

Vous avez toute liberté pour télécharger, imprimer, photocopier ce cours et le diffuser gratuitement. Toute diffusion à titre onéreux ou utilisation commerciale est interdite sans accord de l'auteur.

Si vous êtes le gestionnaire d'un site sur Internet, vous avez le droit de créer un lien de votre site vers mon site, à condition que ce lien soit accessible librement et gratuitement. Vous ne pouvez pas télécharger les fichiers de mon site pour les installer sur le vôtre.

ARCS PARAMETRES

Plan

I : Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

- 1) Déivation
- 2) Déivation d'une composée de fonctions
- 3) Fonctions de classe C^n

II : Arcs paramétrés

- 1) Interprétation physique
- 2) Etude locale
- 3) Asymptotes dans le plan
- 4) Plan d'étude d'un arc paramétré dans le plan
- 5) Courbes en coordonnées polaires

III : Etude métrique des courbes

- 1) Longueur d'une courbe
- 2) Abscisse curviligne
- 3) Repère de Frenet dans le plan
- 4) Courbure, rayon de courbure, centre de courbure
- 5) Exemples
- 6) Repère de Frenet en dimension 3

Exercices

- 1) Enoncés
- 2) Solutions

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels E, F, etc. considérés sont supposés de dimension finie.

I : Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Ce paragraphe a pour but de généraliser les procédés de dérivation aux fonctions de \mathbf{R} dans E, E étant un espace vectoriel normé de dimension finie sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Cette généralisation, un peu fastidieuse, ne présente pas de difficultés particulière et est appliquée couramment en physique, où l'on considère des grandeurs vectorielles (vitesse, accélération) fonctions du temps.

1- Déivation

Soit $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow E$. f est dérivable en x_0 si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0))$ existe. Cette limite s'appelle **dérivée** de f en x_0 . Si f est dérivable en tout point de I, et de dérivée continue, on dit que f est C^1 et on note l'application dérivée f' , ou Df , $\frac{df}{dx}$.

Si f désigne la position d'un point mobile en fonction du temps t , $f'(t)$ n'est autre que la vitesse vectorielle de ce point. C'est également un vecteur directeur de la tangente à l'arc paramétré décrit par le point, à condition que la dérivée soit non nulle (point dit régulier).

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$, on peut raisonner composante par composante. En effet :

$$\frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) \\ f_2(x_0 + h) - f_2(x_0) \\ \dots \\ f_n(x_0 + h) - f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

et la limite existe si et seulement si elle existe pour chaque composante, autrement dit si et

seulement si chaque composante est dérivable. On a alors $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \dots \\ f_n' \end{pmatrix}$.

Plus généralement, si E est muni d'une base (e_1, \dots, e_n) et si $f(x) = f_1(x) e_1 + \dots + f_n(x) e_n$, alors f est dérivable si et seulement si chaque f_i l'est et $f' = f_1' e_1 + \dots + f_n' e_n$.

Un cas particulier est $E = \mathbb{C}$, avec $f = \operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)$. f est dérivable si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont, et $f' = (\operatorname{Re}(f))' + i (\operatorname{Im}(f))'$. Il en résulte que, si f est dérivable, \overline{f} aussi, et que :

$$D(\overline{f}) = D(\operatorname{Re}(f) - i \operatorname{Im}(f)) = D(\operatorname{Re}(f)) - i D(\operatorname{Im}(f)) = \overline{D(f)}$$

2- Déivation d'une composée de fonctions

PROPOSITION

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ une application dérivable et $u: E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors $u \circ f$ est dérivable et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Démonstration 1 :

$$\begin{aligned} \square \quad f(x_0 + h) &= f(x_0) + h f'(x_0) + o(h) \\ \Rightarrow \quad u(f(x_0 + h)) &= u(f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)) \\ &= u(f(x_0)) + h u(f'(x_0)) + u(o(h)) \end{aligned}$$

avec $u(o(h)) = u(ho(1)) = hu(o(1)) = ho(1) = o(h)$ car u étant linéaire en dimension finie est continue (voir le chapitre L2/EVNORME.PDF), et si $o(1)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, il en est de même de $u(o(1))$. Il en résulte que $u \circ f$ est dérivable et que sa dérivée vaut $u \circ f'$.

