = \frac{2t}{x + t}$ où x est une fonction de t.

a) Chercher les solutions x fonctions linéaires de t.

b) Choisir un nouveau repère du plan (t, x) dont les axes sont les deux droites graphes des solutions trouvées en a). On notera T et X les nouvelles coordonnées d'un point (t, x) du plan.

Chercher dans ce nouveau repère les équations des courbes intégrales, en considérant X comme fonction de T.

Exo.8) Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} x' = x + 4y - t + 5 \\ y' = 3x + 2y - 3t + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + e^{2t} \\ y' = 3x - y - e^{2t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 2y + t \end{cases}$

Exo.9) Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 4y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 5z \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 2x + 3y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = -x - 3y \end{cases}$

Exo.10) Résoudre $\begin{cases} x' = \dfrac{t^2x}{t^3-1} - \dfrac{y}{t^3-1} + t \\ y' = -\dfrac{2tx}{t^3-1} + \dfrac{2t^2y}{t^3-1} + 1 \end{cases}$. On pourra résoudre le système sans second membre soit en trouvant des solutions évidentes, soit en cherchant des solutions dont chaque composante est un polynôme en t de degré 2 au plus.

Exo.11) a) Résoudre le système $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$ et le système légèrement modifié $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y + x^2 \end{cases}$. Tracer les courbes $t \to (x(t), y(t))$ dans chaque cas.

b) Même question avec les deux systèmes $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + x^2 \end{cases}$.

Exo.12) On considère la sphère unité S paramétrée par :

$$(\varphi, \lambda) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi] \to \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ \cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \mathrm{M}(\varphi, \lambda).$$

Sur la sphère terrestre, φ est la latitude, λ la longitude. En chaque point M de la sphère, hors les pôles, on associe la base du plan tangent, définie par $e_\varphi = \dfrac{\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi}}{\| \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \varphi} \|}$ et $e_\lambda = \dfrac{\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda}}{\| \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \lambda} \|}$. e_φ est tangent au méridien passant par M, et e_λ est tangent au parallèle.

a) Calculez ces deux vecteurs.

b) On considère en chaque point M de S un vecteur $Y(\varphi, \lambda)$ appartenant au plan tangent à S en M : $Y(\varphi, \lambda) = Y_\varphi e_\varphi + Y_\lambda e_\lambda$ où les composantes Y_φ et Y_λ sont fonctions de (φ, λ). L'application $(\varphi, \lambda) \to Y(\varphi, \lambda)$ est un champ de vecteurs tangents à S. Soit λ une longitude donnée. On considère le champ Y le long du méridien de longitude λ comme une fonction de φ uniquement : $\varphi \to Y(\varphi, \lambda)$. On dit que Y est **transporté parallèlement** le long de ce méridien si le projeté orthogonal de $\dfrac{\partial Y}{\partial \varphi}$ sur le plan tangent est nul en tout point du méridien. Exprimer cette condition sous la forme d'équations différentielles vérifiées par Y_φ et Y_λ et en déduire les expressions de Y_φ et Y_λ.

c) Même question en prenant une latitude φ donnée, et en cherchant les champs Y transportés parallèlement au parallèle de latitude φ. Connaissez-vous une expérience physique traduisant le résultat obtenu ?

Exo.13) Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{1-x^2}}$, où y est fonction de x.

Exo.14) Soit l'équation différentielle à coefficients variables $y'' + \tan(x)y' - \cos^2(x)y = 0$ sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, où y est fonction de x. Déterminer une fonction f telle que le changement de variable $x = f(t)$ transforme l'équation différentielle en une équation à coefficients constants, puis résoudre l'équation différentielle.

Exo.15) Résoudre les équations différentielles suivantes, x étant fonction de t. Dans certains cas où aucune méthode générale de résolution n'existe, on pourra chercher en premier lieu une solution évidente de l'équation avec ou sans second membre, ou bien chercher des solutions ayant des formes particulières (série entière, puissance de t, etc...). Si on a trouvé une solution particulière x, on pourra en chercher d'autres sous la forme xz où z est une fonction de t auxiliaire :

a) $t^2(\ln(t) - 1)x'' - tx' + x = 10$

b) $t^2x'' + 4tx' + 2x = \dfrac{1}{t}$

c) $(t - 1)x'' - tx' + x = 1$

d) $tx'' - (n + t)x' + nx = 0$, n étant un entier positif ou nul.

e) $tx'' + 2x' + \omega^2 tx = 0$ où ω un réel strictement positif.

Exo.16) Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sans second membre admettant t^2 et t^3 comme solution. Sur $\mathbb{R}$, y a-t-il d'autres solutions que les fonctions $t \to \lambda t^2 + \mu t^3$?

Exo.17) a) φ étant une fonction continue de la variable x, et $a < b$ deux réels donnés, résoudre par la méthode de variation des constantes l'équation différentielle suivante $f'' - f = \varphi$, $f(a) = f'(a) = 0$.

b) En déduire que, si une fonction de classe C^2 vérifie $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$, alors $f'' - f$ s'annule entre a et b.

Exo.18) On considère la fonction $t \to u(t)$ vérifiant l'**équation de Mathieu** suivante :

$$u''(t) + (1 - \cos(2t))\, u(t) = 0,\ u(0) = 1,\ u'(0) = 0$$

a) Sans résoudre cette équation différentielle, montrer que la solution u est paire.

b) Montrer que l'équation de Mathieu et ses conditions initiales sont équivalentes au fait que u est continue et vérifie :

$$u(x) = \cos(x) + \int_0^x \sin(x - t)\cos(2t)\, u(t)\, dt$$

c) On définit par récurrence la suite de fonctions :

$$g_0(x) = \cos(x)$$

$$g_n(x) = \int_0^x \sin(x - t)\cos(2t)\, g_{n-1}(t)\, dt \text{ pour } n \geq 1$$

Montrer que la série $\sum g_n$ est normalement convergente sur tout segment $[-a, a]$, $a > 0$ et que $\sum_{n=0}^{\infty} g_n = u$.

Exo.19) Déterminer f de classe C^1 telle que, pour tout x réel, $f'(x) + f(-x) = x^2$.

Exo.20) Trouver les fonctions f de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que : $\forall x, f'(x) = f(\frac{1}{x})$.

2- Solutions

Sol.1) C'est une équation différentielle non linéaire à variables séparables.

$$\frac{x'}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + t^2}$$

On prend une primitive de chaque membre :

$$\exists \text{ Cte}, \forall t \in \mathbb{R}, \arctan(x) = \arctan(t) + \text{Cte}$$

Sachant que arctan est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, nécessairement, Cte $\in\ ]-\pi, \pi[$ pour que les deux membres puissent prendre des valeurs communes. Plus précisément, en posant $k = \tan(\text{Cte})$ (éventuellement infini lorsque Cte $= \pm \pi/2$) :

<u>Si Cte > 0</u> :

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(t) + \text{Cte} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan(t) < \frac{\pi}{2} - \text{Cte}$$

$$\Leftrightarrow \quad t < \tan(\frac{\pi}{2} - \text{Cte}) = \frac{1}{k}$$

x est défini sur $]-\infty, \frac{1}{k}[$ et $x = \tan(\arctan(t) + \text{Cte}) = \frac{t + k}{1 - kt}$.

Pour Cte $= \frac{\pi}{2}$, on a le cas limite $k = \infty$ et $x = -\frac{1}{t}$ sur $]-\infty, 0[$.

<u>Si Cte = 0</u>, t décrit $\mathbb{R}$ et $x = t$.

<u>Si Cte < 0</u> :

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(t) + \text{Cte} < \frac{\pi}{2}$$

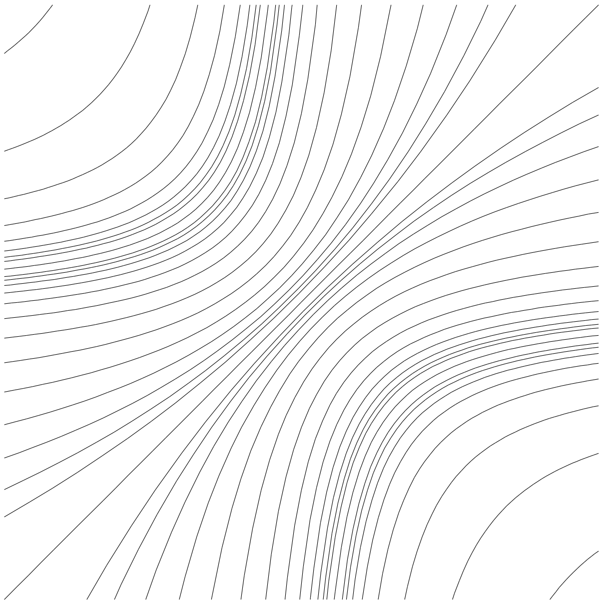
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} - \text{Cte} < \arctan(t)$$

$\Leftrightarrow \qquad t > \tan(-\dfrac{\pi}{2} - \text{Cte}) = \dfrac{1}{k}$

x est défini sur $]\dfrac{1}{k}, +\infty[$ et $x = \tan(\arctan(t) + \text{Cte}) = \dfrac{t+k}{1-kt}$.

Pour Cte $= -\dfrac{\pi}{2}$, on a le cas limite $k = \infty$ et $x = -\dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$.

Les courbes intégrales sont des branches d'hyperboles (et la droite limite $x = t$).



