DUALITE

I : Dualité linéaire

1- Préambule

La notion de dualité s'appliquant à un espace vectoriel de dimension finie E sur un corps $\mathbb{K}$ vise à mettre en évidence un comportement symétrique entre d'une part les vecteurs éléments de E, et d'autre part les formes linéaires éléments de L(E, $\mathbb{K}$). L'espace L(E, $\mathbb{K}$) des formes linéaires est usuellement noté E* est s'appelle **espace dual** de E.

Voici un exemple d'une telle symétrie. Considérons la proposition suivante :

Soit φ *une forme linéaire élément de* E* *telle que, pour tout* x *de* E, $\varphi(x) = 0$, *alors* $\varphi = 0$

ce qui est la définition même d'une application nulle.

Cet proposition admet un énoncé dual, obtenu en changeant forme linéaire en vecteur, et vecteur en forme linéaire. Cet énoncé dual est :

Soit x *un vecteur élément de* E *tel que, pour tout* φ *de* E*, $\varphi(x) = 0$, *alors* $x = 0$.

Cette dernière proposition ne découle pas d'une définition, mais exige une démonstration. Prenons plutôt la contraposée : si x est non nul, il existe une forme linéaire φ telle que $\varphi(x) \neq 0$. E étant de dimension finie et x étant non nul, on peut compléter $\{x\}$ par $\{e_2, ..., e_n\}$ de façon à former une base de E. On définit alors la forme linéaire φ sur cette base en posant :

$\varphi(x) = 1$, $\varphi(e_2) = 0$, ..., $\varphi(e_n) = 0$

2- Base duale

Soit E de dimension finie, de base $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Tout x de E s'écrit $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Une forme linéaire φ est définie à partir du moment où l'on s'est donné les valeurs $\varphi_i = \varphi(e_i)$. On a alors :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i$$

expression où x et φ jouent des rôles symétriques.

La base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ étant donnée, il existe n formes linéaires particulières. Ce sont les n formes linéaires composantes $x \to x_i$. Notons e_i^* la i-ème forme linéaire composante :

$$e_i^* : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \to x_i$$

On a alors, pour tout x :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e_i^*(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e_i^*$$

ce qui signifie que les e_i^* engendrent E*. Ils forment également en système libre puisque :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0 \Rightarrow \forall\ x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(x) = 0$$

Appliquant l'égalité précédente en particulier sur e_j, on obtient $\lambda_j = 0$, et ceci, quel que soit j.

Les e_i^* forment donc une base de E*, appelée **base duale** de $(e_1, e_2, ..., e_n)$. On a donc dim(E*) = dim(E). Ce qui caractérise la base duale, ce sont les conditions suivantes :

$$e_i^*(e_i) = 1 \text{ et } e_i^*(e_j) = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

ce qu'on résume sous la forme $\boxed{\forall\ i, \forall\ j, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}}$. δ_{ij} se note aussi δ_i^j. Il est appelé **symbole de Kronecker**, et vaut 0 si les deux indices i et j sont différents et 1 s'ils sont égaux. (Le symbole de Kronecker intervient dans d'autres contextes, par exemple la matrice identité est définie par son terme général δ_i^j). e_i^* est donc la forme linéaire qui s'annule sur tous les vecteurs de base, sauf sur le $i^{\text{ème}}$ où elle prend la valeur 1.

Si $\mathcal{B}$ désigne la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, on notera $\mathcal{B}^*$ la base duale $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$.

Nous avons là aussi l'occasion de présenter deux notations duales.

$x_i = e_i^*(x)$ $\qquad$ $i^{\text{ème}}$ composante de x dans la base (e_i)

$\varphi_i = \varphi(e_i)$ $\qquad$ $i^{\text{ème}}$ composante de φ dans la base (e_i^*)

Ces deux relations sont bâties sur le même schéma :

$i^{\text{ème}}$ composante d'un vecteur dans une base = <vecteur, $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base du dual>

où l'on note indifféremment $\varphi(x)$ par $<\varphi, x>$ ou $<x, \varphi>$. $< , >$ s'appelle le **crochet de dualité**.

On peut aussi écrire :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*$$

Autrement dit, on dispose de la formule commune :

$$\text{vecteur} = \sum_{i=1}^{n} <\text{vecteur}, i^{\text{ème}} \text{ vecteur de la base du dual}>\ i^{\text{ème}} \text{ vecteur de base}$$

le vecteur pouvant désignant au choix un élément de E ou de E*.

EXEMPLES :

❑ Dans $\mathbf{R}^4$, on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La base duale est formée des quatre formes linéaires suivantes, données par leur matrice ligne :

$$e_1^* = (\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4})$$

$$e_2^* = (\frac{1}{4}\ -\frac{3}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4})$$

$$e_3^* = (\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ -\frac{3}{4}\ \frac{1}{4})$$

$$e_4^* = (\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ -\frac{3}{4})$$

❑ Soit E = $\mathbf{R}_n[X]$ et $a_0 < a_1 < ... < a_n$ $n + 1$ réels distincs. Les polynômes interpolateur de Lagrange L_j sont définis de la façon suivante :

$$L_j = \frac{(X - a_0)...(X - a_{j-1})(X - a_{j+1})...(X - a_n)}{(a_j - a_0)...(a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1})...(a_j - a_n)}$$

Ils constituent une base de E (voir le chapitre L1/POLYNOME.PDF). Ils sont tels que, pour tout i et tout j variant de 0 à n, $L_j(a_i) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$.

Exprimons ces relations au moyen de formes linéaires. Pour chaque i élément de $[\![0, n]\!]$, considérons la forme linéaire ψ_i définie sur E par $\psi_i(P) = P(a_i)$, évaluation de P en a_i. On a alors, pour tout i et tout j :

$$\psi_i(L_j) = L_j(a_i) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Ce sont exactement les relations vérifiées par les éléments e_j d'une base et e_i^* de la base duale. $(\psi_0, ..., \psi_n)$ est la base duale de la base $(L_0, ..., L_n)$.

Dans ce contexte, les relations $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\, e_i$ et $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*$ s'écrivent ici :

$$\forall\ P \in E,\ P = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(P)L_i \qquad \text{et} \qquad \forall\ \varphi \in E^*,\ \varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi(L_i)\psi_i$$

les deux égalités précédentes donnant $\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(P)\varphi(L_i)$.

Toute forme linéaire sur E étant combinaison linéaire des φ_i, c'est donc le cas de l'intégrale sur un intervalle quelconque. Il existe donc $\alpha_0, ..., \alpha_n$ tels que, par exemple :

$$\forall\ P \in \mathbf{R}_n[X], \int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_i\, P(a_i) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_i\psi_i(P)$$

Les α_i valent :

$$\alpha_i = \int_0^1 L_i(x)\,dx$$

Pour $n = 1$, $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on vérifiera que $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$. On obtient :

$$\forall\ P \in \mathbf{R}_1[X], \int_0^1 P(x)\,dx = \frac{P(0) + P(1)}{2}$$

C'est le calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

Pour $n = 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_2 = 1$, on vérifiera que $\alpha_0 = \alpha_2 = \frac{1}{6}$ et $\alpha_1 = \frac{4}{6}$. On obtient :

$$\forall\ P \in \mathbf{R}_2[X], \int_0^1 P(x)\,dx = \frac{P(0) + 4P(\frac{1}{2}) + P(1)}{6}$$

C'est le calcul d'une intégrale par la méthode de Simpson. (Cette méthode est en fait également valide pour les polynômes de degré 3).

3- Détermination de la base duale d'une base de $\mathbb{K}^n$

Le plus souvent, on travaille dans $\mathbf{K}^n$. Les vecteurs $e_1, ..., e_n$ sont alors des vecteurs colonnes (pas nécessairement ceux de la base canonique). Ecrites l'une à côté de l'autre, elles forment une matrice P inversible, qui n'est autre que la matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, ..., e_n)$).
Une forme linéaire φ, quant à elle, est donnée dans la base canonique par sa matrice ligne $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, telle que :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i \text{ où } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Quels sont les matrices lignes dans la base canonique de chaque forme linéaire constituant la base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$? Ce sont les lignes de P^{-1}. En effet, considérons la $i^{\text{ème}}$ ligne de P^{-1}. Comme $P^{-1}P = I_n$, il en résulte que le produit de cette ligne par chaque colonne de P donnera 0, sauf pour la $i^{\text{ème}}$ colonne avec laquelle on obtiendra la valeur 1. Opérant ainsi, on ne fait que dire que la forme linéaire définie par les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne est précisément e_i^*.

EXEMPLE :

❑ Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. On a alors :

$e_1^* = (1\ -2\ -2)$
$e_2^* = (-2\ 5\ 5)$
$e_3^* = (-3\ 8\ 9)$

ou encore :

$e_1^*(x) = x_1 - 2x_2 - 2x_3$
$e_2^*(x) = -\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3$
$e_3^*(x) = -\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3$

4- Base antéduale

Dans les paragraphes précédents, on part d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E, et on en déduit l'existence d'une base duale $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ de E*, donc telle que $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$.

Il serait élégant pour le caractère dual de la situation si inversement, partant d'une base $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ de E*, il existe une base de E telle que $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ en soit la base duale. Cette base de E que nous cherchons s'appelle la **base antéduale** de $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$.

PROPOSITION

Soit $\mathcal{L} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ *une base de* E*. *Alors il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathcal{L} = \mathcal{B}^*$.

Démonstration 1 :

❑ Considérons l'application linéaire $\Psi : x \in E \to \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \dots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et montrons que Ψ est bijective.

L'espace de départ et l'espace d'arrivée ayant la même dimension n, il suffit de montrer que Ψ est injective. Or :

$x \in \text{Ker}(\Psi)$
$\Leftrightarrow \quad \forall\, i,\ \psi_i(x) = 0$
$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varphi \in E^*,\ \varphi(x) = 0$ car tout élément φ de E* est combinaison linéaire de $\psi_1, ..., \psi_n$.
$\Leftrightarrow \quad x = 0$ comme on l'a vu dans le préambule.

La base antéduale cherchée n'est alors autre que l'image réciproque par Ψ de la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration 2 :

❑ Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base quelconque de E et $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ sa base duale. Soit Q la matrice de passage de la base $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ à la base $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$. Q est une matrice inversible. Considérons la relation $Q^T \times Q^{-1T} = I_n$. La $i^{\text{ème}}$ ligne de Q^T est constituée des composantes de ψ_i. Appliquée sur la $j^{\text{ème}}$ colonne de Q^{-1T}, on obtient comme résultat δ_i^j. Les colonnes de Q^{-1T} sont donc les composantes des vecteurs de E que l'on cherche.

EXEMPLE :

❑ Considérons les trois formes linéaires de $\mathbb{R}^3$:

$\varphi_1(x) = x_1 - 2x_2 - 2x_3$
$\varphi_2(x) = -2x_1 + 5x_2 + 5x_3$
$\varphi_3(x) = -3x_1 + 8x_2 + 9x_3$

Prenons la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Sa base duale est constituée des applications composantes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x_i$. Les composantes des φ_i dans cette base donne donc la matrice de passage $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 8 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$. L'inverse de sa transposée est $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui donne les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ voulus : $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous avons fait ici l'inverse de l'exemple présenté dans le I-3).