Démonstration 2 :

SQF On prend une base (e_1, \dots, e_n) de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de F . La matrice de u ayant pour terme général

a_{ij} et f ayant pour composantes $\begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$, $u \circ f$ a pour composantes $\begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_p \end{pmatrix}$ avec :

$$g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$$

La dérivée de $u \circ f$ a pour composantes $\begin{pmatrix} g_1' \\ \dots \\ g_p' \end{pmatrix}$ avec :

$$g_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j'$$

où l'on reconnaît $u \circ f'$.

Le cas où u n'est pas linéaire est étudié dans les chapitres L1/CALCDIF1.PDF et L2/CALCDIF2.PDF.

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions dérivables de \mathbf{R} dans E et F respectivement, et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans un espace vectoriel G . On peut alors considérer l'application de \mathbf{R} dans G , qui à x associe $B(f(x), g(x))$, application que nous noterons $B(f, g)$. Alors $B(f, g)$ est dérivable et sa dérivée vaut $B(f', g) + B(f, g')$.

Démonstration 1 :

$$\begin{aligned} \square \quad f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + o(h) \\ g(x_0 + h) &= g(x_0) + hg'(x_0) + o(h) \\ \Rightarrow B(f(x_0 + h), g(x_0 + h)) &= B(f(x_0) + hf'(x_0) + o(h), g(x_0) + hg'(x_0) + o(h)) \\ &= B(f(x_0), g(x_0)) + hB(f'(x_0), g(x_0)) + hB(f(x_0), g'(x_0)) + \dots \end{aligned}$$

Les points de suspension renferment tous les autres termes, dont on vérifiera qu'ils sont tous de la forme $o(h)$. Pour le voir, utiliser le fait qu'une application bilinéaire définie sur des espaces vectoriels de dimension finie est continue.

Démonstration 2 :

\square On prend une base (e_1, \dots, e_n) de E , $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de F et (η_1, \dots, η_m) de G . $B(e_i, \varepsilon_j)$ est un vecteur de G ayant pour composante sur η_k le scalaire b_{ijk} . Si f a pour composantes $\begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$, et g a pour composantes $\begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_p \end{pmatrix}$, alors $B(f, g) = B\left(\sum_{i=1}^n f_i e_i, \sum_{j=1}^p g_j \varepsilon_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i g_j B(e_i, \varepsilon_j)$. Sa composante sur η_k est :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i g_j b_{ijk}$$

dont la dérivée vaut $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i' g_j b_{ijk} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p f_i g_j' b_{ijk}$ et l'on reconnaît la composante de $B(f', g) + B(f, g')$.

Les exemples les plus classiques d'applications bilinéaires sont le produit scalaire et le produit vectoriel. On a donc :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle' &= \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle \\ \langle \|f\|^2 \rangle' &= \langle f', f \rangle + \langle f, f' \rangle \\ &= 2 \langle f', f \rangle \end{aligned}$$

En particulier, si f est une fonction qui, à x , associe un vecteur unitaire, on a $\langle f', f \rangle = 0$.

En dimension 3, dans un espace vectoriel euclidien orienté, on a :

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$$

On peut étendre le résultat précédent aux formes multilinéaires. La dérivée d'un déterminant est :

$$(\det(f_1, \dots, f_n))' = \det(f_1', f_2, \dots, f_n) + \det(f_1, f_2', \dots, f_n) + \dots + \det(f_1, f_2, \dots, f_n')$$

PROPOSITION

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ deux applications dérivables. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

La démonstration est la même celle vue dans le cours de première année L1/DERIVEE.PDF, lorsque f arrive dans \mathbb{R} .

3- Fonctions de classe C^n

f est de classe C^n si f est n fois continûment dérivable. On note $C^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n d'un intervalle I dans E . Il s'agit d'un espace vectoriel.