Sol.2) $x_0(t) = t$ est solution. On pose ensuite $x(t) = tu(t)$. On a $x' = u + tu'$. L'équation différentielle devient :

$$t^2u' - t^3(u - u^3) = 0$$

On résout pour $(t, u) \in\ ]0, +\infty[\ \times \mathbf{R}$ ou bien $]-\infty, 0[\ \times \mathbf{R}$ (on peut chercher ensuite, si on le souhaite, à prolonger les solutions obtenues à droite et à gauche de 0, et voir si le prolongement est C^1). Sur chacun de ces domaines, on a :

$$u' = tu(1 - u^2)$$

et le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Donc :

Si u s'annule en un point t_0, la fonction $u = 0$ est solution du problème de Cauchy correspondant, et c'est la seule.

Si u prend la valeur 1 en un point t_0, la fonction $u = 1$ est solution du problème de Cauchy correspondant, et c'est la seule.

Si u prend la valeur -1 en un point t_0, la fonction $u = -1$ est solution du problème de Cauchy correspondant, et c'est la seule.

Par conséquent, si u n'est pas identiquement égal à 0, 1 ou -1, alors u ne prend jamais ces valeurs, et on peut écrire :

$$\frac{u'}{u(1-u^2)} = t$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2(1-u)} - \frac{1}{2(1+u)}\right) u' = t$$

On prend une primitive de chaque membre :

$$\ln(|u|) - \frac{1}{2}\ln(|1-u|) - \frac{1}{2}\ln(|1+u|) = t + \text{Cte}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{|u|}{\sqrt{|1-u^2|}}\right) = \frac{t^2}{2} + \text{Cte}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|u|}{\sqrt{|1-u^2|}} = \exp\left(\frac{t^2}{2} + \text{Cte}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{|1-u^2|} = \exp(t^2 + 2\text{Cte})$$

Comme u est supposé ne prendre jamais les valeurs 1 ou – 1, on a ou bien $u^2 < 1$ ou bien $u^2 > 1$.

Si $u^2 < 1$:

$$\frac{u^2}{1-u^2} = \exp(t^2 + 2\text{Cte})$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 = \frac{\exp(t^2 + 2\text{Cte})}{1 + \exp(t^2 + 2\text{Cte})}$$

$$\Leftrightarrow \quad |u| = \frac{\exp\left(\frac{t^2}{2} + \text{Cte}\right)}{\sqrt{1 + \exp(t^2 + 2\text{Cte})}}$$

Comme u ne s'annule pas, u garde un signe constant, et on peut enlever la valeur absolue, au besoin en changeant le signe de e^{Cte} du numérateur. On trouve ainsi :

$$u = \frac{\lambda \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{1 + \lambda^2 \exp(t^2)}}$$

On retrouve la solution identiquement $u = 0$ en prenant $\lambda = 0$, la solution $u = 1$ comme cas limite quand λ tend vers $+\infty$, et la solution $u = -1$ comme cas limite quand λ tend vers $-\infty$. On fait donc varier λ dans $[-\infty, +\infty]$.

Si $u^2 > 1$:

$$\frac{u^2}{u^2 - 1} = \exp(t^2 + 2\text{Cte})$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2 = \frac{\exp(t^2 + 2\text{Cte})}{\exp(t^2 + 2\text{Cte}) - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad |u| = \frac{\exp\left(\frac{t^2}{2} + \text{Cte}\right)}{\sqrt{\exp(t^2 + 2\text{Cte}) - 1}}$$

Comme u ne s'annule pas, u garde un signe constant, et on peut enlever la valeur absolue, au besoin en changeant le signe de e^{Cte} du numérateur. On trouve ainsi :

$$u = \frac{\lambda \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 \exp(t^2) - 1}}$$

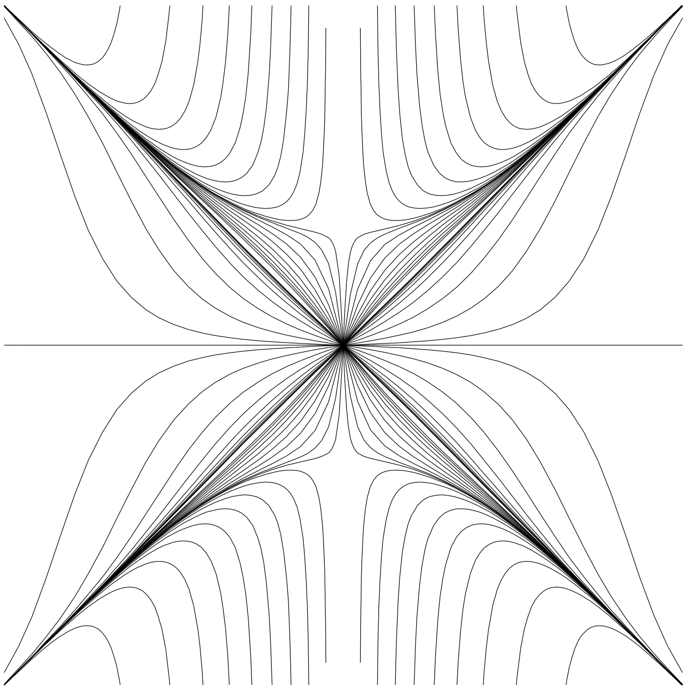
Comme précédemment, on retrouve la solution $u = 1$ comme cas limite quand λ tend vers $+\infty$, et la solution $u = -1$ comme cas limite quand λ tend vers $-\infty$.

Finalement, les solutions x de l'équation différentielle sont :

$$x = \frac{\lambda t \exp(\frac{t^2}{2})}{\sqrt{\lambda^2 \exp(t^2) + 1}} \quad \text{ou bien} \quad x = \frac{\lambda t \exp(\frac{t^2}{2})}{\sqrt{\lambda^2 \exp(t^2) - 1}}$$

avec $\lambda \in [-\infty, +\infty]$.

La deuxième solution est définie pour tout $t \in\ ]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$ si $|\lambda| \geq 1$. Sinon, on prendra $|t| > \sqrt{-2\ln(|\lambda|)}$.



Sol.3) a) On oriente l'axe des z vers le haut. La goutte tombe vers le bas. L'accélération de frottement est dirigée vers le haut.

$$\frac{dV}{dt} = -g + aV^2$$

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables. Initialement, V = 0 donc $-g + aV^2 < 0$. Cette quantité reste strictement négative, car, en raison du théorème de Cauchy-Lipschitz, s'il existait un instant t_0 tel que $-g + aV^2$ s'annule en t_0, alors la fonction constante $V = -\sqrt{\frac{g}{a}}$ ou $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}$ serait solution du problème de Cauchy correspondant, et cette solution n'est pas compatible avec la condition V(0) = 0. On peut donc écrire :

$$\frac{dV}{-g + aV^2} = dt$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{dV}{(\sqrt{g} - \sqrt{a}V)(\sqrt{g} + \sqrt{a}V)} = dt$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{dV}{\sqrt{g} + \sqrt{a}V} - \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{dV}{\sqrt{g} - \sqrt{a}V} = dt$$

donc, en prenant une primitive de chaque membre, et en tenant compte de la condition initiale V(0) = 0 :

$$-\frac{1}{2\sqrt{ag}}\ln\left(\frac{\sqrt{g}+\sqrt{a}\mathrm{V}}{\sqrt{g}-\sqrt{a}\mathrm{V}}\right) = t$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{g}+\sqrt{a}\mathrm{V}}{\sqrt{g}-\sqrt{a}\mathrm{V}} = \exp(-2t\sqrt{g})$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{V} = -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}\,\frac{1-\exp(-2t\sqrt{ag})}{1+\exp(-2t\sqrt{ag})} = -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{th}(t\sqrt{ag}) \qquad \text{où th est la tangente hyperbolique}$$

La vitesse limite de V est $-\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}$, ce qu'on déduit aussi directement de l'équation différentielle en posant $\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}t} = 0$ pour cette vitesse limite.

b) $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{th}(t\sqrt{ag})$, donc $z = -\frac{1}{a}\ln(\mathrm{ch}(t\sqrt{ag}))$, compte tenu du fait que $z(0) = 0$.

Au voisinage de $t = 0$:

$$z = -\frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{t^2ag}{2} + o(t^2)\right) = -\frac{1}{2}gt^2 + o(t^2)$$

et quand a tend vers 0, t étant fixé :

$$z = -\frac{1}{a}\ln\left(1 + \frac{t^2ag}{2} + o(a)\right) = -\frac{1}{2}gt^2 + o(a) \to -\frac{1}{2}gt^2$$

Ces deux derniers résultats correspondent à la chute libre, comme on pouvait s'y attendre.