5- Bidual

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Nous allons ici considérer des formes linéaires définies sur l'espace dual E*, autrement dit des éléments de L(E*, $\mathbf{K}$) = E**, qu'on appelle **espace bidual** de E.

Chaque vecteur x de E permet de définir une forme linéaire élément de E** et définie par :

$$\varphi \in E^* \to \varphi(x) \in \mathbf{K}.$$

Nous noterons cette forme linéaire $\tilde{x}$. On associe donc à chaque élément x de E un élément $\tilde{x}$ du bidual E**. Ainsi :

$$\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$$

Il n'est pas difficile de voir que cette association définit une application linéaire $x \in E \to \tilde{x} \in E^{**}$. Par exemple $\widetilde{(\lambda x)}$ est la forme linéaire sur E* définie par $\varphi \to \varphi(\lambda x)$. Elle est identique à la forme linéaire $\varphi \to \lambda\varphi(x)$ qui n'est autre que $\lambda\tilde{x}$. Ainsi, $\widetilde{(\lambda x)} = \lambda\tilde{x}$. On procèdera de même pour la somme.

Cette association est injective. En effet, $\tilde{x} = 0$ signifie que, pour tout φ, $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x) = 0$, ce qui implique que x est nul, comme on l'a vu en préambule.

Cette association est surjective. Compte tenu de l'injectivité, il suffit pour cela de comparer les dimensions de E et E**. Or on sait que le dual d'un espace vectoriel a même dimension que l'espace, de sorte que, appliquant cette propriété à E et à E*, on a :

$$\left[\begin{array}{l} \dim(E) = \dim(E^*) \\ \dim(E^*) = \dim(E^{**}) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \dim(E) = \dim(E^{**})$$

Ainsi, l'application $x \in E \to \tilde{x} \in E^{**}$ est un isomorphisme entre E et son bidual E**. Cette isomorphisme justifie pleinement la notation $<\varphi, x>$ parfois utilisée pour désigner $\varphi(x) = \tilde{x}(\varphi)$ sans chercher à savoir si c'est φ qui s'applique sur x ou x (ou plutôt $\tilde{x}$) qui s'applique sur φ.

EXEMPLES :

❑ L'isomorphisme entre E et E** permet de prouver facilement l'existence d'une base antéduale relative à une base de E*. Soit $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ est une base de E*. Il existe $(\psi_1^*, \psi_2^*, ..., \psi_n^*)$ base de E**, égale à la base duale de $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$, donc telle que $\psi_i^*(\psi_j) = \delta_i^j$. Ce sont les formes linéaires qui, à φ élément de E*, associe ses composantes dans la base $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$. Par l'isomorphisme entre E** et E, il existe une base $(x_1, x_2, ..., x_n)$ telle que $\psi_i^* = \tilde{x}_i$. On a donc :

$$\delta_i^j = \tilde{x}_i (\varphi_j) = \varphi_j(x_i)$$

et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est la base antéduale cherchée.

❑ L'isomorphisme entre E et son bidual explique le comportement symétrique exposé dans le préambule. Supposons qu'on dispose d'un théorème s'exprimant sous une forme d'un énoncé $T(x_1, ..., x_n, \varphi_1, ..., \varphi_p)$ utilisant des quantificateurs existentiels ou universels portant sur des vecteurs x_j d'un espace vectoriel E de dimension finie donnée et des formes linéaires φ_i sur cet espace, et faisant intervenir les valeurs $\varphi_i(x_j) = \langle\varphi_i, x_j\rangle$. Ce théorème, valide dans tout espace de même dimension que E, sera également valide sur E*. Il prendra la forme $T(\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi_1, ..., \psi_p)$, où les φ_i sont des éléments de E* et les ψ_j des éléments de E**. Mais les ψ_j sont de la forme $\tilde{x}_j$ avec x_j élément de E, et $\psi_i(\varphi_j) = \varphi_j(x_i)$. Le théorème $T(\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi_1, ..., \psi_p)$ pourra donc s'écrire sous la forme $T(\varphi_1, ..., \varphi_n, x_1, ..., x_p)$, énoncé dual de $T(x_1, ..., x_n, \varphi_1, ..., \varphi_p)$ où l'on a remplacé les vecteurs par des formes linéaires, les formes linéaires par des vecteurs, et les valeurs $\varphi_i(x_j)$ par les valeurs $\varphi_j(x_i)$.
Ainsi, ci-dessus, l'énoncé d'existence dans E* de la base duale d'une base de E est :

$$\forall\ (x_1, ..., x_n) \text{ base de E}, \exists\ (\varphi_1, ..., \varphi_n) \text{ base de E*}, \forall\ i, \forall\ j, \varphi_i(x_j) = \delta_i^j$$

Appliqué à E* au lieu de E, on obtient l'existence dans E** de la base duale d'une base de E* :

$$\forall\ (\varphi_1, ..., \varphi_n) \text{ base de E*}, \exists\ (\psi_1, ..., \psi_n) \text{ base de E**}, \forall\ i, \forall\ j, \psi_i(\varphi_j) = \delta_i^j$$

Appliquant l'isomorphisme entre E** et E, on obtient l'existence dans E de la base antéduale d'une base de E*, énoncé dual de l'énoncé initial :

$$\forall\ (\varphi_1, ..., \varphi_n) \text{ base de E*}, \exists\ (x_1, ..., x_n) \text{ base de E}, \forall\ i, \forall\ j, \varphi_j(x_i) = \delta_i^j$$

6- Orthogonalité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, x un élément de E, φ une forme linéaire sur E. On dit que x et φ sont **orthogonaux** si $\varphi(x) = 0$. Ce vocabulaire est inspiré des espaces euclidiens, l'égalité $\varphi(x) = 0$ s'écrivant aussi $\langle\varphi, x\rangle = 0$ avec le crochet de dualité, même si, ici, les deux éléments φ et x sont dans des espaces différents.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle **orthogonal** de F ou **annulateur** de F, noté F^o, l'ensemble suivant :

$$F^o = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in F, \varphi(x) = 0\}$$

Soit maintenant H un sous-espace vectoriel de E*. Il y a deux orthogonaux possibles de H qu'on peut définir, l'un dans E**, l'autre dans E, à savoir :

$$H^o = \{\psi \in E^{**} \mid \forall\ \varphi \in H, \psi(\varphi) = 0\} \subset E^{**}$$

ou $\quad {}^{o}H = \{x \in E \mid \forall \varphi \in H, \varphi(x) = 0\} \subset E$

Cependant, E et E** étant isomorphes au moyen de l'application $x \in E \to \tilde{x} \in E^{**}$, avec, pour tout φ élément de E*, $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$, on a les équivalences suivantes, pour x élément de E :

$x \in {}^{o}H$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in H, \varphi(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in H, \tilde{x}(\varphi) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \tilde{x} \in H^{o}$

de sorte que $H^{o} = \widetilde{({}^{o}H)}$, image isomorphe de ${}^{o}H$ par l'application $x \to \tilde{x}$.

PROPOSITION

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E *de dimension finie. Soit* H *et* L *deux sous-espaces vectoriels de* E*. *Alors* :

(i) *Si* $(e_1, ..., e_n)$ *est une base de* E *telle que* $(e_1, ..., e_r)$ *soit une base de* F, *alors* $(e_{r+1}^*, ..., e_n^*)$ *est une base de* F^{o}.

(ibis) *Si* $(\psi_1, ..., \psi_n)$ *est une base de* E* *de base antéduale* $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, *et telle que* $(\psi_1, ..., \psi_p)$ *soit une base de* H, *alors* $(\varepsilon_{p+1}, ..., \varepsilon_n)$ *est une base de* ${}^{o}H$.

(ii) $\dim(F^{o}) = \dim(E) - \dim(F)$

(iibis) $\dim({}^{o}H) = \dim(E^*) - \dim(H)$

(iii) ${}^{o}(F^{o}) = F$ *et* $F^{oo} = \tilde{F}$

(iiibis) $({}^{o}H)^{o} = H$

(iv) $(F + G)^{o} = F^{o} \cap G^{o}$

(ivbis) ${}^{o}(H + L) = {}^{o}H \cap {}^{o}L$

(v) $(F \cap G)^{o} = F^{o} + G^{o}$

(vbis) ${}^{o}(H \cap L) = {}^{o}H + {}^{o}L$

(vi) $F \subset G \Rightarrow G^{o} \subset F^{o}$

(vibis) $H \subset L \Rightarrow {}^{o}L \subset {}^{o}H$

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : Pour toute forme linéaire $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i e_i^*$, $\varphi_i \in \mathbf{K}$, on a les équivalences suivantes :

$\varphi \in F^{o}$

$\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, r]\!], \varphi(e_i) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, r]\!], \varphi_i = 0$

$\Leftrightarrow \quad \varphi = \sum_{i=r+1}^{n} \varphi_i e_i^*$

Donc F^{o} admet pour base $(e_{r+1}^*, ..., e_n^*)$.

❑ (ibis) : Il suffit de remarquer que (ibis) est l'énoncé dual de (i). Autrement dit, on commence par appliquer (i) sur E* au lieu de E pour en déduire que $(\psi_{p+1}^*, ..., \psi_n^*)$ est une base de H^{o} dans E**, puis on utilise l'isomorphisme ~ entre E et E** pour se ramener à ${}^{o}H$. En effet, $H^{o} = \widetilde{({}^{o}H)}$ admet pour base $(\psi_{p+1}^*, ..., \psi_n^*) = (\tilde{\varepsilon}_{p+1}, ..., \tilde{\varepsilon}_n)$, donc ${}^{o}H$ admet pour base $(\varepsilon_{p+1}, ..., \varepsilon_n)$.

On peut aussi donner une démonstration directe analogue à celle du (i) en partant de $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ et en écrivant que :

$x \in {}^{o}\mathrm{H}$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, p]\!], \psi_i(x) = 0$

etc. en utilisant le fait que la base (ε) est antéduale de la base (ψ).

❑ (ii) et (iibis) sont des conséquences directes de (i) et (ibis).

❑ (iii) et (iiibis) : il suffit d'appliquer (i) et (ibis). Par exemple, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que $(e_1, ..., e_r)$ soit une base de F. Alors, d'après (i), $(e_{r+1}^*, ..., e_n^*)$ est une base de F^o. Prenons ensuite $(\psi_1, ..., \psi_n) = (e_1^*, ..., e_n^*)$ de base antéduale $(e_1, ..., e_n)$. L'application de (ii) sur $\mathrm{H} = \mathrm{F}^o$ donne $(e_1, ..., e_r)$ comme base de ${}^{o}\mathrm{H} = {}^{o}(\mathrm{F}^o)$. Donc ${}^{o}(\mathrm{F}^o) = \mathrm{F}$.
On procèdera de même pour montrer que $({}^{o}\mathrm{H})^o = \mathrm{H}$, ou bien on remarquera que cette dernière égalité est l'énoncé dual de l'égalité ${}^{o}(\mathrm{F}^o) = \mathrm{F}$.
Toujours avec $(e_{r+1}^*, ..., e_n^*)$ base de F^o, une deuxième application de (i) donne comme base de F^{oo} dans E** la base $(e_1^{**}, ..., e_r^{**})$, avec :

$$\forall\, i, j,\ e_i^{**}(e_j^*) = \delta_i^j = e_j^*(e_i) = \tilde{e}_i(e_j^*)$$

Autrement dit, $e_i^{**} = \tilde{e}_i$. Par conséquent, une base de F^{oo} est $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_r)$, image par l'isomorphisme ~ de la base $(e_1, ..., e_r)$ de F. Donc $\mathrm{F}^{oo} = \tilde{\mathrm{F}}$, image de F par l'isomorphisme ~.