II : Arcs paramétrés

1- Interprétation physique

Une fonction f continue d'un intervalle I de \mathbb{R} dans un espace de dimension finie définit un **arc paramétré** (ou courbe paramétrée). En général, la fonction considérée est de classe C^k avec $k \geq 2$. L'interprétation physique est la suivante : t élément de I désigne le temps. Plutôt que de voir $f(t)$ comme un vecteur dépendant de t , il peut être commode de le voir comme indiquant la position depuis une origine O d'un point mobile qu'on préfèrera noter $M(t)$, de sorte que $f(t) = OM(t)$. La vitesse vectorielle V du point mobile est donnée par $f'(t)$ et son accélération vectorielle a par $f''(t)$. (Les dérivées peuvent se calculer composante par composante si une base de l'espace d'arrivée est choisie). En coordonnées cartésiennes dans le plan muni d'une base (i, j) , si $f = xi + yj$, où x et y sont fonctions de t , on a :

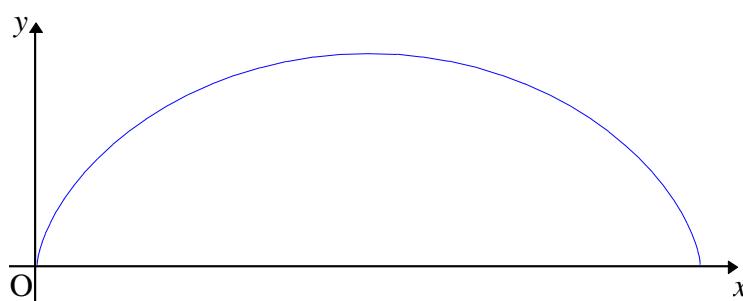
$$\begin{aligned} V &= x'i + y'j \\ a &= x''i + y''j \end{aligned}$$

EXEMPLE :

□ La **cycloïde** est la courbe parcourue par un point d'un cercle de rayon R roulant sans glisser sur une droite. Elle est paramétrée par (voir le chapitre L1/GEOMAFF.PDF) :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin(t)) \\ y = R(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

Ci-dessous, une représentation de la courbe, pour $0 \leq t \leq 2\pi$.



□ La courbe paramétrée suivante est une hélice dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$$

2- Etude locale

a) Tangente à la courbe

La configuration de l'arc au voisinage de $M(t_0)$ dépend des dérivées successives de f , et des relations de liaisons entre ces dérivées. Nous supposons f au moins C^1 . Considérons la droite $(M(t_0)M(t))$. Si cette droite admet une position limite lorsque t tend vers t_0 , alors cette position limite sera par définition la tangente à l'arc en $M(t_0)$. Deux cas sont possibles :

□ $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} M(t)M(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$ existe et est non nulle.

Le point $M(t_0)$ est dit **régulier**. Dans ce cas, la tangente est la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$. Cette situation est la plus générale. Elle correspond d'ailleurs au cas usuel des représentations graphiques des fonctions réelles. Soit g une telle fonction, dérivable. Son graphe est représenté par l'ensemble des points $M(x)$ de coordonnées $(x, g(x))$. La tangente au graphe en $M(x_0)$ est la droite de vecteur directeur $(1, g'(x_0))$. Ce vecteur n'est jamais nul.

□ $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} M(t)M(t_0) = f'(t_0)$ existe et est nulle.

Le point $M(t_0)$ est dit **stationnaire**. Comment trouver la tangente dans ce cas ? Nous supposerons que f admet un développement limité à un ordre suffisamment élevé tel que :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^n a_n + o((t - t_0)^n) \text{ avec } a_n \neq 0$$

a_n est ici un vecteur. On obtient un tel développement limité par exemple en raisonnant composante par composante. (Le cas où, à tout ordre, $a_n = 0$ est possible mais ne sera pas envisagé ici). La tangente est la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur a_n . En effet, $f(t) - f(t_0)$ est égal à

$M(t)M(t_0)$. C'est donc un vecteur directeur de la corde. Il en est de même de $\frac{1}{(t - t_0)^n} (f(t) - f(t_0))$ qui est égal à $a_n + o(1)$. a_n , qui est la limite de ce vecteur quand t tend vers t_0 , est un vecteur directeur de la tangente.

Dans le cas d'un point régulier, $n = 1$, $a_n = a_1 = f'(t_0)$.

EXEMPLES :

□ Dans le cas de la cycloïde $\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$, on a $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \neq 0 \bmod 2\pi$. La tangente à la courbe en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Par exemple, pour $t = \pi$, la tangente est parallèle à Ox .