Sol.4) L'équation différentielle est à variables séparables et vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. En vertu de ce théorème, si y s'annule en un point (respectivement prend la valeur C en un point), la seule solution est la fonction identiquement nulle (respectivement la fonction constante égale à C). Comme la valeur initiale $\frac{\sigma \mathrm{C}}{1+\sigma}$ appartient à]0, C[, on sait que la solution cherchée ne s'annule pas et ne prend jamais la valeur C, et donc que cette solution reste confinée dans l'intervalle]0, C[. On peut donc écrire :

$$1 = \frac{y'}{ky(\mathrm{C}-y)} = \frac{1}{\mathrm{C}k}\left(\frac{y'}{y} + \frac{y'}{\mathrm{C}-y}\right)$$

donc, en prenant une primitive de chaque membre vérifiant la condition initiale :

$$t = \frac{1}{k\mathrm{C}}\left(\ln(y) - \ln\left(\frac{\sigma\mathrm{C}}{1+\sigma}\right) - \ln(\mathrm{C}-y) + \ln\left(\frac{\mathrm{C}}{1+\sigma}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad k\mathrm{C}t = \ln\left(\frac{y}{\mathrm{C}-y}\right) - \ln(\sigma)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{y}{\mathrm{C}-y} = \sigma\exp(k\mathrm{C}t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad y = \frac{\sigma\mathrm{C}}{\sigma + \exp(-k\mathrm{C}t)} \text{ de limite C quand } t \text{ tend vers } +\infty.$$

Sol.5) a) $x = t + x_0 = \varphi_t(x_0)$. φ_t translate x_0 de la valeur t et on a bien $\varphi_{t_1+t_2} = \varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1}$.

b) $x = x_0e^t = \varphi_t(x_0)$. φ_t multiplie x_0 par e^t, et la multiplication par $\exp(t_1 + t_2)$ est bien équivalente à une multiplication par $\exp(t_1)$ suivie d'une multiplication par $\exp(t_2)$.

c) $\dfrac{x'}{x^2} = 1$ donc $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x_0} = t$ donc $x = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t} = \varphi_t(x_0)$ pour $t < \dfrac{1}{x_0}$

$$\varphi_{t_1+t_2}(x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0(t_1 + t_2)} \qquad \text{pour } t_1 + t_2 < \frac{1}{x_0}$$

alors que :

$$\varphi_{t_1}(x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t_1} = x_1 \qquad \text{pour } t_1 < \frac{1}{x_0}$$

$$\varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(x_0)) = \varphi_{t_2}(x_1) = \frac{x_1}{1 - x_1 t_2} \qquad \text{pour } t_2 < \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} - t_1$$

$$= \frac{x_0}{1 - x_0 t_1} \frac{1}{1 - \dfrac{x_0 t_2}{1 - x_0 t_1}}$$

$$= \frac{x_0}{1 - x_0(t_1 + t_2)} = \varphi_{t_1+t_2}(x_0)$$

d) $xx' = 1$ donc $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x_0^{\,2}}{2} = t$ donc $x = \sqrt{x_0^{\,2} + 2t} = \varphi_t(x_0)$ pour $t > -\dfrac{x_0^{\,2}}{2}$

$$\varphi_{t_1+t_2}(x_0) = \sqrt{x_0^{\,2} + 2(t_1 + t_2)} \qquad \text{pour } t_1 + t_2 > -\frac{x_0^{\,2}}{2}$$

alors que :

$$\varphi_{t_1}(x_0) = \sqrt{x_0^{\,2} + 2t_1} = x_1 \qquad \text{pour } t_1 > -\frac{x_0^{\,2}}{2}$$

$$\varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(x_0)) = \varphi_{t_2}(x_1) = \sqrt{x_1^{\,2} + 2t_2} \qquad \text{pour } t_2 > -\frac{x_1^{\,2}}{2} = -\frac{x_0^{\,2}}{2} - t_1$$

$$= \sqrt{x_0^{\,2} + 2t_1 + 2t_2} = \varphi_{t_1+t_2}(x_0)$$

e) Utilisant une primitive F particulière de $\dfrac{1}{f}$, nous avons vu dans le cours que F est bijective et que $t = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)$, donc :

$$\varphi_t(x_0) = x = \mathrm{F}^{-1}(t + \mathrm{F}(x_0))$$

$$\varphi_{t_1+t_2}(x_0) = \mathrm{F}^{-1}(t_1 + t_2 + \mathrm{F}(x_0))$$

alors que :

$$\varphi_{t_1}(x_0) = \mathrm{F}^{-1}(t_1 + \mathrm{F}(x_0)) = x_1$$

$$\varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(x_0)) = \varphi_{t_2}(x_1) = \mathrm{F}^{-1}(t_2 + \mathrm{F}(x_1)) = \mathrm{F}^{-1}(t_2 + t_1 + \mathrm{F}(x_0)) = \varphi_{t_1+t_2}(x_0)$$

Les propriétés précédentes sont fausses si l'équation différentielle dépend de t. Par exemple, pour $x' = tx$, on a $\varphi_t(x_0) = x_0 \exp(\dfrac{t^2}{2})$ et :

$$\varphi_{t_1+t_2}(x_0) = x_0 \exp(\frac{(t_1 + t_2)^2}{2})$$

alors que :

$$\varphi_{t_2}(\varphi_{t_1}(x_0)) = \varphi_{t_2}(x_0 \exp(\frac{t_1^{\,2}}{2})) = x_0 \exp(\frac{t_1^{\,2}}{2}) \exp(\frac{t_2^{\,2}}{2}) \neq x_0 \exp(\frac{(t_1 + t_2)^2}{2})$$

Sol.6) a) Si x est solution et si on pose $v = \exp(\mathrm{X})$, où X est une primitive de x, alors :

$$v' = xv \qquad \text{et} \qquad v'' = x'v + xv' = (t - x^2)v + x^2 v = tv$$

Réciproquement, si v est une solution strictement positive de l'équation différentielle $v'' = tv$ et si on pose $x = \dfrac{v'}{v}$, alors $x' = \dfrac{v''}{v} - \dfrac{v'^2}{v^2} = t - x^2$.

L'équation $v'' = tv$ s'appelle **équation d'Airy**.

b) On cherche les solutions $v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. La relation $v'' = tv$ donne :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n$$

donc $a_2 = 0$ et $\forall\, n > 0$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ ou encore $\forall\, n \geq 0$, $a_{n+3} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+3)}$. Donc, par récurrence :

$$\forall\, k,\ a_{3k+2} = 0$$

$$\forall\, k,\ a_{3k} = \frac{a_0}{(3k)(3k-1)(3k-3)(3k-4)...3.2}$$

et $$\forall\, k,\ a_{3k+1} = \frac{a_1}{(3k+1)(3k)(3k-2)(3k-3)...4.3}$$

où l'on convient que, pour $k = 0$, les produits vides au dénominateur valent 1.

Les valeurs de a_0 et a_1 étant arbitraires, l'espace vectoriel des solutions développables en série entière est de dimension 2. Il est donc égal à l'espace de toutes les solutions de l'équation différentielle $v'' = tv$.

On peut montrer qu'il est impossible d'exprimer les solutions de $x' = t - x^2$ ou de l'équation d'Airy sous forme de fonctions élémentaires[3]. Elles sont liées à une famille de fonctions appelées **fonctions de Bessel**.

Sol.7) a) On trouve $x = \alpha t$, avec α solution de $\alpha^2 + \alpha = 2$, soit $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$.

b) Les vecteurs du nouveau repère sont par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. La matrice de passage est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{X} \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'exprimer t et x en fonction de X et T. On a donc, X étant fonction de T :

$$t = \mathrm{T} + \mathrm{X} \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{dT}} = 1 + \mathrm{X'}$$

$$x = \mathrm{T} - 2\mathrm{X} \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dT}} = 1 - 2\mathrm{X'} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{dT}} = \frac{2t}{x+t}(1 + \mathrm{X'}) = \frac{2(\mathrm{T}+\mathrm{X})}{2\mathrm{T}-\mathrm{X}}\ (1 + \mathrm{X'})$$

donc :

$$(1 - 2\mathrm{X'})(2\mathrm{T} - \mathrm{X}) = 2(\mathrm{T} + \mathrm{X})(1 + \mathrm{X'})$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\mathrm{T} - \mathrm{X} - 4\mathrm{TX'} + 2\mathrm{XX'} = 2\mathrm{T} + 2\mathrm{X} + 2\mathrm{TX'} + 2\mathrm{XX'}$$

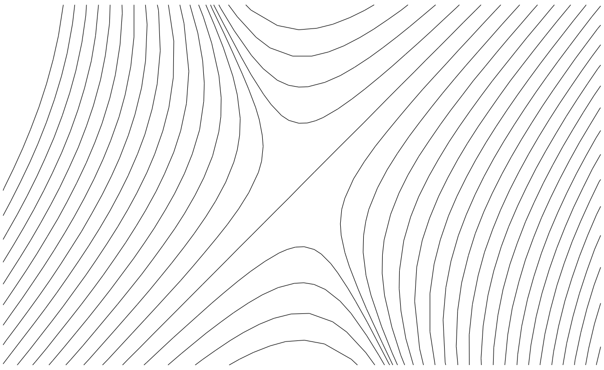
$$\Leftrightarrow \qquad 3\mathrm{X} + 6\mathrm{TX'} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mathrm{X'} = -\frac{\mathrm{X}}{2\mathrm{T}}.$$

[3] John H. Hubbard, Benjamin E. Lundell, *A first look at differential algebra*, 118:3, Amer. Math. Monthly, (mars 2011), 245-261.

On peut aussi obtenir cette équation à partir de : $(x + t)\mathrm{d}x - 2t\mathrm{d}t = 0$. On remplace, on simplifie, et on obtient $(2\mathrm{T} - \mathrm{X})(\mathrm{dT} - 2\mathrm{dX}) - 2(\mathrm{T} + \mathrm{X})(\mathrm{dT} + \mathrm{dX}) = 0 \Leftrightarrow -3\mathrm{XdT} - 6\mathrm{TdX} = 0$.

Les solutions de l'équation obtenue sont $\mathrm{X} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{|\mathrm{T}|}}$.