❑ (iv) : Pour tout φ de E* :

$\varphi \in (\mathrm{F} + \mathrm{G})^o$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathrm{F}, \forall\, y \in \mathrm{G}, \varphi(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathrm{F}, \forall\, y \in \mathrm{G}, \varphi(x) = \varphi(y) = 0$ en considérant $x + 0$ et $0 + y$ pour montrer le sens $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \varphi \in \mathrm{F}^o$ et $\varphi \in \mathrm{G}^o$

$\Leftrightarrow \quad \varphi \in \mathrm{F}^o \cap \mathrm{G}^o$

(ivbis) est l'énoncé dual de (iv). On peut aussi donner une démonstration directe de (ivbis) calquée sur celle de (iv), en partant de $x \in {}^{o}(\mathrm{H} + \mathrm{L}) \Leftrightarrow$ etc.

❑ (v) : On applique (ivbis) à $\mathrm{H} = \mathrm{F}^o$ et $\mathrm{L} = \mathrm{G}^o$:

${}^{o}(\mathrm{F}^o + \mathrm{G}^o) = {}^{o}(\mathrm{F}^o) \cap {}^{o}(\mathrm{G}^o)$

$= \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ d'après (iii)

donc $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^o = ({}^{o}(\mathrm{F}^o + \mathrm{G}^o))^o = \mathrm{F}^o + \mathrm{G}^o$ d'après (iiibis)

(vbis) est l'énoncé dual de (v). On peut aussi appliquer (iv) à $\mathrm{F} = {}^{o}\mathrm{H}$ et $\mathrm{G} = {}^{o}\mathrm{L}$.

❑ (vi) : Si F est inclus dans G et si φ est élément de G^o, alors φ est orthogonal à tout élément de G, donc de F, donc φ est élément de F^o.
On procède de même pour (vibis) ou bien on remarque que (vibis) est l'énoncé dual de (vi).

7- Transposition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$, et f une application linéaire de E dans F. Pour toute forme linéaire φ sur F, $\varphi \circ f$ est une forme linéaire sur E :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & F \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

On définit ainsi une application notée $f^{\mathrm{T}} : \varphi \in F^* \to f^{\mathrm{T}}(\varphi) = \varphi \circ f \in E^*$. Il est facile de vérifier que f^{T} est linéaire, donc est élément de L(F*, E*).

L'opérateur de **transposition** $^{\mathrm{T}} : f \in L(E, F) \to L(F^*, E^*)$ est lui-même linéaire, donc est élément de L(L(E, F), L(F*, E*)). En effet, pour tout f de L(E, F), tout scalaire λ et tout élément φ de F*, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda f)^{\mathrm{T}}(\varphi) &= \varphi \circ (\lambda f) \\ &= \lambda(\varphi \circ f) \qquad \text{car } \varphi \text{ est linéaire} \\ &= \lambda f^{\mathrm{T}}(\varphi) \end{aligned}$$

donc $(\lambda f)^{\mathrm{T}} = \lambda f^{\mathrm{T}}$. On montrera de même pour montrer que $(f + g)^{\mathrm{T}} = f^{\mathrm{T}} + g^{\mathrm{T}}$.

La notation $^{\mathrm{T}}$, identique à celle de la transposition des matrices, se justifie par le résultat suivant :

PROPOSITION

Soient $(e_1, ..., e_p)$ *une base de* E *et* $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ *une base de* F, *et soit* M *la matrice de* f *dans ces bases. Alors la matrice de* f^{T} *dans les bases duales* $(\varepsilon_1^*, ..., \varepsilon_n^*)$ *et* $(e_1^*, ..., e_p^*)$ *est* M^{T}.

Démonstration :

❑ Soit m_{ij} le terme général de M. Pour tout i et tout j, on a :

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \varepsilon_i^*(f(e_j)) \\ &= (\varepsilon_i^* \circ f)(e_j) \\ &= (f^{\mathrm{T}}(\varepsilon_i^*))(e_j) \end{aligned}$$

qui n'est autre que le terme (j, i) de la matrice de f^{T}.

Dès lors, les propriétés de $^{\mathrm{T}}$ sur les applications linéaires sont comparables à celles de $^{\mathrm{T}}$ sur les matrices, telles qu'elles sont exposées dans le chapitre L1/MATRICES.PDF :

PROPRIETES

(i) $(f^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \circ \sim \; = \; \sim \circ f$

(ii) $(g \circ f)^{\mathrm{T}} = f^{\mathrm{T}} \circ g^{\mathrm{T}}$ *pour* f *élément de* L(E, F) *et* g *élément de* L(F, G)

(iii) $(f^{-1})^{\mathrm{T}} = (f^{\mathrm{T}})^{-1}$ *pour* f *élément de* GL(E)

(iv) $\mathrm{Im}(f)^{\mathrm{o}} = \mathrm{Ker}(f^{\mathrm{T}})$

(v) $\mathrm{Ker}(f)^{\mathrm{o}} = \mathrm{Im}(f^{\mathrm{T}})$

Dans le (i), on note par un même ~ les isomorphismes entre E et E** et entre F et F** pour ne pas alourdir les notations.

Démonstration :

Il est intéressant de donner des démonstrations directes sans passer par les matrices.

❑ (i) : f^T est l'application $\varphi \in F^* \to \varphi \circ f \in E^*$.

$(f^T)^T$ est l'application $\psi \in E^{**} \to \psi \circ f^T \in F^{**}$. Elle est donc telle que, pour tout φ de F* :

$$\begin{aligned}(f^T)^T(\psi)(\varphi) &= (\psi \circ f^T)(\varphi)\\ &= \psi(f^T(\varphi))\\ &= \psi(\varphi \circ f)\end{aligned}$$

Mais pour tout ψ de E**, il existe un unique élément x de E tel que $\psi = \tilde{x}$, vérifiant :

$$\forall \chi \in E^*, \psi(\chi) = \tilde{x}(\chi) = \chi(x)$$

On a donc :

$$\forall \varphi \in F^*, (f^T)^T(\tilde{x})(\varphi) = \tilde{x}(\varphi \circ f) = \varphi(f(x)) = \widetilde{f(x)}(\varphi)$$

où $\widetilde{f(x)}$ est l'image de $f(x)$ par l'isomorphisme canonique entre F et F**. Donc, pour tout x :

$$(f^T)^T(\tilde{x}) = \widetilde{f(x)}$$

donc $(f^T)^T \circ \sim\, = \,\sim \circ f$

ou plus précisément :

$$(f^T)^T \circ \sim_E\, = \,\sim_F \circ f$$

en indiquant par un indice $_E$ ou $_F$ l'ensemble de départ de chaque isomorphisme ~.

❑ (ii) : pour tout φ élément de G* :

$$\begin{aligned}(g \circ f)^T(\varphi) &= \varphi \circ (g \circ f)\\ &= (\varphi \circ g) \circ f\\ &= g^T(\varphi) \circ f\\ &= f^T(g^T(\varphi))\\ &= (f^T \circ g^T)(\varphi)\end{aligned}$$

donc $(g \circ f)^T = f^T \circ g^T$

❑ (iii) : On applique le (ii) avec $g = f^{-1}$, et l'on utilise le fait que $(Id_E)^* = Id_{(E^*)}$.

❑ (iv) : Pour tout φ élément de F*, on a les équivalences suivantes :

$\varphi \in Im(f)^o$

$\Leftrightarrow$ $\forall y \in Im(f), \varphi(y) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in E, \varphi(f(x)) = 0$ tout y de Im(f) étant de la forme $f(x)$

$\Leftrightarrow$ $\varphi \circ f = 0$

$\Leftrightarrow$ $f^T(\varphi) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\varphi \in Ker(f^T)$

❑ (v) : Pour tout φ de E* :

$\varphi \in Im(f^T)$

$\Leftrightarrow$ $\exists \psi \in F^*, \varphi = f^T(\psi) = \psi \circ f$

$\Rightarrow$ $Ker(f) \subset Ker(\varphi)$

$\Leftrightarrow$ $\varphi \in Ker(f)^o$ car, pour tout x élément de Ker(f), on aura $\varphi(x) = 0$

Réciproquement, si φ appartient à $Ker(f)^o$, soit F un supplémentaire de Ker(f) dans E. La restriction de f à F est une bijection de F dans $f(F) = f(F \oplus Ker(f)) = f(E) = Im(f)$. Définissons ψ élément de F* de la façon suivante :

$$\psi = \begin{cases} \varphi \circ (f_{|F})^{-1} \text{ sur Im}(f) \\ 0 \text{ sur un supplémentaire de Im}(f) \text{ dans F} \end{cases}.$$

Vérifions qu'on a bien $\varphi = \psi \circ f = f^T(\psi)$, de sorte que φ est élément de $\mathrm{Im}(f^T)$. Pour tout x de E, qu'on décompose en $y + z$, $y \in \mathrm{Ker}(f)$, $z \in$ F, on a :

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \varphi(z) = \varphi(z) \qquad \text{car } \varphi \text{ est orthogonal à } y \text{ (ou encore Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi))$$

et

$$\begin{aligned}(\psi \circ f)(y + z) &= (\psi \circ f)(y) + (\psi \circ f)(z) \\ &= \psi(f(z)) && \text{car } f(y) = 0 \\ &= \varphi((f_{|F})^{-1}(f(z)) \\ &= \varphi(z) && \text{car } z \in \text{F}\end{aligned}$$

On a ainsi montré que $\varphi(x) = (\psi \circ f)(x)$.