□ Dans le cas précédent avec $t_0 = 0$, on a $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + o(t^3)$ donc :

$$f(t) = \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t^2)$$

On a ici $n = 2$, $a_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La tangente à la cycloïde au point $(0, 0)$ est parallèle à Oy .

b) Position par rapport à la tangente d'une courbe plane :

Dans ce paragraphe, on se limite aux courbes planes et on suppose que f admet en t_0 un développement limité de terme général $(t - t_0)^k a_k$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

- i) Il existe un plus petit entier n tel que : $a_n \neq 0$.
- ii) Il existe un plus petit entier m , (supérieur à n) tel que (a_n, a_m) forme une base du plan.

Le vecteur $\mathbf{M}(t_0)\mathbf{M}(t)$ peut s'écrire $X(t)a_n + Y(t)a_m$ avec :

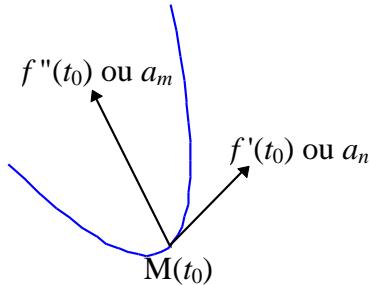
$$X(t) \sim (t - t_0)^n \quad \text{et} \quad Y(t) \sim (t - t_0)^m \text{ quand } t \text{ tend vers } t_0.$$

Plusieurs cas se rencontrent, obtenus en étudiant les signes de $X(t)$ et $Y(t)$ suivant que $t < t_0$ ou $t > t_0$:

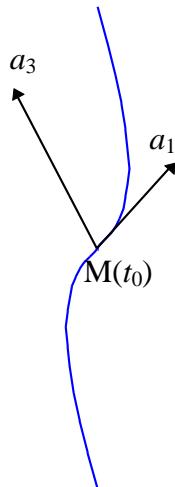
□ Le cas usuel : $n = 1$ et $m = 2$. C'est le cas des représentations graphiques de fonctions $y = g(x)$, où $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$, $f'(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_0) \end{pmatrix}$ et $f''(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ g''(x_0) \end{pmatrix}$, si la dérivée seconde de g est non nulle en x_0 .

C'est également le cas des points ordinaires des courbes planes. Ces points sont appelés **biréguliers**.

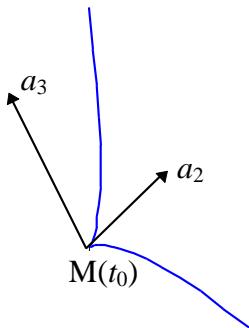
Cas analogue au cas précédent mais plus général : n impair et m pair. $X(t)$ change de signe au passage par $\mathbf{M}(t_0)$ alors que $Y(t)$ garde un signe constant. La courbe reste du même côté de la tangente. a_m indique le sens de concavité de la courbe.



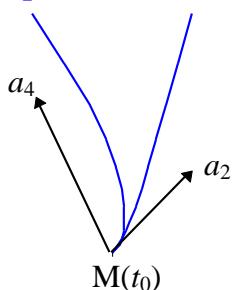
□ Cas où n est impair et m impair (en général, $n = 1$ et $m = 3$). $X(t)$ et $Y(t)$ changent de signe au passage par $\mathbf{M}(t_0)$. La courbe traverse sa tangente. On a un **point d'inflexion**.



- Cas où n est pair et m impair. $Y(t)$ change de signe au passage par $M(t_0)$. La courbe traverse la tangente, mais la composante $X(t)$ suivant le vecteur tangent garde un signe constant. On a un **point de rebroussement de première espèce**.



- Cas où n est pair et m est pair. $Y(t)$ garde un signe constant. La courbe reste du même côté de la tangente, mais la composante $X(t)$ suivant le vecteur tangent garde aussi un signe constant. On a un **point de rebroussement de deuxième espèce**.



3- Asymptotes dans le plan

On considère une courbe plane. Il y a **branche infinie** lorsque t tend vers t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

Deux cas sont faciles à déterminer :

- Si $x(t) \rightarrow a$, et $y(t) \rightarrow \infty$ alors la droite $x = a$ est asymptote.
 □ Si $x(t) \rightarrow \infty$, et $y(t) \rightarrow b$ alors la droite $y = b$ est asymptote.

Une **asymptote** est une droite telle que la distance de $M(t)$ à cette droite tend vers 0 quand t tend vers t_0 .