Les points où la tangente est verticale sont en fait des points limites, situés sur la droite $x = -t$ (ou $\mathrm{X} = 0$). Les courbes correspondantes, tracées ci-dessus d'un seul tenant, sont en fait constituées de deux composantes séparées par un tel point limite.

Sol.8) a) ❑ Equation sans second membre $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. A admet 5 comme valeur propre avec par exemple le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et -2 comme valeur propre avec le vecteur propre $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Si $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$ avec $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$. On résout $\left[\begin{array}{l} u' = 5u \\ v' = -2v \end{array}\right.$, ce qui donne $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \lambda e^{5t} \\ \mu e^{-2t} \end{pmatrix}$. D'où :

$$\left[\begin{array}{l} x = \lambda e^{5t} + 4\mu e^{-2t} \\ y = \lambda e^{5t} - 3\mu e^{-2t} \end{array}\right.$$

ou encore $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 4e^{-2t} \\ e^{5t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.

❑ Equation avec second membre par la méthode de variation des constantes. On cherche une solution particulière sous la forme $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 4e^{-2t} \\ e^{5t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ mais avec $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ fonction de t, ce qui conduit à résoudre :

$$\begin{pmatrix} e^{5t} & 4e^{-2t} \\ e^{5t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t + 5 \\ -3t + 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda' = \left(-\dfrac{15t}{7} + \dfrac{23}{7}\right)e^{-5t} \\ \mu' = \left(\dfrac{2t}{7} + \dfrac{3}{7}\right)e^{2t} \end{array}\right.$$

d'où par exemple $\left[\begin{array}{l} \lambda = \left(\dfrac{3t}{7} - \dfrac{4}{7}\right)e^{-5t} \\ \mu = \left(\dfrac{t}{7} + \dfrac{1}{7}\right)e^{2t} \end{array}\right.$ (en intégrant par parties)

donc $x = t$ et $y = -1$.

La solution solution complète est :

$$\begin{cases} x = \lambda e^{5t} + 4\mu e^{-2t} + t \\ y = \lambda e^{5t} - 3\mu e^{-2t} - 1 \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

❑ On aurait pu aussi procéder comme suit pour la recherche d'une solution particulière. Compte tenu que le second membre est formé de polynômes de degré 1, on peut tenter de chercher une solution particulière sous la forme $\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \end{cases}$, ce qui conduit au système :

$$\forall t, \begin{cases} a = (a + 4c - 1)t + b + 4d + 5 \\ c = (3a + 2c - 3)t + 3b + 2d + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 4c = 1 \\ a - b - 4d = 5 \\ 3a + 2c = 3 \\ 3b - c + 2d = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

et l'on retrouve la solution particulière $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases}$.

b) ❑ Equation sans second membre : On cherche à diagonaliser la matrice A = $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. On trouve que 2 est valeur propre double avec une seule droite de vecteurs propres, à savoir par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable. Prenons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et e_2 indépendant de e_1, par exemple $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $Ae_1 = 2e_1$ et $Ae_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -3e_1 + 2e_2$. La matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2) et P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice triangulaire qu'on obtient est T = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si on pose X = PY avec Y = $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, on a Y' = TY donc :

$$\begin{cases} u' = 2u - 3v \\ v' = 2v \end{cases}$$

donc la deuxième équation différentielle donne $v = \mu e^{2t}$, expression qu'on injecte dans la première équation différentielle. On obtient, après quelques calculs, $u = \lambda e^{2t} - 3t\mu e^{2t}$ donc :

$$\begin{cases} x = \lambda e^{2t} - 3t\mu e^{2t} \\ y = \lambda e^{2t} + \mu(1 - 3t)e^{2t} \end{cases}$$

ou encore X = $\begin{pmatrix} e^{2t} & -3te^{2t} \\ e^{2t} & (1-3t)e^{2t} \end{pmatrix}$.

❑ La méthode de variation des constantes donne, après simplification par e^{2t} :

$$\begin{cases} \lambda' - 3t\mu' = 1 \\ \lambda' + (1 - 3t)\mu' = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = 1 - 6t \\ \mu' = -2 \end{cases}$$

d'où, par exemple $\begin{cases} \lambda = t - 3t^2 \\ \mu = -2t \end{cases}$, d'où la solution particulière :

$$\begin{cases} x = (t + 3t^2)e^{2t} \\ y = (3t^2 - t)e^{2t} \end{cases}$$

La solution complète est $\begin{cases} x = \lambda e^{2t} - 3t\mu e^{2t} + (t + 3t^2)e^{2t} \\ y = \lambda e^{2t} + \mu(1 - 3t)e^{2t} + (3t^2 - t)e^{2t} \end{cases}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$

c) ❑ On peut calculer x'' :
$x'' = 2x' + y' = 2x' - 2x$ et réciproquement, l'équation $x'' = 2x' - 2x$ avec la condition $y = x' - 2x$ redonne le système. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$ donc $r = 1 \pm i$, donc les solutions à valeurs complexes sont :

$$x = e^t(\lambda e^{it} + \mu e^{-it})$$
$$y = e^t(-\lambda e^{it} - \mu e^{-it} + i\lambda e^{it} - i\mu e^{-it})$$

On trouvera les solutions réelles en prenant λ et μ conjugués. Ce qui donne, en prenant $\lambda = \dfrac{\alpha + i\beta}{2}$ et donc $\mu = \dfrac{\alpha - i\beta}{2}$, α et β étant réels :

$$x = e^t(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t))$$
$$y = e^t(-\alpha\cos(t) + \beta\sin(t) - \alpha\sin(t) - \beta\cos(t))$$

❑ On peut aussi diagonaliser la matrice A du système. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 2X + 2$. Les valeurs propres sont $1 + i$, avec par exemple pour vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 + i \\ -2 \end{pmatrix}$, et $1 - i$ associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 - i \\ -2 \end{pmatrix}$. La matrice diagonale D est $\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ et la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Les solutions $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ du système $Y' = DY$ sont $\begin{cases} u = \lambda e^{(1+i)t} \\ v = \mu e^{(1-i)t} \end{cases}$,donc celles du système initial, obtenues au moyen de $X = PY$, sont :

$$\begin{cases} x = \lambda(1 + i)e^{(1+i)t} + \mu(1 - i)e^{(1-i)t} \\ y = -2\lambda e^{(1+i)t} - 2\mu e^{(1-i)t} \end{cases}, \lambda \text{ et } \mu \text{ complexes}$$

On obtient les solutions réelles en prenant λ et μ conjugués l'un de l'autre. Si $\lambda = \gamma + i\delta$, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 2\,\mathrm{Re}((\gamma + i\delta)(1 + i)e^{(1+i)t}) \\ &= 2e^t\,\mathrm{Re}((\gamma + i\delta)(1 + i)(\cos(t) + i\sin(t))) \\ &= 2e^t\,\mathrm{Re}((\gamma + i\delta)(\cos(t) - \sin(t) + i(\sin(t) + \cos(t))) \\ &= 2e^t\,(\gamma(\cos(t) - \sin(t)) - \delta(\sin(t) + \cos(t))) \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} y &= 2\,\mathrm{Re}(-2(\gamma + i\delta)e^{(1+it)}) \\ &= -4e^t\,\mathrm{Re}((\gamma + i\delta)(\cos(t) + i\sin(t))) \\ &= -4e^t\,(\gamma\cos(t) - \delta\sin(t)) \end{aligned}$$

On retrouve les solutions précédemment trouvées en remplaçant γ par $\dfrac{\alpha + \beta}{4}$ et δ par $\dfrac{\beta - \alpha}{4}$.

d) ❑ Equation homogène. On diagonalise $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $2 + i$ avec par exemple le vecteur propre $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, et $2 - i$ avec le vecteur propre $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Les solutions sont donc :

$$X = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{(2+i)t} \\ \mu e^{(2-i)t} \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = -i\lambda e^{(2+i)t} + i\mu e^{(2-i)t} \\ y = \lambda e^{(2+i)t} + \mu e^{(2-i)t} \end{cases}$$

Si on veut les solutions réelles, on prendra λ et μ complexes conjugués, ce qui donnera, avec $\lambda = \dfrac{\alpha + i\beta}{2}$ et $\mu = \dfrac{\alpha - i\beta}{2}$, avec α et β réels :

$$\begin{cases} x = e^{2t}(\beta\cos(t) + \alpha\sin(t)) \\ y = e^{2t}(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)) \end{cases}$$

❑ On peut tenter de chercher une solution particulière sous la forme suivante :

$$\forall\, t, \begin{cases} x = at + b \\ y = x' - 2x = -2at - 2b + a \\ t = y' + x - 2y = 5at + 5b - 4a \end{cases}$$

donc $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = \dfrac{4}{25}$ d'où $\begin{cases} x = \dfrac{t}{5} + \dfrac{4}{25} \\ y = -\dfrac{2t}{5} - \dfrac{3}{25} \end{cases}$.

❑ On peut aussi utiliser la méthode de variation des constantes, qui donne :

$$\begin{cases} \beta'\cos(t) + \alpha'\sin(t) = 0 \\ \alpha'\cos(t) - \beta'\sin(t) = te^{-2t} \end{cases}$$

donc $\begin{cases} \alpha' = te^{-2t}\cos(t) \\ \beta' = -te^{-2t}\sin(t) \end{cases}$

ce qui conduit au résultat en intégrant par parties mais plus longuement.