On peut aussi appliquer le (iv) à f^T :

$$(\mathrm{Im}(f^T))^o = \mathrm{Ker}((f^T)^T) = \mathrm{Ker}(\sim_F \circ f \circ \sim_E^{-1})$$

donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f^T) &= {}^o((\mathrm{Im}(f^T))^o) = {}^o(\mathrm{Ker}(\sim_F \circ f \circ \sim_E^{-1})) \qquad \text{sous-espaces vectoriels inclus dans E*} \\ &= \{\varphi \in E^* \mid \forall\, \psi \in \mathrm{Ker}(\sim_F \circ f \circ \sim_E^{-1}),\ \psi(\varphi) = 0\} \\ &= \{\varphi \in E^* \mid \forall\, \psi \text{ tel que } (\sim_F \circ f \circ \sim_E^{-1})(\psi) = 0,\ \psi(\varphi) = 0\} \\ &= \{\varphi \in E^* \mid \forall\, x \text{ tel que } (\sim_F \circ f \circ \sim_E^{-1})(\tilde{x}) = 0,\ \tilde{x}(\varphi) = 0\} \\ &\qquad \text{en remplaçant } \psi \text{ par } \tilde{x} \\ &= \{\varphi \in E^* \mid \forall\, x \text{ tel que } (\sim_F \circ f)(x) = 0,\ \varphi(x) = 0\} \\ &= \{\varphi \in E^* \mid \forall\, x \text{ tel que } f(x) = 0,\ \varphi(x) = 0\} \\ &\qquad \text{sachant que } \sim_F \text{ est bijective} \\ &= \{\varphi \in E^* \mid \forall\, x \in \mathrm{Ker}(f),\ \varphi(x) = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(f)^o\end{aligned}$$

II : Exemples et applications

1- Changement de base

PROPOSITION

Soit $(e_1, ..., e_n)$ *une base d'un espace vectoriel* E, $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ *une autre base,* P *la matrice de passage de la base* $(e_1, ..., e_n)$ *à la base* $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. *Soit* $(e_1^*, ..., e_n^*)$ *la base duale de* $(e_1, ..., e_n)$ *et* $(\varepsilon_1^*, ..., \varepsilon_n^*)$ *la base duale de* $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. *Alors, la matrice de passage de la base* $(e_1^*, ..., e_n^*)$ *à la base* $(\varepsilon_1^*, ..., \varepsilon_n^*)$ *est* P^{-1^T}.

Démonstration :

❑ Soit x un vecteur de E, de composantes la colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ et de composantes la colonnes Y dans la base $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$. La formule de changement de base donne X = PY (revoir au besoin le chapitre L1/LINEF.PDF).

Soit φ une forme linéaire élément de E*, de composantes la colonne $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ ... \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1^*, ..., e_n^*)$ et de composantes la colonne Ψ dans la base $(\varepsilon_1^*, ..., \varepsilon_n^*)$. On a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j e_j^*$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i = \Phi^{\mathrm{T}} X$$

Les mêmes calculs menés dans les bases ε et ε* plutôt que e et e^* donnent :

$$\varphi(x) = \Psi^{\mathrm{T}} Y$$

Par conséquent :

$$\Psi^{\mathrm{T}} Y = \Phi^{\mathrm{T}} X = \Phi^{\mathrm{T}} PY$$

Ceci étant vrai pour toute colonne Y, on a $\Psi^{\mathrm{T}} = \Phi^{\mathrm{T}} P$, ou encore $\Psi = P^{\mathrm{T}} \Phi$, ou enfin $\Phi = (P^{\mathrm{T}})^{-1}\Psi$. Par conséquent, la matrice de passage de la base $(e_1^*, ..., e_n^*)$ à la base $(\varepsilon_1^*, ..., \varepsilon_n^*)$ est $(P^{\mathrm{T}})^{-1} = P^{-1\mathrm{T}}$.

REMARQUE :

❑ Comme les formules de changement de base des anciennes composantes des vecteurs aux nouvelles se font avec la matrice de passage inverse, $Y = P^{-1}X$, les composantes des vecteurs sont parfois dits **contravariantes**.

❑ Comme les formules de changements de base des anciennes composantes des formes linéaires aux nouvelles se font avec la matrice de passage directe, $\Psi = P^{\mathrm{T}} \Phi$, les composantes des formes linéaires sont appelées **covariantes**.

2- Trace d'un endomorphisme

Soit g un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E, muni d'une base $(e_1, ..., e_p)$. Soit g_{ij} le terme général de la matrice de g dans cette base. g_{ij} peut s'exprimer à partir des e_i et des e_i^*. En effet, pour tout j :

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{p} g_{ij}\, e_i$$

donc $\quad g_{ij} = e_i^*(g(e_j))$

En particulier, la trace de g s'écrit :

$$\mathrm{Tr}(g) = \sum_{i=1}^{p} e_i^*(g(e_i))$$

Sous cette forme, elle semble dépendre de la base choisie, mais, dans le chapitre L1/LINEF.PDF, on a montré que la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie. On donne ici une autre démonstration de cette propriété.

Soit E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$, E de dimension p et F de dimension n. Pour tout φ de E* et tout v de F, on définit l'application notée $\varphi \otimes v$ de E dans F par :

$$\begin{aligned} E &\to F \\ x &\to \varphi(x)v \end{aligned}$$

L'application $(\varphi, v) \in E^* \times E \to \varphi \otimes v$ est bilinéaire. Par exemple, $(\varphi + \psi) \otimes v = \varphi \otimes v + \psi \otimes v$ car, pour tout x :

$$\begin{aligned} ((\varphi + \psi) \otimes v)(x) &= (\varphi + \psi)(x)v \\ &= \varphi(x)v + \psi(x)v \end{aligned}$$

$= (\varphi \otimes v)(x) + (\psi \otimes v)(x)$
$= (\varphi \otimes v + \psi \otimes v)(x)$

On procèdera de même aux autres vérifications.

En particulier :

$$\lambda(\varphi \otimes v) = (\lambda\varphi) \otimes v = \varphi \otimes \lambda v$$

Matriciellement, si on note V la colonne $\begin{pmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$ des composantes de v dans une base donnée de F, X la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}$ des composantes d'un vecteur quelconque x de E dans une base de E, Φ la colonne $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ ... \\ \varphi_p \end{pmatrix}$ des composantes de φ dans la base duale de la base de E, alors le vecteur $(\varphi \otimes v)(x) = \varphi(x)v$ a pour composantes $\Phi^{\mathrm{T}}XV$ ($\Phi^{\mathrm{T}}X$ étant vu comme un scalaire) ou $V\Phi^{\mathrm{T}}X$ ($\Phi^{\mathrm{T}}X$ étant vu comme une matrice 1×1). Cela signifie que $\varphi \otimes v$ a pour matrice $V\Phi^{\mathrm{T}}$, de terme général $v_i\varphi_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.

PROPOSITION

(i) $\varphi \otimes v$ *est élément de* L(E, F). *Si* φ *et* v *sont non nuls, son rang est égal à* 1. *Réciproquement, tout application linéaire de rang* 1 *de* E *dans* F *est de cette forme.*

(ii) *Soit* $(e_1^*, ..., e_p^*)$ *une base de* E*, *duale de la base* $(e_1, ..., e_p)$ *de* E, *et* $(f_1, ..., f_n)$ *une base de* F. *Alors* $\{e_j^* \otimes f_i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$ *est une base de* L(E, F).

(iii) *La trace est la forme linéaire définie sur* L(E) *par* :

$$\forall \varphi \in E^*, \forall v \in E, \mathrm{Tr}(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$$

Dans le (iii), on a pris E = F. Dans une base donnée de E = F et sa base duale, on a vu que $\varphi \otimes v$ avait pour matrice $V\Phi^{\mathrm{T}}$. Par ailleurs, $\varphi(v) = \Phi^{\mathrm{T}}V$ vu comme un scalaire. Comme $\mathrm{Tr}(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$, la trace transforme matriciellement $V\Phi^{\mathrm{T}}$ en $\Phi^{\mathrm{T}}V$. Cependant, la propriété (iii) est énoncée de telle façon qu'elle donne une définition de la trace, indépendamment de toute base.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : La linéarité de $\varphi \otimes x$ résulte de celle de φ. Il est clair que $\mathrm{Im}(\varphi \otimes v) \subset \mathrm{Vect}(v)$. Il y a égalité si φ est non nul comme on le voit en appliquant $\varphi \otimes v$ sur un vecteur x n'appartenant pas au noyau de φ. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\varphi) &= \dim(\mathrm{Vect}(v)) \\ &= 1 \qquad \text{si } v \text{ est lui aussi non nul} \end{aligned}$$

Réciproquement, soit g une application linéaire de E dans F de rang 1. Prenons v un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Im}(g)$. Pour tout vecteur x, $g(x)$ appartient à $\mathrm{Vect}(v)$, donc il existe un unique scalaire que nous noterons $\varphi(x)$ tel que $g(x) = \varphi(x)v$. On définit ainsi une application φ de E dans $\mathbf{K}$. Elle est linéaire car g est linéaire. C'est donc un élément de E*, et $g = \varphi \otimes v$.

La décomposition de g n'est pas unique. On peut remplacer v par un de ses multiples non nul λv. Pour trouver le même g, on prendra $\dfrac{\varphi}{\lambda}$ au lieu de φ :

$$g = \varphi \otimes v = \frac{\varphi}{\lambda} \otimes \lambda v$$

❑ (ii) : Pour tout (i, j), $e_j^* \otimes f_i$ n'est autre que l'application linéaire dont la matrice dans les bases $(e_1, ..., e_p)$ et $(f_1, ..., f_n)$ possède un 1 en i-ème ligne et j-ème colonne, et des 0 ailleurs. On sait que l'ensemble de ces matrices constituent une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$. Par isomorphisme entre $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{K})$ et L(E, F), les $e_j^* \otimes f_i$ forment une base de L(E, F).

❑ (iii) : Il convient d'abord de vérifier que la propriété $\forall\ \varphi \in E^*$, $\forall\ v \in E$, $\mathrm{Tr}(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$ permet bien de définir une forme linéaire sur L(E). Les $\varphi \otimes v$ étant de rang 1 (si φ et v sont non nuls) et les endomorphismes de rang 1 engendrant L(E), tout endomorphisme g peut s'écrire :

$$g = \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi \otimes v$$

pour une certaine famille de triplets (λ, φ, v). Cette écriture semble permettre de définir $\mathrm{Tr}(g)$ comme étant :

$$\mathrm{Tr}(g) = \sum_{\varphi,v} \lambda\mathrm{Tr}(\varphi \otimes v) = \sum_{\psi,w} \lambda\varphi(v)$$

Cependant, la décomposition de g n'est pas unique et il convient de vérifier que toute décomposition conduit au même résultat final. Soient donc deux décompositions :

$$g = \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi \otimes v = \sum_{\psi,w} \mu\psi \otimes w$$

Il s'agit de montrer que $\sum_{\varphi,v} \lambda\varphi(v) = \sum_{\psi,w} \mu\psi(w)$. Considérons une base $(e_1, ..., e_n)$ de E et sa base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$, et décomposons les v, φ, w, ψ dans ces bases :

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \qquad \varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j e_j^* \qquad w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i \qquad \psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j\, e_j^*$$

On obtient des sommes de la forme :

$$g = \sum_{\varphi,v,i,j} \lambda\varphi_j v_i\, e_j^* \otimes e_i = \sum_{\psi,w,i,j} \mu\psi_j w_i\, e_j^* \otimes e_j$$

Les $(e_j^* \otimes e_j)$ formant une base de L(E) d'après le b), on a :

$$\forall\ (i, j),\ \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi_j v_i = \sum_{\psi,w} \mu\psi_j w_i$$

Dès lors, en sommant toutes ces égalités pour toutes les valeurs de $i = j$:

$$\sum_{i} \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi_i v_i = \sum_{i} \sum_{\psi,w} \mu\psi_i w_i$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{\varphi,v} \sum_{i} \lambda\varphi_i v_i = \sum_{\psi,w} \sum_{i} \mu\psi_i w_i$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi(v) = \sum_{\psi,w} \mu\psi(w)$$

car $\sum_i \varphi_i v_i = \varphi(v)$ et $\sum_i \psi_i w_i = \psi(w)$.

Le précédent calcul permet du même coup de dire que Tr ainsi définie est bien la trace, car la décomposition $g = \sum_{\varphi,v,i,j} \lambda\varphi_j v_i\, e_j^* \otimes e_i$ signifie que la matrice de g dans la base $(e_1, ..., e_n)$ a pour terme général $g_{ij} = \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi_j v_i$. On a alors :

$$\mathrm{Tr}(g) = \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi(v) = \sum_i \sum_{\varphi,v} \lambda\varphi_i v_i = \sum_i g_{ii}$$

comme attendu.

3- Dérivation discrète, formule de Newton

Dans E = $\mathbf{K}_n[X]$, soit φ_k la forme linéaire définie par :

$$\forall\ P \in E,\ \varphi_k(P) = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

Autrement dit, φ_k est égal à $\dfrac{D^k}{k!}$ calculé en 0 où D est l'opérateur de dérivation.

$(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n)$ est la base duale de la base canonique de E. En effet :

- ❑ Pour tout $j < i$, $(X^i)^{(j)} = i(i-1)...(i-j+1)X^{j-i}$ donc $\varphi_j(X^i) = 0$.
- ❑ Pour $i = j$, $(X^i)^{(i)} = i!$ donc $\varphi_i(X^i) = 1$.
- ❑ Pour tout $j > i$, $(X^i)^{(j)} = 0$ donc $\varphi_j(X^i) = 0$.

Ainsi $\varphi_j(X^i) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$

La relation $x = \sum_i e_i^*(x)\, e_i$, avec ici $x = P$, $e_i = X^i$, $e_i^* = \varphi_i$, s'écrit dans ce contexte :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i$$

et l'on reconnaît la formule de Taylor appliquée à un polynôme en 0.

Considérons maintenant la fonction suivante :

$$\Delta : P \in E \to P(X+1) - P(X)$$

appelée **dérivation discrète** des polynômes. Soit ψ_k la forme linéaire définie par $\psi_k(P) = \dfrac{(\Delta^k P)(0)}{k!}$, i.e. ψ_k est égal à $\dfrac{\Delta^k}{k!}$ calculé en 0 (pour $k = 0$, $\dfrac{\Delta^k}{k!} = \mathrm{Id}$, de sorte que $\psi_0(P) = P(0)$). ψ_k joue pour Δ le même rôle que φ_k pour D. Quelle base jouera vis-à-vis des ψ_k le rôle de la base canonique pour les φ_k ? Vérifions que cette base est donnée par les polynômes $X(X-1)...(X-i+1)$, $0 \le i \le n$ (pour

$i = 0$, le polynôme à considérer est le polynôme constant 1, correspondant à un produit vide). Nous noterons $X^{\underline{i}}$ ces polynômes (on a souligné l'exposant i).
En effet, $\Delta(1) = 0$ et pour $i > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta(X^{\underline{i}}) &= (X + 1)X(X - 1)...(X - i + 2) - X(X - 1)...(X - i + 1) \\ &= iX(X - 1)...(X - i + 2) \\ &= iX^{\underline{i-1}}\end{aligned}$$

à rapprocher de $D(X^i) = iX^{i-1}$. On aura de même, par récurrence sur j :

- ❑ Pour tout $j < i$, $\Delta^j(X^{\underline{i}}) = i(i - 1)...(i - j + 1)X^{\underline{i-j}}$ qui possède un facteur X, donc $\psi_j(X^{\underline{i}}) = 0$.
- ❑ Pour $i = j$, $\Delta^i(X^{\underline{i}}) = i!$ donc $\psi_i(X^{\underline{i}}) = 1$.
- ❑ Pour tout $j > i$, $\Delta^j(X^{\underline{i}}) = 0$ donc $\psi_j(X^{\underline{i}}) = 0$.

Ainsi $\psi_j(X^{\underline{i}}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

La relation $x = \sum_i e_i^*(x)\, e_i$, avec $x = P$, $e_i = X^{\underline{i}}$, $e_i = \psi_i$, donne alors un équivalent discret de la formule de Taylor, appelé **formule de Newton** :

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i(P)(0)}{i!} X(X - 1)...(X - i + 1)}$$

On peut donner une expression explicite de $\Delta^i(P)(0)$ en fonction de P(0), P(1), ..., P(i). Vérifions en effet par récurrence sur i que :

$$\boxed{\Delta^i(P) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k}\, P(X + k)}$$

Pour $i = 0$, on retrouve P = P, et pour $i = 1$, $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$. Si la relation est vérifiée au rang i, alors :

$$\begin{aligned}\Delta^{i+1}(P) &= \Delta^i(\Delta(P)) = \Delta^i(P(X + 1) - P(X)) \\ &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} (P(X + 1 + k) - P(X + k)) \\ &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} P(X + 1 + k) - \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} P(X + k) \\ &= \sum_{k=1}^{i+1} \binom{i}{k-1} (-1)^{i-k+1} P(X + k) - \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} P(X + k) \\ &= P(X + i + 1) + \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k-1} (-1)^{i-k+1} P(X + k) - \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} P(X + k) - (-1)^i P(X) \\ &= P(X + i + 1) + \sum_{k=1}^{i} (\binom{i}{k-1} + \binom{i}{k}) (-1)^{i+1-k} P(X + k) + (-1)^{i+1} P(X) \\ &= P(X + i + 1) + \sum_{k=1}^{i} \binom{i+1}{k} (-1)^{i+1-k} P(X + k) + (-1)^{i+1} P(X)\end{aligned}$$

$$\text{car } \binom{i}{k-1} + \binom{i}{k} = \binom{i+1}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} (-1)^{i+1-k} \text{ P(X} + k)$$

qui est bien la formule attendue au rang $i + 1$. On a donc :

$$\Delta^i(\text{P})(0) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \text{ P}(k)$$

Par exemple :

$\Delta(\text{P})(0) = \text{P}(1) - \text{P}(0)$

$\Delta^2(\text{P})(0) = \text{P}(2) - 2\text{P}(1) + \text{P}(0)$

$\Delta^3(\text{P})(0) = \text{P}(3) - 3\text{P}(2) + 3\text{P}(1) - \text{P}(0)$

etc.

4- Hyperplans

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, k un entier strictement positif et H_1, H_2, ..., H_k des hyperplans de E, noyaux des formes linéaires non nulles φ_1, ..., φ_k.

PROPOSITION

(i) *Soit* r *le rang de* $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$. *A permutation des indices près, on peut supposer qu'un système libre maximal extrait de cette famille est* $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$. *On a alors* :

$$\text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_k = \text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_r$$

(ii) *Si on complète* $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ *en une base de* E* *et qu'on note* $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ *la base antéduale dans* E *de cette base de* E*, *alors* :

$$\text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_r = \text{Vect}(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n)$$

(iii) $\dim(\text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_k) = n - r$.

(iv) *Une forme linéaire* f *sur* E *est combinaison linéaire de* $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ *si et seulement si* $\text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_k$ *est inclus dans* $\text{Ker}(f)$.

(v) *Soient* u_1, ..., u_p *des endomorphismes de* E *et* f *une forme linéaire sur* E. *Alors il y a équivalence entre* :

(v.a) $\text{Ker}(u_1) \cap \text{Ker}(u_2) \cap ... \cap \text{Ker}(u_p) \subset \text{Ker}(f)$

(v.b) $\exists\, (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_p) \in \text{E}^{*p}, f = \psi_1 \circ u_1 + \psi_2 \circ u_2 + ... + \psi_p \circ u_p$

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) : L'inclusion $\text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_k \subset \text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_r$ est triviale.

Réciproquement, soit x élément de $\text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_r$. On a $\varphi_1(x) = ... = \varphi_r(x) = 0$. Mais comme $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ est un système libre maximal extrait de $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$, tout φ_i est combinaison linéaire de $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$. Par conséquent $\varphi_i(x) = 0$, donc x est élément de H_i et l'on a :

$\text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_r \subset \text{H}_1 \cap \text{H}_2 \cap ... \cap \text{H}_k$.

❑ (ii) : Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ élément de E, on a :

$x \in \text{H}_1 \cap ... \cap \text{H}_r$

$\Leftrightarrow \quad x \in \text{Ker}(\varphi_1) \cap \text{Ker}(\varphi_2) \cap ... \cap \text{Ker}(\varphi_r)$

$\Leftrightarrow \quad \varphi_1(x) = ... = \varphi_r(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = ... = x_r = 0 \qquad$ car $\forall\, i$, $\varphi_i(x) = x_i$

$\Leftrightarrow \quad x \in \sum\limits_{i=r+1}^{n} x_i\varepsilon_i$

$\Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n)$

On peut aussi utiliser les propriétés vues dans le paragraphe relatif à l'orthogonalité. Pour tout i, $H_i = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ n'est autre que ${}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_i)$, donc :

$$\begin{aligned} H_1 \cap ... \cap H_k &= {}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_1) \cap ... \cap {}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_k) \\ &= {}^{o}(\mathrm{Vect}(\varphi_1) + ... + \mathrm{Vect}(\varphi_k)) && \text{propriété (ivbis)} \\ &= {}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_k) \\ &= {}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_r) \\ &= \mathrm{Vect}(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n) && \text{propriété (ibis)} \end{aligned}$$

❑ (iii) : C'est une conséquence directe du (i) et du (ii) :

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_k) &= \dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_r) \\ &= \dim(\mathrm{Vect}(\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n)) \\ &= n - r \end{aligned}$$

❑ (iiibis) : Sans faire appel à la notion de base antéduale ou d'orthogonalité, on peut aussi procéder comme suit. Considérons l'application $\Phi : x \in E \to \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ ... \\ \varphi_k(x) \end{pmatrix}$. On a :

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(\varphi_k) = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_k$$

Le théorème du rang donne :

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_k) = n - \mathrm{rg}(\Phi) = n - r$$

car $\mathrm{rg}(\Phi) = \mathrm{rg}(\varphi_1, ..., \varphi_k) = r$, la matrice de Φ dans une base de E étant formée des matrices lignes des φ_i dans cette base.

On a simplement écrit que les éléments de $H_1 \cap ... \cap H_k$ vérifient un système de k équations homogènes à n inconnues de rang r, donc forment un ensemble de solutions de dimension $n - r$.