La solution générale est $\begin{cases} x = e^{2t}(\beta\cos(t) + \alpha\sin(t)) + \dfrac{t}{5} + \dfrac{4}{25} \\ y = e^{2t}(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)) - \dfrac{2t}{5} - \dfrac{3}{25} \end{cases}$

Sol.9) a) On diagonalise la matrice A = $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. On trouve par exemple comme matrice de passage P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et comme matrice diagonale D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dans la nouvelle base, la solution Y = $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ du système différentiel Y' = DY est $\begin{cases} u = \lambda e^{t} \\ v = \mu e^{2t} \\ w = \nu e^{3t} \end{cases}$. La solution X = PY du système initial donne :

$$\begin{cases} x = \lambda e^{t} + \mu e^{2t} + \nu e^{3t} \\ y = 2\lambda e^{t} + \mu e^{2t} + 2\nu e^{3t} \\ z = \lambda e^{t} + 2\nu e^{3t} \end{cases}$$

b) Soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice du système. A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec, par exemple, les vecteurs propres suivants :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de valeur propre 2

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$ de valeur propre $1 + i$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$ de valeur propre $1 - i$

La matrice de passage est P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$ et la matrice diagonale est D = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$. La solution Y = $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ du système différentiel Y' = DY est $\begin{cases} u = \lambda e^{2t} \\ v = \mu e^{(1+i)t} \\ w = \nu e^{(1-i)t} \end{cases}$ .avec λ, μ et ν complexes. La solution à valeurs complexes du système initial est X = PY, ce qui donne :

$$\begin{cases} x = \lambda e^{2t} + e^t(\mu e^{it} + \nu e^{-it}) \\ y = \lambda e^{2t} + ie^t(\mu e^{it} - \nu e^{-it}) \\ z = \lambda e^{2t} - ie^t(\mu e^{it} - \nu e^{-it}) \end{cases}$$

On trouvera les solutions réelles en prenant μ et ν conjugués, ce qui donne, en prenant $\mu = \dfrac{\alpha + i\beta}{2}$ et $\nu = \dfrac{\alpha - i\beta}{2}$, α et β étant réels :

$$\begin{cases} x = \lambda e^{2t} + e^t(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)) \\ y = \lambda e^{2t} - e^t(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)) \\ z = \lambda e^{2t} + e^t(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)) \end{cases}$$

c) La matrice du système A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. La valeur propre 2 admet pour vecteur propre $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, la valeur propre 1 est double mais admet seulement une droite de vecteurs propres engendrée par $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Prenons $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\text{A}e_1 = 2e_1$$
$$\text{A}e_2 = e_2$$
$$\text{A}e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2 + e_3.$$

La matrice de passage est P = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice triangulaire est T = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le nouveau système est alors :

$$\begin{cases} u' = 2u + w \\ v' = v - 2w \\ w' = w \end{cases}$$

Donc $w = \gamma e^t$ puis (après quelques calculs), $v = \beta e^t - 2\gamma t e^t$, et $u = \alpha e^{2t} - \gamma e^t$. La solution du système initial s'obtient en appliquant P à $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$\left[\begin{array}{l} x = 3\alpha e^{2t} + (\beta - 3\gamma)e^t - 2\gamma t e^t \\ y = \alpha e^{2t} - \gamma e^t \\ z = -3\alpha e^{2t} + (4\gamma - \beta)e^t + 2\gamma t e^t \end{array}\right.$$

Sol.10) Système homogène : les solutions sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Solution particulière par la méthode de variation des constantes : on résout le système en prenant λ et μ fonctions de t, ce qui conduit à $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc par exemple $\lambda = t$ et $\mu = 0$ et comme solution particulière $\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$.

Les solutions générales du système complet sont :

$$\left[\begin{array}{l} x = \lambda t + \mu + t^2 \\ y = \lambda + \mu t^2 + t \end{array}\right., \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

Sol.11) a) Dans le premier cas, $x = \lambda e^t$ et $y = \mu e^{2t}$. Pour $\lambda \neq 0$, si on pose $k = \dfrac{\mu}{\lambda^2}$, on obtient $y = kx^2$, x du signe de λ. Les courbes $t \to (x(t), y(t))$ sont :

des demi-paraboles admettant le point limite (0, 0), (pour $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$)

ce point limite lui-même (pour $\lambda = \mu = 0$),

les deux demi-droites $x = 0$ de point limite (0, 0) (pour $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$),

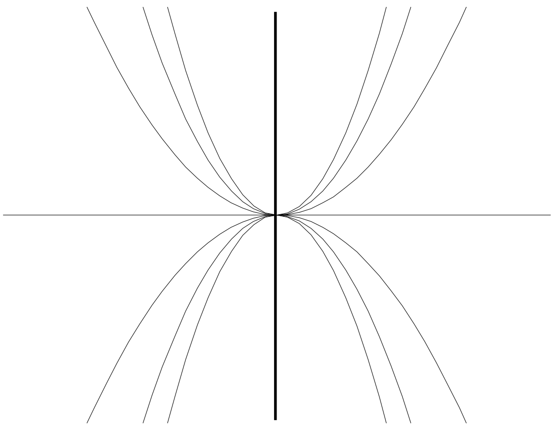
les deux demi-droites $y = 0$ de point limite (0, 0) (pour $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$).

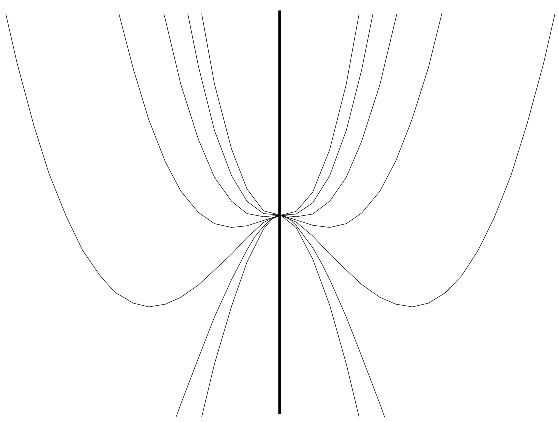
Dans le second cas, $x = \lambda e^t$ puis $y' = 2y + \lambda^2 e^{2t}$ donc $y = \mu e^{2t} + \lambda^2 t e^{2t}$. Donc, pour $\lambda \neq 0$, x étant du signe de λ :

$$y = \frac{\mu x^2}{\lambda^2} + x^2 \ln\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \left(\frac{\mu}{\lambda^2} - \ln(|\lambda|)\right)x^2 + x^2\ln(|x|)$$

de la forme $y = kx^2 + x^2\ln(|x|)$.

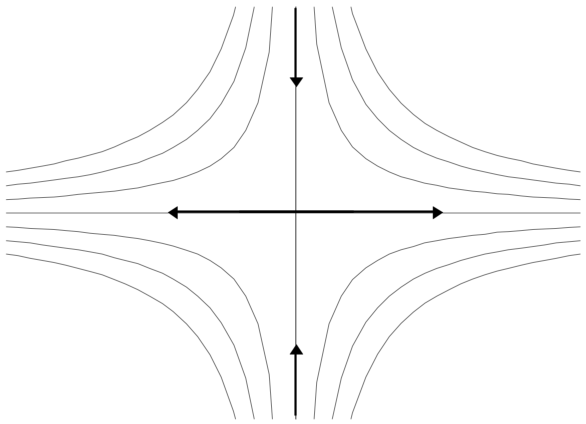
On parcourt les courbes en s'éloignant de l'origine, qualifié de **point répulsif**.

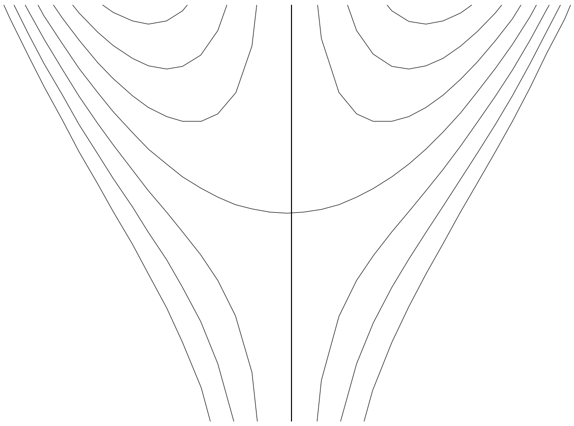




b) Dans le premier cas, $x = \lambda e^t$ et $y = \mu e^{-t}$, de la forme $y = \dfrac{k}{x}$ avec $k = \lambda\mu$ si $\lambda \neq 0$. Dans le second cas, $x = \lambda e^t$ et $y = \mu e^{-t} + \dfrac{\lambda^2}{3} e^{2t}$, de la forme $y = \dfrac{k}{x} + \dfrac{x^2}{3}$ si $\lambda \neq 0$.

L'origine O est un point dit **hyperbolique**, attractif suivant Oy, répulsif suivant Ox.