❑ (iiiter) : On peut aussi procéder par récurrence pour i variant de 1 à r. Commençons par remarquer que, pour i élément de $[\![1, r-1]\!]$, on a $\dim(H_1 \cap ... \cap H_i + H_{i+1}) = n$. Pour cela, nous avons besoin d'anticiper sur la propriété (iv) de la proposition. On a en effet :

$\quad (\varphi_1, ..., \varphi_r)$ est libre

$\Rightarrow \quad (\varphi_1, ..., \varphi_{i+1})$ est libre

$\Rightarrow \quad \varphi_{i+1}$ n'est pas combinaison linéaire de $(\varphi_1, ..., \varphi_i)$

$\Rightarrow \quad H_1 \cap ... \cap H_i \not\subset \mathrm{Ker}(\varphi_{i+1})$ par contraposée du (iv) avec i au lieu de k et en prenant $f = \varphi_{i+1}$.

$\Rightarrow \quad \dim(H_1 \cap ... \cap H_i + H_{i+1}) > \dim(H_{i+1}) = n - 1$

$\Rightarrow \quad \dim(H_1 \cap ... \cap H_i + H_{i+1}) = n$

Maintenant, pour $i = 1$, on a $\dim(H_1) = n - 1$. Supposons que, à un certain indice $i < r$, on ait :

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_i) = n - i$$

Alors, en utilisant la propriété $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G)$:

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_i \cap H_{i+1}) &= \dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_i) + \dim(H_{i+1}) \\ &\quad - \dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_i + H_{i+1}) \\ &= (n - i) + (n - 1) - n \end{aligned}$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence
$= n - (i + 1)$

On conclut pour l'indice r :

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_r) = n - r$$

et donc $\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_k) = n - r$ puisque $H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_k = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_r$.

❑ (iv) : Si f est combinaison linéaire des φ_i, alors $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(f)$ est facile à montrer.

Réciproquement, supposons que $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Utilisons la base antéduale $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ introduite en (ii). $\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n$ sont éléments de $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ donc éléments de $\mathrm{Ker}(f)$. On a donc $f(\varepsilon_{r+1}) = ... = f(\varepsilon_n) = 0$. Comme les $f(\varepsilon_i)$ sont les composantes de f dans la base de E*, il en résulte que f est seulement combinaison linéaire des r premiers éléments de cette base, i.e. de $\varphi_1, ..., \varphi_r$.

❑ (ivbis) : On peut aussi utiliser la notion d'orthogonalité. On a vu un peu plus haut que :

$$H_1 \cap ... \cap H_k = {}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_k)$$

Or $\mathrm{Ker}(f) = {}^{o}\mathrm{Vect}(f)$. Comme on suppose que $H_1 \cap ... \cap H_k \subset \mathrm{Ker}(f\}$, on a :

$${}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_k) \subset {}^{o}\mathrm{Vect}(f)$$

donc $({}^{o}\mathrm{Vect}(f))^{o} \subset ({}^{o}\mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_k))^{o}$

donc $\mathrm{Vect}(f) \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_k)$

donc f est combinaison linéaire de $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$.

❑ (ivter) : On peut aussi procéder comme suit pour montrer cette réciproque :

Soit $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ ... \\ \varphi_k(x) \end{pmatrix}$. Pour y élément de $\mathrm{Im}(\Phi)$, de la forme $\Phi(x)$, on pose $h(y) = f(x)$. On vérifie que cette définition ne dépend pas du représentant x choisi, car si $y = \Phi(x) = \Phi(x')$, alors pour tout i, $\varphi_i(x - x') = 0$ et donc $f(x - x') = 0$ et donc $f(x) = f(x')$. On étend h à $\mathbf{K}^k$ en le prolongeant par 0 sur un supplémentaire de $\mathrm{Im}(\Phi)$. On définit ainsi une forme linéaire h sur $\mathbf{K}^k$, donc $h(y)$ s'exprime comme combinaison linéaire de $y_1, ..., y_k$:

$$\exists\ (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbf{K}^k,\ \forall\ y \in \mathbf{K}^k,\ h(y) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$$

Donc $\forall\ x \in E,\ f(x) = h(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x)$

Donc f est bien combinaison linéaire de $\varphi_1, ..., \varphi_k$.
Ce type de raisonnement est un cas particulier d'une situation plus générale, traitée dans le chapitre L3/QUOTIENT et appelée **factorisation à droite d'une application linéaire.**

❑ (v) : (v.b) $\Rightarrow$ (v.a) est trivial.
Réciproquement, supposons (v.a). Prenons une base $(e_1, ..., e_n)$ de E et considérons les $e_j^* \circ u_i$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le n$. Ce sont des formes linéaires, et si x est un élément de $\bigcap_{i,j} \mathrm{Ker}(e_j^* \circ u_i)$, alors :

$\forall\ i, \forall\ j, e_j^*(u_i(x)) = 0$

donc $\forall\ i, u_i(x) = 0$ puisque toutes les composantes $e_j^*(u_i(x))$ de $u_i(x)$ sont nulles

donc $x \in \mathrm{Ker}(u_1) \cap \mathrm{Ker}(u_2) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(u_p)$

donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$ d'après l'hypothèse (v.a)

On a ainsi montré que $\bigcap\limits_{i,j} \mathrm{Ker}(e_j^* \circ u_i) \subset \mathrm{Ker}(f)$. D'après le (iv), f est combinaison linéaire des $e_j^* \circ u_i$:

$$\exists\ (\lambda_{ij}) \in \mathbf{K}^{np}, f = \sum_{ij} \lambda_{ij}\ e_j^* \circ u_i = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\ e_j^*) \circ u_i$$

Il suffit de prendre $\psi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\ e_j$.

❑ (vbis) : On peut aussi utiliser la transposée des u_i. En effet, l'égalité

$$f = \psi_1 \circ u_1 + \psi_2 \circ u_2 + ... + \psi_p \circ u_p$$

peut s'écrire :

$$f = u_1^{\mathsf{T}}(\psi_1) + u_2^{\mathsf{T}}(\psi_2) + ... + u_p^{\mathsf{T}}(\psi_p)$$

Il s'agit donc de montrer que, si $\mathrm{Ker}(u_1) \cap \mathrm{Ker}(u_2) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(u_p) \subset \mathrm{Ker}(f)$, alors f appartient à $\mathrm{Im}(u_1^{\mathsf{T}}) + \mathrm{Im}(u_2^{\mathsf{T}}) + ... + \mathrm{Im}(u_p^{\mathsf{T}})$. Or on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(u_1^{\mathsf{T}}) + \mathrm{Im}(u_2^{\mathsf{T}}) + ... + \mathrm{Im}(u_p^{\mathsf{T}}) &= \mathrm{Ker}(u_1)^{\mathrm{o}} + \mathrm{Ker}(u_2)^{\mathrm{o}} + ... + \mathrm{Ker}(u_p)^{\mathrm{o}} \\ &= (\mathrm{Ker}(u_1) \cap \mathrm{Ker}(u_2) \cap ... \cap \mathrm{Ker}(u_p))^{\mathrm{o}} \\ &\supset \mathrm{Ker}(f)^{\mathrm{o}}\end{aligned}$$

Comme f appartient à $\mathrm{Ker}(f)^{\mathrm{o}}$, on a bien f élément de $\mathrm{Im}(u_1^{\mathsf{T}}) + \mathrm{Im}(u_2^{\mathsf{T}}) + ... + \mathrm{Im}(u_p^{\mathsf{T}})$.

EXEMPLES :

❑ Si on se donne cinq points de $\mathbf{R}^2$, il existe au moins une conique ou une droite passant par ces cinq points. En effet, on cherche (a, b, c, d, e, f) non nul dans $\mathbf{R}^6$ tels que :

$$ax_k^2 + bx_ky_k + cy_k^2 + dx_k + ey_k + f = 0$$

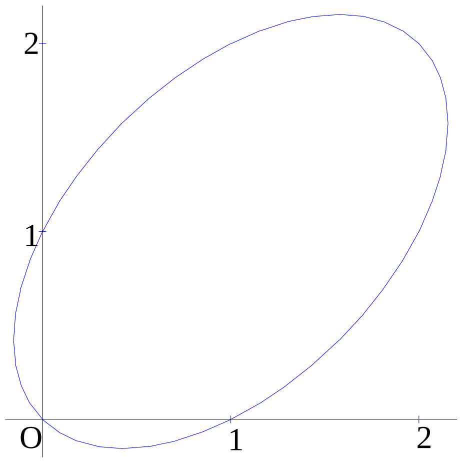
où les $(x_k\ y_k)$, $1 \le k \le 5$ sont les coordonnées des cinq points. (a, b, c, d, e, f) est donc élément de $\bigcap\limits_{k=1}^{5} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ où φ_k est la forme linéaire dont la matrice ligne est $(x_k^2, x_ky_k, y_k^2, x_k, y_k, 1)$. D'après le (iii), $\bigcap\limits_{k=1}^{5} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ est au moins une droite vectorielle, donc on peut bien trouver un élément non nul dedans.

Par exemple, si l'on prend les cinq points (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2) et (2, 1), les solutions (a, b, c, d, e, f) appartiennent à la droite engendrée par $(1, -1, 1, -1, -1, 0)$, de sorte qu'il existe une unique conique passant par les cinq points, d'équation $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$. Cette équation peut s'écrire $(x + y - 2)^2 + 3(x - y)^2 = 4$, montrant qu'il s'agit d'une ellipse qu'on peut paramétrer par :

$$\left[\begin{array}{l} x + y - 2 = 2\cos(t) \\ x - y = \dfrac{2\sin(t)}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

ou

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 + \cos(t) + \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{3}} \\ y = 1 + \cos(t) - \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$



❑ Dans $\mathbf{R}^3$, soient φ_1, φ_2 et f les formes linéaires de matrices respectives $(1\ 2\ -1)$, $(1\ 0\ 1)$ et $(2\ 2\ 0)$. Vérifions que $\mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et que f est bien combinaison linéaire de φ_1 et φ_2.

$H_1 = \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ est le plan d'équation $x + 2y - z = 0$.

$H_2 = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ est le plan d'équation $x + z = 0$.

$H_1 \cap H_2$ est la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(f)$ est le plan d'équation $x + y = 0$. Il contient bien le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$f = \varphi_1 + \varphi_2$

❑ Dans $\mathbf{R}^3$, soient u_1 et u_2 les endomorphismes de matrices respectives $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et soit f la forme linéaire de matrice $(2\ 2\ 0)$. $\mathrm{Ker}(u_1)$ et $\mathrm{Ker}(u_2)$ sont égaux aux plans H_1 et H_2 de l'exemple précédent, de sorte que $\mathrm{Ker}(u_1) \cap \mathrm{Ker}(u_2) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Déterminons des formes linéaires ψ_1 et ψ_2 telles que $f = \psi_1 \circ u_1 + \psi_2 \circ u_2$. Dans la base duale de la base canonique de $\mathbf{R}^3$, f a pour composantes $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, et u_1^{T} et u_2^{T} ont respectivement pour matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a :

$\mathrm{Im}(u_1^{\mathrm{T}})$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = u_1^{\mathrm{T}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$

$\mathrm{Im}(u_2^{\mathrm{T}})$ est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2^{\mathrm{T}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$

$\mathrm{Im}(u_1^{\mathrm{T}}) + \mathrm{Im}(u_1^{\mathrm{T}})$ est le plan d'équation $x - y - z = 0$, qui contient bien f.

Comme $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = u_1^{\mathrm{T}}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) + u_2^{\mathrm{T}}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$, on peut prendre ψ_1 et ψ_2 dont les composantes dans la base duale de la base canonique sont respectivement $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Autrement dit, leurs matrices lignes dans la base canonique sont (0 1 0) et (1 0 0). $f = \psi_1 \circ u_1 + \psi_2 \circ u_2$ s'écrit :

$$(2\ 2\ 0) = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\1 & 2 & -1\\-2 & -4 & 2\end{pmatrix} + (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 0 & -1\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

On notera bien que, si on parle des matrices des formes linéaires dans la base canonique, ce sont des lignes. Si on parle des composantes des formes linéaires dans la base duale, ce sont des colonnes. Le passage de la première situation à la seconde revient à raisonner sur les transposées des matrices.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Dans $\mathbf{R}^3$, on se donne les formes linéaires suivantes :

$\varphi_1(x, y, z) = x + 2y - 3z$
$\varphi_2(x, y, z) = 5x - 3y$
$\varphi_3(x, y, z) = 2x - y - z$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forme une base du dual de $\mathbf{R}^3$. De quelle base de $\mathbf{R}^3$ est-elle la base duale ?

Exo.2) Soit $(e_1, ..., e_n)$ base d'un espace vectoriel E. Soit $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale de $(e_1, ..., e_n)$. Comment se modifie la base duale lorsqu'on l'on effectue sur la base initiale les opérations élémentaires suivantes :

a) permuter e_i et e_j
b) multiplier e_i par λ non nul
c) remplacer e_i par $e_i - e_j$, j étant différent de i

Exo.3) Soit G un sous-espace vectoriel de E*, espace dual d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que G sépare les éléments de E, au sens suivant :

$$\forall\ (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow \exists\ \varphi \in G, \varphi(x) \neq \varphi(y)$$

a) Montrer que G = E*.
b) Donner l'énoncé dual de la propriété qu'on vient de montrer.

Exo.4) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$, et E* son espace dual. Montrer les deux propriétés suivantes :

a) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$\{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in F, \varphi(x) = 0\} = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in G, \varphi(x) = 0\}$$

Montrer que F = G.

b) Soient H et L deux sous-espaces vectoriels de E* tels que :

$$\{x \in E \mid \forall\ \varphi \in H, \varphi(x) = 0\} = \{x \in E \mid \forall\ \varphi \in L, \varphi(x) = 0\}$$

Montrer que H = L.

Exo.5) Soit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$.

a) Montrer que E* est isomorphe à $E_1^* \times E_2^* \times \dots \times E_n^*$.

b) Qu'en est-il si la somme n'est pas égale à E ?

c) Et si elle n'est pas directe ?

Exo.6) Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels distincts. On considère la famille des $2n$ formes linéaires sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ définies par $P \to P(x_i)$ et $P \to P'(x_i)$. Montrer que ces $2n$ formes linéaires forment une base de l'espace dual de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Exo.7) Soit $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie E, et soit $f : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) Les formes linéaires f_i sont indépendantes.

(ii) Le noyau de f^T est réduit à $\{0\}$.

(iii) f est surjective.

Exo.8) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, a un élément non nul de E, φ une forme linéaire non nulle sur E. Soient $\varphi \otimes a$ et g les endomorphismes de E définis par :

$\forall x \in E, (\varphi \otimes a)(x) = \varphi(x)a$

et $g = \mathrm{Id}_E + \varphi \otimes a$

a) Etudier à quelle condition g est inversible.

b) Dans ce cas, quel est son inverse ?

Exo.9) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note E* l'espace dual de E et u^T l'endomorphisme de E* adjoint de u.

a) Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si F^o est stable par u^T.

b) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Montrer que F^o et G^o sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E*.

c) On suppose que tout sous-espace de E stable par u possède un supplémentaire stable par u. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E* stable par u^T possède un supplémentaire stable par u^T.

Exo.10) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $1 \le i \le n-1$, soit v_i un élément de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et φ_i un élément de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})$. On suppose que $\det((\varphi_i v_j)_{1\le j\le n-1, 1\le j\le n-1}) \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe une unique matrice A élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$\det(A) = 1$ et $\forall i \in [\![1, n-1]\!], Ae_i = v_i$ et $\varphi_i A e_n = 0$

b) Exemple avec $n = 2$. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\varphi_1 = (1 \ \ -1)$. Déterminer A.

c) Exemple avec $n = 3$. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_1 = (1 \ 1 \ 1)$, $\varphi_2 = (-1 \ 0 \ 1)$. Déterminer A.

2- Solutions

Sol.1) Dans la base duale de la base canonique, φ_1, φ_2 et φ_3 ont pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, système de rang 3. Donc $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forme une base du dual de $\mathbf{R}^3$, qui est de dimension 3.

On vérifiera que la base antéduale est donnée par $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ -13 \end{pmatrix}$, soit en résolvant pour chaque i le système $\varphi_j(\varepsilon_i) = \delta_{ij}$, $1 \leq j \leq 3$, soit en calculant Q^{-1} ou $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ formée des matrices lignes de φ_1, φ_2, φ_3.

Sol.2) a) On permute e_i^* et e_j^*
b) On divise e_i^* par λ
c) On remplace e_j^* par $e_j^* + e_i^*$

Sol.3) a) Par contraposition, si $G \neq E^*$, il faut montrer qu'il existe deux éléments distincts x et y de E ayant même image par tout élément de G. Soit $(\varphi_1,... \varphi_p)$ une base de G, avec $p < n$, complétée en une base $(\varphi_1,... \varphi_n)$ de E*. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base antéduale. Alors G ne sépare pas les éléments $x = 0$ et $y = e_n$.
b) L'énoncé dual est le suivant :
Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$\forall\, (\varphi, \psi) \in E^{*2}, \varphi \neq \psi \Rightarrow \exists\, x \in F, \varphi(x) \neq \varphi(y)$$

Alors F = E.
On peut calquer la démonstration donnée en a) en échangeant les rôles des vecteurs et des formes linéaires. Par contraposition, si $F \neq E$, il faut montrer qu'il existe deux formes linéaires distinctes φ et ψ donnant la même image à tout élément de F. Soit $(e_1,... e_p)$ une base de F, avec $p < n$, complétée en une base $(e_1,... e_n)$ de E. Soit $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale. Prendre $\varphi = 0$ et $\psi = e_n^*$.

Sol.4) a) Par l'absurde, si $F \neq G$, $\exists\, e_1$ tel que $e_1 \in F$ et $e_1 \notin G$ par exemple. On complète e_1 en une base de E $(e_1, e_2, ..., e_n)$ telle que $(e_2, ..., e_r)$ soit une base de G et on considère la forme linéaire e_1^*. Alors :

$$e_1^* \in \{\varphi \in E^* \mid \forall\, x \in G, \varphi(x) = 0\} \text{ puisque } e_1^*(x) = x_1 = 0 \text{ pour tout } x \text{ de G}$$

mais $\quad e_1^* \notin \{\varphi \in E^* \mid \forall\, x \in F, \varphi(x) = 0\}$ puisque $e_1^*(e_1) = 1$
Contradiction avec l'hypothèse.
b) On peut donner une démonstration calquée de celle du a), en échangeant les rôles des vecteurs avec ceux des formes linéaires, ce qui donne :
Par l'absurde, si $H \neq L$, $\exists\, \varphi_1$ tel que $\varphi_1 \in H$ et $\varphi_1 \notin L$ par exemple. On complète φ_1 en une base de E* $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ telle que $(\varphi_2, ..., \varphi_r)$ soit une base de L et on considère le vecteur ε_1 de la base antéduale $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$. Alors :

$$\varepsilon_1 \in \{x \in E \mid \forall\, \varphi \in L, \varphi(x) = 0\} \text{ puisque } \varphi_j(\varepsilon_1) = 0 \text{ pour les } \varphi_j \text{ formant une base de L}$$

mais

$$\varepsilon_1 \notin \{x \in E \mid \forall\, \varphi \in H, \varphi(x) = 0\} \text{ puisque } \varphi_1(\varepsilon_1) = 1$$

Contradiction avec l'hypothèse.

Il est encore plus rapide de remarquer que b) n'est l'énoncé dual de a). On l'obtient en appliquant a) à l'espace E* au lieu de E, puis en utilisant l'isomorphisme ~ entre E et E**. En effet, l'égalité

$$\{x \in E \mid \forall\ \varphi \in H, \varphi(x) = 0\} = \{x \in E \mid \forall\ \varphi \in L, \varphi(x) = 0\}$$

est équivalente à :

$$\{\tilde{x} \in E^{**} \mid \forall\ \varphi \in H, \tilde{x}(\varphi) = 0\} = \{\tilde{x} \in E^{**} \mid \forall\ \varphi \in L, \tilde{x}(\varphi) = 0\}$$

ou à :

$$\{\psi \in E^{**} \mid \forall\ \varphi \in H, \psi(\varphi) = 0\} = \{\psi \in E^{**} \mid \forall\ \varphi \in L, \psi(\varphi) = 0\}$$

et cette dernière égalité est le a) appliqué à H et L au lieu de F et G, φ au lieu de x, ψ au lieu de φ. On en déduit donc que H = L.

Si on ne souhaite pas utiliser les notions du bidual ou de base antéduale, on peut choisir une base de E et sa base duale dans E*. Traduisons le a) en raisonnant sur les vecteurs colonnes des composantes X des vecteurs de E et sur les matrices lignes Y^T des formes linéaires sur E. Il suffira ensuite de remarquer que la propriété b) est identique à la propriété a) en permutant les rôles des lignes et des colonnes.

un vecteur x de E a pour colonne de composantes un élément X élément de $\mathbf{K}^n = \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$

une forme linéaire φ a une matrice ligne Y^T élément de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$, $Y \in \mathbf{K}^n$

F et G correspondent à des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$. Si on prend la transposée des éléments de F et G, on obtient des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$ que nous noterons F^T et G^T.

H et L correspondent à des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$. Si on prend la transposée des éléments de H et L, on obtient des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$ que nous noterons H^T et L^T.

Dans le a), on a montré que, F et G étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$, si :

$$\{Y^T \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}) \mid \forall\ X \in F, Y^TX = 0\} = \{Y^T \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}) \mid \forall\ X \in G, Y^TX = 0\}$$

alors F = G.

Dans le b), on demande de montrer que, H et F étant des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$, si :

$$\{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K}) \mid \forall\ Y^T \in H, Y^TX = 0\} = \{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K}) \mid \forall\ Y^T \in L, Y^TX = 0\}$$

alors H = L. Prenons la transposée de tous les éléments intervenant dans cette implication et posons $F = H^T$, $G = L^T$. L'hypothèse du b) devient :

$$\{X^T \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}) \mid \forall\ Y \in H^T = F, X^TY = 0\} = \{X^T \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}) \mid \forall\ Y \in L^T = G, X^TY = 0\}$$

et on reconnaît l'hypothèse du a) en échangeant les lettres X et Y, permettant de conclure que F = G et donc que H = L.