Sol.12) a) $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\lambda) \\ -\sin(\varphi)\sin(\lambda) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, $e_\lambda = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$. On note que $\dfrac{\partial e_\lambda}{\partial\varphi} = 0$.

b) $\dfrac{\partial Y}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial Y_\varphi}{\partial\varphi} e_\varphi + \dfrac{\partial Y_\lambda}{\partial\varphi} e_\lambda + Y_\varphi \dfrac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi}$, mais $\dfrac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ -\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan tangent, donc le projeté est $\dfrac{\partial Y_\varphi}{\partial\varphi} e_\varphi + \dfrac{\partial Y_\lambda}{\partial\varphi} e_\lambda$ supposé nul, donc Y_φ et Y_λ ne sont fonctions que de la longitude λ. Lorsqu'on se déplace le long d'un méridien, Y est transporté parallèlement si et seulement si Y_φ et Y_λ gardent des valeurs constantes.

c) $\dfrac{\partial Y}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial Y_\varphi}{\partial\lambda} e_\varphi + \dfrac{\partial Y_\lambda}{\partial\lambda} e_\lambda + Y_\varphi \dfrac{\partial e_\varphi}{\partial\lambda} + Y_\lambda \dfrac{\partial e_\lambda}{\partial\lambda}$, avec $\dfrac{\partial e_\varphi}{\partial\lambda} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\sin(\lambda) \\ -\sin(\varphi)\cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial e_\lambda}{\partial\lambda} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}$. Sachant que le projeté orthogonal d'un vecteur v sur le plan engendré par la base orthonormée (e_φ, e_λ) est $\langle v, e_\varphi\rangle e_\varphi + \langle v, e_\lambda\rangle e_\lambda$ (revoir au besoin le chapitre L1/ESPEUCL.PDF), le projeté de $\dfrac{\partial Y}{\partial\lambda}$ sur le plan tangent est :

$$\frac{\partial Y_\varphi}{\partial\lambda} e_\varphi + \frac{\partial Y_\lambda}{\partial\lambda} e_\lambda - Y_\varphi \sin(\varphi)\, e_\lambda + Y_\lambda \sin(\varphi)\, e_\varphi$$

donc $$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial Y_\varphi}{\partial\lambda} + Y_\lambda \sin(\varphi) = 0 \\ \dfrac{\partial Y_\lambda}{\partial\lambda} - Y_\varphi \sin(\varphi) = 0 \end{array}\right.$$

Pour $\varphi = 0$, Y_λ et Y_φ sont des fonctions ne dépendant pas de λ. Lorsqu'on se déplace le long de l'équateur, Y est transporté parallèlement si et seulement si Y_φ et Y_λ gardent des valeurs constantes.

Pour $\varphi \neq 0$, en dérivant la deuxième équation par rapport à λ et en y reportant la valeur de $\dfrac{\partial Y_\varphi}{\partial\lambda}$ de la première équation, on obtient :

$$\frac{\partial^2 Y_\lambda}{\partial\lambda^2} + \sin^2(\varphi)Y_\lambda = 0$$

et Y_λ est nécessairement de la forme $A\cos(\lambda\sin(\varphi) + B)$. On a alors, à partir de la deuxième équation, $Y_\varphi = - A\sin(\lambda\sin(\varphi) + B)$. Réciproquement, on vérifie que ces expressions sont solutions. Finalement :

$$Y = A\cos(\lambda\sin(\varphi) + B)e_\lambda - A\sin(\lambda\sin(\varphi) + B)e_\varphi$$

Relativement à la base locale, lorsqu'on transporte Y parallèlement au parallèle φ, par exemple avec une vitesse constante (de sorte que λ peut représenter une mesure du temps), Y tourne à la vitesse angulaire $- \sin(\varphi)$.
Une expérience physique relevant de cette situation est celle du pendule de Foucault, traité en annexe II. Ainsi, le pendule est transporté parallèlement le long d'un parallèle lors d'une rotation de la Terre.
Une autre expérience plus imaginaire consiste à prendre une voiture surmontée d'une girouette d'axe vertical, sans aucun frottement sur son axe, et en absence totale de vent. La voiture se déplaçant le long d'un parallèle autre que l'équateur, la girouette tournera par rapport à la voiture. On réalisera d'autant mieux ce phénomène que le parallèle est proche d'un pôle.

Sol.13) ❑ L'équation différentielle sans second membre est à coefficients constant. Son équation caractéristique étant $r^2 + 6r + 9 = 0$ et ayant -3 pour racine double, elle possède pour solutions les fonctions $x \to \lambda e^{-3x} + \mu x e^{-3x}$.
❑ On peut tenter sa chance en cherchant une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y = ze^{-3x}$, où z est une fonction auxiliaire :

$$y = ze^{-3x}$$
$$y' = z'e^{-3x} - 3ze^{-3x}$$
$$y'' = z''e^{-3x} - 6z'e^{-3x} + 9ze^{-3x}$$
$$y'' + 6y' + 9y = z''e^{-3x} = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Donc $z'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc, par exemple, $z' = \arcsin(x)$ donc :

$$z = \int \arcsin(x)\,dx$$
$$= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{en intégrant par parties}$$
$$= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \qquad \text{en prenant par exemple la constante d'intégration nulle}$$

Finalement, les solutions de l'équation complète sont :

$$y = \lambda e^{-3x} + \mu x e^{-3x} + (x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2})\,e^{-3x}$$

❑ On peut aussi appliquer la méthode de variation des constantes, comme suit. Les solutions de l'équation homogène vérifiant $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} e^{-3x} \\ -3e^{-3x} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} xe^{-3x} \\ e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{pmatrix}$, on cherche une solution particulière avec second membre sous cette forme, mais avec λ et μ fonctions de x, ce qui conduit au système :

$$\left[\begin{array}{l} e^{-3x}\lambda' + xe^{-3x}\mu' = 0 \\ -3e^{-3x}\lambda' + (e^{-3x} - 3xe^{-3x})\mu' = \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda' + x\mu' = 0 \\ -3\lambda' + (1-3x)\mu' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \mu' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

d'où par exemple, $\lambda = \sqrt{1-x^2}$ et $\mu = \arcsin(x)$. On retrouve la solution particulière trouvée précédemment.

Sol.14) Notons $\dot{y}$ la dérivée de la fonction composée $t \to x = f(t) \to y(x)$.

$$\dot{y} = y' f'$$

$$\ddot{y} = y'' f'^2 + y' f''$$

On souhaite qu'il existe α, β, γ constants et un facteur de proportionnalité K (pouvant dépendre de x) tels que :

$$\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = \mathrm{K}(y'' + y'\tan(x) - y\cos^2(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha f'^2 y'' + (\alpha f'' + \beta f')y' + \gamma y = \mathrm{K}(y'' + y'\tan(x) - y\cos^2(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha f'^2 = \mathrm{K} \\ \alpha f'' + \beta f' = \mathrm{K}\tan(x) \\ \gamma = -\mathrm{K}\cos^2(x) \end{cases}$$

On peut supposer $\gamma = -1$, donc $\mathrm{K} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, $\alpha f'(t)^2 = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et donc $\alpha > 0$, et par exemple, en supposant f strictement croissante, $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\cos(x)}$. On a alors :

$$f''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{\alpha}\cos(x)} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\alpha}\cos^2(x)} f'(t) = \frac{\sin(x)}{\alpha\cos^3(x)}$$

La deuxième équation $\alpha f'' + \beta f' = \mathrm{K}\tan(x)$ devient $\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)} + \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$, d'où $\beta = 0$. α reste indéterminé et on peut choisir $\alpha = 1$. On a alors $f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\cos(x)}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$, $t = \sin(x)$ (en choisissant une constante d'intégration nulle) et $x = f(t) = \arcsin(t)$.

L'équation différentielle transformée est $\ddot{y} - y = 0$, de solution $y = \lambda e^t + \mu e^{-t}$. Les solutions de l'équation différentielle initiale sont $y = \lambda\exp(\sin(x)) + \mu\exp(-\sin(x))$.

Sol.15) a) On résout sur $]0, e[$ ou $]e, +\infty[$, intervalles où le coefficient de x'' ne s'annule pas. $x = 10$ est solution particulière de l'équation complète. $x = t$ est solution évidente de l'équation sans second membre. Cherchons toutes les solutions de l'équation sans second membre sous la forme $x = tz$, où z est une fonction de t auxiliaire :

$$x' = z + tz'$$

$$x'' = 2z' + tz''$$

$$\Rightarrow \quad t^3(\ln(t) - 1)z'' + t^2(2\ln(t) - 3)z' = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en z'. La solution z' est de la forme $\lambda\exp(F(t))$ où F est une primitive de $t \to -\dfrac{2\ln(t)-3}{t(\ln(t)-1)}$:

$$F(t) = -\int \frac{2\ln(t)-3}{t(\ln(t)-1)}\,dt = -\int \frac{2u-3}{u-1}\,du \text{ avec le changement de variable } u = \ln(t)$$

$$= -\int 2 - \frac{1}{u-1}\,du$$

$$= -2u + \ln(u-1) \ (+ \text{Cte})$$

$\Rightarrow \quad \exists\, \lambda,\ z' = \lambda e^{-2u}(u-1) = \lambda \dfrac{\ln(t)-1}{t^2}$

$\Rightarrow \quad z = \lambda \displaystyle\int \frac{\ln(t)-1}{t^2}\,dt = -\lambda \frac{\ln(t)-1}{t} + \lambda \int \frac{1}{t^2}\,dt$ en intégrant par parties

$\quad = -\lambda \dfrac{\ln(t)}{t} + \mu$ ou bien $\lambda \dfrac{\ln(t)}{t} + \mu$ en renommant λ en $-\lambda$

$\Rightarrow \quad x = \lambda\ln(t) + \mu t$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est finalement :

$$x = 10 + \lambda\ln(t) + \mu t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

b) On résout sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, intervalles où le coefficient de x'' ne s'annule pas. On cherche des solutions de l'équation homogène sous la forme $x = t^r$. r vérifie alors :

$r(r-1) + 4r + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad r = -1$ ou -2.

On obtient donc les solutions $x = \dfrac{1}{t}$ ou $\dfrac{1}{t^2}$. L'espace des solutions de l'équation sans second membre étant un espace de dimension 2, ces solutions sont $\dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{\mu}{t^2}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

La méthode de variation des constantes consiste à chercher une solution de l'équation avec second membre sous la forme $x = \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{\mu}{t^2}$, avec λ et μ fonctions de t vérifiant de plus la relation $\dfrac{\lambda'}{t} + \dfrac{\mu'}{t^2} = 0$, de façon que $x' = -\dfrac{\lambda}{t^2} - \dfrac{2\mu}{t^3}$. L'équation différentielle donne alors la deuxième relation $-\lambda' - \dfrac{2\mu'}{t} = \dfrac{1}{t}$.

La résolution du système linéaire des deux équations aux deux inconnues λ' et μ' donne :

$$\left[\begin{array}{l} \lambda' = \dfrac{1}{t} \\ \mu' = -1 \end{array}\right.$$

donc, par exemple $\lambda = \ln(|t|)$ et $\mu = -t$. Une solution particulière de l'équation avec second membre est $\dfrac{\ln|t|}{t} - \dfrac{1}{t}$, et la solution générale de l'équation avec second membre est :

$$x = \frac{\lambda}{t} + \frac{\mu}{t^2} + \frac{\ln|t|}{t} - \frac{1}{t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

c) ❑ t est solution évidente de l'équation sans second membre, ainsi que e^t, alors que 1 est solution évidente de l'équation complète, donc la solution générale de l'équation avec second membre est :

$x = \lambda t + \mu e^t + 1$ (sur $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$)

❑ Si, par exemple, on n'a vu qu'une solution de l'équation sans second membre, par exemple la solution t, on peut chercher les solutions de l'équation complète sous la forme :

$$x = tz$$
$$x' = z + tz'$$
$$x'' = 2z' + tz''$$
$$(t-1)x'' - tx' + x = t(t-1)z'' + (2t - 2 - t^2)z' = 1$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire avec second membre, d'inconnue z'. On résout d'abord l'équation sans second membre en cherchant une primitive de $\dfrac{t^2 - 2t + 2}{t(t-1)} = 1 - \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t-1}$ soit $t - 2\ln(|t|) + \ln(|t-1|)$, donc la solution générale de l'équation homogène est $\dfrac{\lambda e^t(t-1)}{t^2}$ sur $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$. La méthode de variation de la constante conduit ensuite à $\dfrac{\lambda' e^t(t-1)^2}{t} = 1$ soit $\lambda' = \dfrac{te^{-t}}{(t-1)^2}$ et $\lambda = -\dfrac{e^{-t}}{t-1}$, (obtenu en intégrant par parties), donc la solution générale z' de l'équation avec second membre est :

$$z' = \frac{\lambda e^t(t-1)}{t^2} - \frac{1}{t^2},\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$z = \frac{\lambda e^t}{t} + \frac{1}{t} + \mu$$
$$x = \lambda e^t + \mu t + 1$$

On peut aussi chercher les solutions sous forme de séries entières.

d) Cherchons les solutions développables en série entière : $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k$. On obtient :

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k\, t^{k-1} - n \sum_{k=1}^{\infty} ka_k\, t^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} ka_k\, t^k + n\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)ka_{k+1}\, t^k - n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}\, t^k - \sum_{k=0}^{\infty} ka_k\, t^k + n\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, k,\ (k-n)((k+1)a_{k+1} - a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, k \neq n,\ a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$$

Pour $k = n$, on n'a aucune équation reliant a_{n+1} à a_n. Par récurrence sur k, on obtient :

$$\forall\, k \leq n,\ a_k = \frac{a_0}{k!}$$
$$\forall\, k \geq n+1,\ a_k = a_{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}$$

L'espace des solutions développables en série entière est de dimension 2. On en trouve une base simple en prenant d'une part $(a_0, a_{n+1}) = (1, \dfrac{1}{(n+1)!})$ qui donne la solution $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$, et d'autre part

$(a_0, a_{n+1}) = (1, 0)$ qui donne la solution $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

Comme l'espace de toutes les solutions sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$ est aussi de dimension 2, on a trouvé toutes les solutions de l'équation différentielle sur chacun de ces deux intervalles :

$$x = \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + \mu e^t.$$

e) On résout sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$, intervalles où le coefficient de x'' ne s'annule pas.

❑ On cherche une solution sous forme de série entière $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. On obtient :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} t^n + \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = -\dfrac{\omega^2}{(n+1)(n+2)}\, a_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{array}\right.$$

Par récurrence, les termes a_{2n+1} d'indice impair sont nuls, et les termes a_{2n} valent $a_0 \dfrac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!}$. Donc les solutions développables en séries entières sont :

$$x = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n}\, t^{2n}}{(2n+1)!} = a_0 \frac{\sin(\omega t)}{\omega t}$$

Cependant, sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Or nous n'avons trouvé qu'une droite. Il existe donc d'autres solutions. Cherchons ces solutions sous la forme $x(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega t} z(t)$, z étant une fonction auxiliaire. On a :

$$x = \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} z$$

$$x' = \left(\frac{\cos(\omega t)}{t} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t^2}\right) z + \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} z'$$

$$x'' = \left(-\omega \frac{\sin(\omega t)}{t} - \frac{2\cos(\omega t)}{t^2} + \frac{2\sin(\omega t)}{\omega t^3}\right) z + 2\left(\frac{\cos(\omega t)}{t} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t^2}\right) z' + \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} z''$$

On reporte dans l'équation différentielle et l'on obtient :

$$0 = tx'' + 2x' + \omega^2 tx = \left(-\omega\sin(\omega t) - \frac{2\cos(\omega t)}{t} + \frac{2\sin(\omega t)}{\omega t^2}\right) z + 2\left(\cos(\omega t) - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t}\right) z' +$$

$$\frac{\sin(\omega t)}{\omega} z'' + 2\left(\frac{\cos(\omega t)}{t} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega t^2}\right) z + 2\frac{\sin(\omega t)}{\omega t} z' + \omega\sin(\omega t)\, z$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} z'' + 2\cos(\omega t)\, z'$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre en z'. Comme une primitive de $-\dfrac{2\omega\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)}$ est $-2\ln(|\sin(\omega t)|)$, la solution générale de cette équation différentielle sur les intervalles où $\sin(\omega t)$ ne s'annule pas, est $z' = \lambda\exp(-2\ln(|\sin(\omega t)|) = \dfrac{\lambda}{\sin^2(\omega t)}$, d'où $z = -\dfrac{\lambda\text{cotan}(\omega t)}{\omega} + \mu$, ou encore $\lambda\text{cotan}(\omega t) + \mu$ en rebaptisant la constante λ. Les solutions x sont :

$$x = \lambda\frac{\cos(\omega t)}{\omega t} + \mu\frac{\sin(\omega t)}{\omega t}$$

Vu la méthode de résolution utilisée, λ et μ sont des constantes propres à chaque intervalle où $\sin(\omega t)$ ne s'annule pas, mais pour obtenir une fonction de classe C^2, on pourra vérifier que les recollements de x et x' aux bornes de deux intervalles consécutifs imposent d'avoir le même λ et μ pour tous les intervalles.

❑ A posteriori, on s'aperçoit qu'on aurait pu aussi résoudre en cherchant l'équation différentielle vérifiée par la fonction $z(t) = tx(t)$.

$z' = x + tx'$

$z'' = 2x' + tx''$

L'équation différentielle devient $z'' + \omega^2 z = 0$, de solution les combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$.

Sol.16) On veut que $z'' = az' + bz$ pour $z = t^2$ et $z = t^3$ soit :

$$\begin{cases} 2 = 2at + bt^2 \\ 6t = 3at^2 + bt^3 \end{cases} \text{ d'où } a = \frac{4}{t} \text{ et } b = -\frac{6}{t^2}$$

L'équation est donc $z'' = \dfrac{4z'}{t} - \dfrac{6z}{t^2}$ ou $t^2z'' - 4tz' + 6z = 0$.

Sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, intervalle où le coefficient de z'' ne s'annule pas, l'espace des solutions est de dimension 2, donc :

z est solution sur $]-\infty, 0[\Leftrightarrow \exists\, (\lambda_1, \mu_1) \in \mathbf{R}^2, \forall\, t < 0, z(t) = \lambda_1 t^2 + \mu_1 t^3$

z est solution sur $]0, +\infty[\Leftrightarrow \exists\, (\lambda_2, \mu_2) \in \mathbf{R}^2, \forall\, t > 0, z(t) = \lambda_2 t^2 + \mu_2 t^3$

z est solution sur $\mathbf{R}^* \Leftrightarrow \exists\, (\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbf{R}^2, z(t) = \begin{cases} \lambda_1 t^2 + \mu_1 t^3 \text{ pour } t < 0 \\ \lambda_2 t^2 + \mu_2 t^3 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$

z est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation $t^2z'' - 4tz' + 6z = 0$ si z est C^2 et vérifie l'équation différentielle, donc z doit être solution sur $\mathbf{R}^*$. Quand on cherche à prolonger z, z' et z'' à gauche et à droite de 0, on obtient aucune condition pour $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$, mais $z''(0) = 2\lambda_1 = 2\lambda_2$ ce qui impose que $\lambda_1 = \lambda_2$. Il n'y a aucune condition sur μ_1 et μ_2. Ainsi :

z est solution sur $\mathbf{R} \Leftrightarrow \exists\, (\lambda, \mu_1, \mu_2) \in R^2, z(t) = \begin{cases} \lambda t^2 + \mu_1 t^3 \text{ pour } t \leq 0 \\ z(t) = \lambda t^2 + \mu_2 t^3 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$

et l'espace des solutions est de dimension 3. La fonction $|t|^3$ par exemple est solution sur $\mathbf{R}$..