Sol.5) a) On a un isomorphisme de E* dans $E_1^* \times E_2^* \times ... \times E_n^*$, qui à f associe $(f|_{E_1}, ..., f|_{E_n})$.
Cette application est en effet injective : si $(f|_{E_1}, ..., f|_{E_n}) = 0$ alors $f = 0$ car $E = E_1 + ... + E_n$.
Elle est surjective car si on se donne $(f_1, ..., f_n)$, on peut définir f par :

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

b) Si la somme n'est pas égale à E, l'application n'est pas injective. En effet, prendre G supplémentaire de la somme. On peut prendre f non nulle telle que $(f|_{E_1}, ..., f|_{E_n})$ soit nul. Il suffit pour cela de prendre $f_{|G}$ non nulle.

c) Si la somme n'est pas directe, l'application n'est pas surjective. Prendre les x_i non tous nuls tels que $0 = \sum x_i$ et choisir les f_i de façon que $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \neq 0$. On ne pourra pas trouver de f telle que $f_i = f|_{E_i}$.

Sol.6) Considérons l'application $\Phi : P \in \mathbf{R}_{2n-1}[X] \to \begin{pmatrix} P(x_1) \\ \dots \\ P(n) \\ P'(x_1) \\ \dots \\ P'(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$ qui est linéaire. Son noyau est formé des polynômes de $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$ ayant une racine double en x_1, ..., x_n. Un tel polynôme est donc multiple de $(X - x_1)^2...(X - x_n)^2$, qui est de degré $2n$ .Or il est lui-même de degré inférieur ou égal à $2n - 1$. Donc il est nul. Donc Φ est injective. Comme $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$ et $\mathbf{R}^{2n}$ ont même dimension, le théorème du rang entraîne que Φ est également surjective. Donc Φ est un isomorphisme. Il existe donc une base de $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$ dont l'image est la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$. Les $2n$ formes linéaires vérifieront alors les relations exigées pour être une base duale de la base de $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$ ainsi trouvée.

Sol.7) Pour déterminer si les f_i sont linéairement indépendantes, on cherche les a_1, ..., a_n tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$. Si $\varphi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ est la forme linéaire définie par $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, cela revient à chercher les φ telles que $\varphi \circ f = 0$, ou telles que φ soit dans le noyau de f^{T}. On a ainsi les équivalences suivantes :

(i)
$\Leftrightarrow$ les f_i sont linéairement indépendantes
$\Leftrightarrow$ les seules solutions a_i à l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$ sont nulles
$\Leftrightarrow$ la seule forme linéaire $\varphi(y) = \sum a_i y_i$ solution de $\varphi \circ f = 0$ est $\varphi = 0$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f^{\mathsf{T}}) = \{0\}$
$\Leftrightarrow$ (ii)
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f)^{\mathrm{o}} = \{0\}$ car $\mathrm{Ker}(f^{\mathsf{T}}) = \mathrm{Im}(f)^{\mathrm{o}}$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = {}^{\mathrm{o}}\{0\} = \mathbf{K}^n$
$\Leftrightarrow$ f surjective
$\Leftrightarrow$ (iii)

Sans utiliser la notion de transposition, on peut montrer l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) par contraposition :

(non iii)
$\Leftrightarrow$ f non surjective
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbf{K}^n$
$\Leftrightarrow$ $\exists$ H hyperplan, $\mathrm{Im}(f) \subset H$
$\Leftrightarrow$ $\exists\ \varphi$ forme linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}$ non identiquement nulle telle que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$
$\Leftrightarrow$ $\exists\ \varphi$ forme linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}$ non identiquement nulle telle $\varphi \circ f = 0$

$\Leftrightarrow \quad \exists\ (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\ \sum_{k=1}^{n} a_i f_i = 0$ en écrivant que φ est de la forme $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$

$\Leftrightarrow \quad (f_1, ..., f_n)$ est une famille liée

$\Leftrightarrow \quad$ (non i)

Sol.8) a) Etant en dimension finie, il suffit de voir si g est injective. Cherchons donc son noyau :

$$x \in \mathrm{Ker}(g)$$

$\Leftrightarrow 0 = g(x) = x + \varphi(x)a$

donc nécessairement, x est colinéaire à a : $\exists\ \lambda$, $x = \lambda a$, qu'on reporte dans l'équation précédente. a étant non nul, on obtient $\lambda + \lambda\varphi(a) = 0$. g est inversible si et seulement si la seule solution est $\lambda = 0$, si et seulement si $1 + \varphi(a) \neq 0$.

b) Soit y élément de E, cherchons x tel que :

$$y = g(x) = x + \varphi(x)a$$

Nécessairement :

$$\varphi(y) = \varphi(x + \varphi(x)a) = \varphi(x) + \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(x)(1 + \varphi(a))$$

donc nécessairement :

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}$$

et donc nécessairement :

$$x = y - \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}\, a$$

On a montré que, si x existe, il doit être de la forme précédente. Il convient de vérifier que le x ainsi trouvé a bien y comm image par g :

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \varphi(x)a \\ &= y - \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}\, a + \varphi\Big(y - \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}\, a\Big)\, a \\ &= y - \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}\, a + \Big(\varphi(y) - \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}\, \varphi(a)\Big)\, a \\ &= y - \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}\, a + \frac{\varphi(y)}{1 + \varphi(a)}\, a \\ &= y \end{aligned}$$

Ainsi, $g^{-1} = \mathrm{Id}_E - \dfrac{1}{1 + \varphi(a)}\, \varphi \otimes a$.

On trouvera un exercice analogue traité matriciellement dans le chapitre L1/MATRICES.PDF

Sol.9) a) Soit $\varphi \in F^o$. Alors, pour tout x de F, $u(x)$ appartient à F et :

$$\begin{aligned} u^T(\varphi)(x) &= (\varphi \circ u)(x) \\ &= \varphi(u(x)) \\ &= 0 \qquad \text{car } u(x) \in F \text{ et } \varphi \in F^o \end{aligned}$$

Donc $u^T(\varphi)$ appartient à F^o. On a ainsi montré que :

F stable par $u \Rightarrow F^o$ stable par u^T

Par la même implication appliquée à F^o et u^T dans E*, on a, en utilisant l'isomorphisme ~ entre E et E** :

F^o stable par u^T

$\Rightarrow \quad F^{oo}$ stable par $(u^T)^T$

$\Rightarrow \quad \tilde{\text{F}}$ stable par $\sim \circ u \circ \sim^{-1}$

$\Rightarrow \quad (\sim \circ u \circ \sim^{-1})(\tilde{\text{F}}) \subset \tilde{\text{F}}$

$\Rightarrow \quad (\sim \circ u)(\text{F}) \subset \tilde{\text{F}}$

$\Rightarrow \quad u(\text{F}) \subset \text{F}$ en composant à gauche par $\sim^{-1}$

$\Rightarrow$ F est stable par u

D'où l'équivalence.

b) $\varphi \in \text{F}^{\text{o}} \cap \text{G}^{\text{o}} \Rightarrow \varphi$ est nulle sur F et φ est nulle sur G donc φ est nulle sur E = F $\oplus$ G. On a ainsi montré que $\text{F}^{\text{o}} \cap \text{G}^{\text{o}} = \{0\}$.

On peut ensuite montrer que $\text{F}^{\text{o}} \oplus \text{G}^{\text{o}} = \text{E}^*$ en raisonnant sur les dimensions :

$$\begin{aligned}\dim(\text{F}^{\text{o}} \oplus \text{G}^{\text{o}}) &= \dim(\text{F}^{\text{o}}) + \dim(\text{G}^{\text{o}}) \\ &= \dim(\text{E}) - \dim(\text{F}) + \dim(\text{E}) - \dim(\text{G}) \\ &= \dim(\text{E}) \qquad \text{car } \dim(\text{F}) + \dim(\text{G}) = \dim(\text{E}) \\ &= \dim(\text{E}^*)\end{aligned}$$

c) Soit L un sous-espace vectoriel de E*, stable par u^{T}. Posons F = ${}^{\text{o}}\text{L} \subset \text{E}$ de sorte que L = F^{o}. D'après a), puisque L = F^{o} est stable par u^{T}, F est stable par u. Soit G un supplémentaire de F stable par u. Alors, d'après b) G^{o} est un supplémentaire de F^{o}, et il est stable par u^{T} d'après a).

Sol.10) a) $(v_1, ..., v_{n-1})$ forme une famille libre de même que $(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$. En effet, si l'un des v_j (respectivement des φ_i) était lié aux autres, une colonne (respectivement une ligne) du déterminant $\det((\varphi_i v_j)_{1\leq j\leq n-1, 1\leq j\leq n-1})$ serait liée aux autres et le déterminant serait nul.

Soit donc une matrice A telle que $\text{A}e_i = v_i$ pour i variant de 1 à $n - 1$. Les $n - 1$ premières colonnes de A sont donc les v_i et sont déterminées. Reste à définir la dernière colonne $\text{A}e_n$.

Celle-ci doit appartenir au noyau de tous les φ_i (vus comme formes linéaires) puisque, pour tout i, $\varphi_i\text{A}e_n = 0$. Or, les φ_i sont indépendants, donc $\text{Ker}(\varphi_1) \cap ... \cap \text{Ker}(\varphi_{n-1})$ est de dimension 1 (voir le paragraphe du cours traitant des hyperplans). C'est une droite vectorielle engendrée par un vecteur a.

a est linéairement indépendant des v_j car s'il existait $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ tels que $a = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j v_j$, on aurait, pour tout i :

$$0 = \varphi_i(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \varphi_i(v_j)$$

or le déterminant de ce système d'inconnues les λ_j est précisément $\det((\varphi_i v_j)) \neq 0$. Donc le système admettrait comme seule solution $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = 0$ et on aurait $a = 0$. On peut (et on doit) donc prendre comme dernière colonne de A : $\text{A}e_n = \lambda a$ pour un certain λ. Enfin, λ est défini par la condition $\det(\text{A}) = \det(v_1, ..., v_{n-1}, \lambda a) = 1$ puisqu'on vient de montrer que $\det(v_1, ..., v_{n-1}, a) \neq 0$. Ainsi $\lambda = \dfrac{1}{\det(v_1, ..., v_{n-1}, a)}$ et :

$$\text{A}e_n = \frac{1}{\det(v_1, ..., v_{n-1}, a)}\, a$$

et cette dernière expression est en fait indépendante du choix de a puisque si on change de vecteur directeur a, numérateur et dénominateur seront multipliés par un même facteur qui se simplifiera. C'est cette indépendance de choix qui montre l'unicité de $\text{A}e_n$.

b) On a bien $\varphi_1 v_1 = -1 \neq 0$. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\det(v_1, a) = -1$ donc $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) On a bien $\begin{vmatrix} \varphi_1 v_1 & \varphi_1 v_2 \\ \varphi_2 v_1 & \varphi_2 v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. a est solution du système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ donc par exemple $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\det(v_1, v_2, a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 2 - 1 + 2 - 2 = 2$ donc $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

◆