Sol.17) a) L'équation homogène a pour solution $\lambda e^x + \mu e^{-x}$. La méthode de variation des constantes consiste à chercher une solution particulière avec second membre sous la forme $\lambda(x)e^x + \mu(x)e^{-x}$, où λ et μ vérifient :

$$\begin{cases} \lambda' e^x + \mu' e^{-x} = 0 \\ \lambda' e^x - \mu' e^{-x} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda' = \dfrac{1}{2}\varphi(x)e^{-x} \\ \mu' = -\dfrac{1}{2}\varphi(x)e^{x} \end{cases}$$

d'où, par exemple, $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x \varphi(t)e^{-t}\,dt$ et $\mu(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^x \varphi(t)e^{t}\,dt$. La solution particulière est :

$$\frac{1}{2}\int_a^x \varphi(t)(e^{x-t} - e^{-x+t})\,dt = \int_a^x \varphi(t)\mathrm{sh}(x-t)\,dt$$

La solution générale de l'équation complète est :

$$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \int_a^x \varphi(t)\mathrm{sh}(x-t)\,dt,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

Les conditions $f(a) = f'(a) = 0$ donnent les conditions suivantes sur λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda e^a + \mu e^{-a} = 0 \\ \lambda e^a - \mu e^{-a} = 0 \end{cases}$$

(Pour le calcul de $f'(a)$, remarquer que la dérivée en a de $\dfrac{1}{2}e^x\displaystyle\int_a^x \varphi(t)e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^{-x}\displaystyle\int_a^x \varphi(t)e^{t}\,dt$ est nulle).

On en déduit que $\lambda = \mu = 0$ et donc que la solution unique au problème de Cauchy est :

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t)\mathrm{sh}(x-t)\,dt,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

b) Si, de plus $f(b) = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\mathrm{sh}(b-t)\,dt = 0$. Comme $\mathrm{sh}(b-t) > 0$ sur $]a, b[$, φ ne peut être strictement positive ou strictement négative sur ce même intervalle, sinon l'intégrale serait du signe de φ. Donc $\varphi = f'' - f$ s'annulle nécessairement sur $]a, b[$.

Sol.18) a) Soit $v(t) = u(-t)$. Alors v vérifie la même équation différentielle et les mêmes équations initiales, donc $u = v$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

b) Supposons que u vérifie l'équation de Mathieu et les conditions initiales $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Alors :

Soit $\varphi(x) = \cos(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$

$$= \cos(x) + \sin(x)\int_0^x \cos(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$$

On en déduit que φ est dérivable et que :

$$\varphi'(x) = -\sin(x) + \cos(x)\int_0^x \cos(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$$

la dérivée des deux intégrales s'annulant mutuellement

$$= -\sin(x) + \int_0^x \cos(x-t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$$

φ' est elle-même dérivable et :

$$\varphi''(t) = -\cos(x) - \sin(x)\int_0^x \cos(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$$
$$+ \cos(2x)\,u(x)$$

le dernier terme provenant de la dérivée des deux intégrales

$$= -\varphi(x) + \cos(2x)\,u(x)$$
$$= -\varphi(x) + u''(x) + u(x)$$

$\Rightarrow$ $(\varphi - u)'' + (\varphi - u) = 0$ avec $(\varphi - u)(0) = 0$ et $(\varphi' - u')(0) = 0$

donc $\varphi - u = 0$, seule solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ s'annulant en 0 ainsi que sa dérivée. Donc $u(x) = \varphi(x) = \cos(x) + \int_0^x \sin(x-t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$.

Réciproquement, si u est continue et vérifie $u(x) = \cos(x) + \int_0^x \sin(x-t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$, alors le même calcul que ci-dessus montre que u est deux fois dérivable et vérifie :

$$u'(x) = -\sin(x) + \cos(x)\int_0^x \cos(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$$

$$u''(x) = -\cos(x) - \sin(x)\int_0^x \cos(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt + \cos(x)\int_0^x \sin(t)\cos(2t)\,u(t)\,dt$$
$$+ \cos(2x)\,u(x)$$
$$= -u(x) + \cos(2x)\,u(x)$$

donc l'équation de Mathieu est vérifiée, avec de plus $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

c) Pour tout x :

$$|g_0(x)| \le 1 \Rightarrow |g_1(x)| \le |x| \Rightarrow |g_2(x)| \le \frac{x^2}{2}. \text{ Par récurrence, } |g_n(x)| \le \frac{|x^n|}{n!}. \text{ Donc :}$$

$$\sup_{x\in[-a,\,a]} |g_n(x)| \le \frac{a^n}{n!} \text{ terme général d'une série exponentielle convergente.}$$

Donc $\sum g_n$ converge normalement. Soit S(x) la somme de la série. On a :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \cos(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

$$= \cos(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \sin(x-t)\cos(2t)\,g_{n-1}(t)\,dt$$

$$= \cos(x) + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x-t)\cos(2t)\,g_{n-1}(t)\,dt$$

car $t \to \sum \sin(x-t)\cos(2t)\,g_{n-1}(t)$, tout comme $t \to \sum g_{n-1}(t)$, converge normalement sur $[0, x]$, donc on peut permuter les symboles $\sum_{n=1}^{\infty}$ et $\int_0^x$. Donc :

$$S(x) = \cos(x) + \int_0^x \sin(x-t)\cos(2t)\,S(t)\,dt$$

S vérifie le b), donc vérifie l'équation de Mathieu avec les mêmes conditions initiales que u, donc est égale à u d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Sol.19) ❑ Comme $f'(x) = -f(-x) + x^2$, f' est C^1, donc f est C^2 et :

$$f''(x) = f'(-x) + 2x = -f(x) + 2x + x^2$$

On résout cette équation différentielle du second ordre : $\exists$ λ et μ tels que :

$$\forall x,\ f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + x^2 + 2x - 2$$

mais si on reporte dans l'équation initiale, on obtient :

$$\forall x,\ -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) + 2x + 2 + \lambda\cos(x) - \mu\sin(x) + x^2 - 2x - 2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x,\ (\lambda + \mu)(\cos(x) - \sin(x)) = 0$$

donc $\lambda + \mu = 0$ et $f(x) = \lambda(\cos(x) - \sin(x)) + x^2 + 2x - 2$

❑ On peut aussi utiliser le fait que l'espace vectoriel des fonctions est somme directe du sous-espace vectoriel des fonctions paires et du sous-espace vectoriel des fonctions impaires. On décompose alors f en la somme d'une fonction paire g (de dérivée impaire) et d'une fonction impaire h (de dérivée paire) ce qui donne :

$$g'(x) + h'(x) + g(x) - h(x) = x^2$$

d'où, en séparant partie paire et partie impaire :

$$\left[\begin{array}{l} g' = h \\ h' = -g + x^2 \end{array}\right.$$

On résout le système. Le système homogène a pour solution $g(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ et $h = -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$ et une solution particulière est donnée par $g(x) = x^2 - 2$, $h(x) = 2x$. On ne garde dans la solution générale que celles qui vérifient g paire et h impaire, donc :

$$g(x) = \lambda\cos(x) + x^2 - 2 \qquad \text{et} \qquad h(x) = -\lambda\sin(x) + 2x$$

La somme de ces deux fonctions redonne la solution trouvée plus haut.

Sol.20) Puisque $f'(x) = f(\frac{1}{x})$, f' est elle-même de classe C^1. Nécessairement :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} f(x)$$

f est donc nécessairement solution de l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$. Il s'agit d'une équation d'Euler. Cherchons des solutions sous la forme $y(x) = x^r$. On obtient l'équation $r(r-1) + 1 = 0$, d'où, dans $\mathbb{C}$, $r = \frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que les solutions à valeurs complexes de l'exercice sont nécessairement de la forme $\lambda x^r + \mu x^{r'}$ avec r et r' les deux valeurs trouvées, ou encore :

$$f(x) = \lambda \exp(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + \mu \exp(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\ln(x))$$

$$= \lambda\sqrt{x}\exp(\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + \mu\sqrt{x}\exp(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x))$$

On reporte dans l'équation différentielle :

$$f'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})\exp(\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + \frac{\mu}{\sqrt{x}}(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})\exp(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x))$$

$$= f(\frac{1}{x}) = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\exp(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x)) + \frac{\mu}{\sqrt{x}}\exp(\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x))$$

Les deux exponentielles étant linéairement indépendantes, on doit avoir :

$$\lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \mu$$

L'autre relation $\mu\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \lambda$ est équivalente à la précédente. Ainsi, les solutions à valeurs complexes sont :

$$f(x) = \lambda\sqrt{x}\,\left(\exp\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$

On trouve les solutions réelles en prenant λ conjugué de $\lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \lambda\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)$, ce qui donne λ produit d'un réel $\frac{a}{2}$ par $\exp\left(-\frac{i\pi}{6}\right)$:

$$f(x) = \frac{a\sqrt{x}}{2}\left(\exp\left(-\frac{i\pi}{6} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \exp\left(\frac{i\pi}{6} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right)$$

$$= a\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x) - \frac{\pi}{6}\right)$$

◆