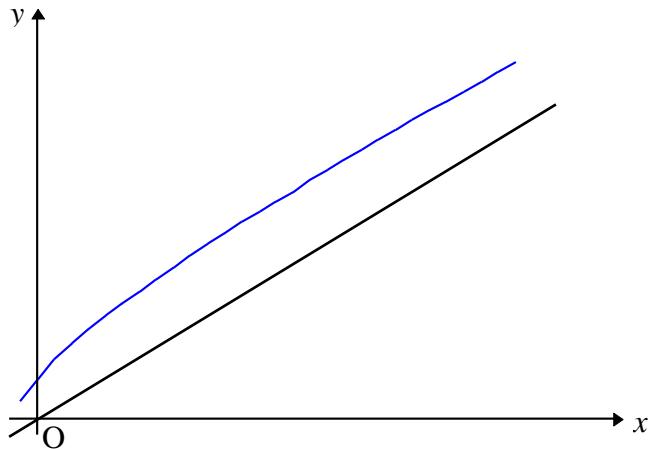
Seul le cas où x et y tendent simultanément vers l'infini pose problème. (D'autres cas pathologiques éventuels, tels que limite infinie pour x et pas de limite pour y , ne sont pas considérés ici).

- Si $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow 0$, alors il y a **branche parabolique** dans la direction Ox . (Il ne peut y avoir asymptote car $y \rightarrow \infty$). C'est le cas de la courbe $y = \sqrt{x}$.

- Si $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow \infty$, alors il y a branche parabolique dans la direction Oy . (Il ne peut y avoir asymptote car $x \rightarrow \infty$). C'est le cas de la courbe $y = x^2$.

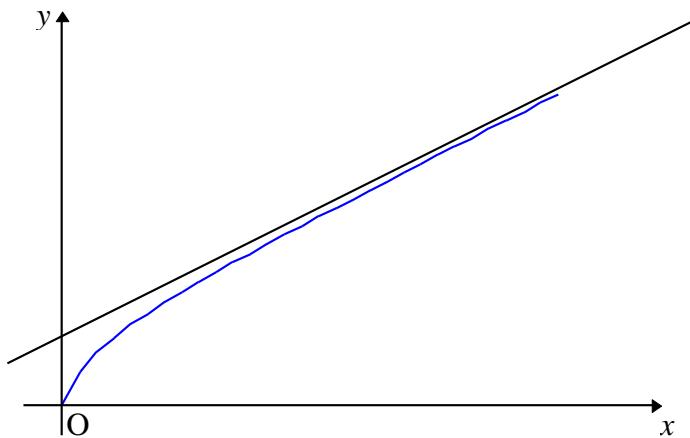
- Si $\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow a$, alors il y a **direction asymptotique** dans la direction $y = ax$. On ne peut encore savoir s'il y a asymptote. On distingue deux sous-cas :

Si $y(t) - ax(t) \rightarrow \infty$, alors il y a branche parabolique dans la direction $y = ax$.



C'est le cas par exemple de la courbe $y = x + \sqrt{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Si $y(t) - ax(t) \rightarrow b$, alors il y a asymptote d'équation $y = ax + b$.



C'est le cas par exemple de la courbe $y = x + \frac{1}{x}$ quand x tend vers l'infini.

Dans la première figure (branche parabolique), la courbe bleue s'éloigne indéfiniment mais de plus en plus lentement de la droite noire $y = ax$ correspondant à la direction asymptotique, alors que dans la seconde figure (asymptote), la courbe bleue s'approche infiniment près de la droite $y = ax + b$.

4- Plan d'étude d'un arc paramétré dans le plan

Déterminer l'ensemble de définition de $f(t)$.

Réduire l'étude à un ensemble plus petit en tenant compte des périodicités, symétries ... Les propriétés les plus courantes sont :

i) Il existe T tel que $x(t + T) = x(t)$ et $y(t + T) = y(t)$. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur T .

ii) Si, pour tout t , $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul. La courbe est parcouru deux fois, une fois pour $t \geq 0$, une fois pour $t \leq 0$.

iii) Si pour tout t , $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

iv) Si pour tout t , $x(t) = -x(-t)$ et $y(t) = y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

v) Si pour tout t , $x(t) = -x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'origine.

vi) Si pour tout t , $x(t) = y(-t)$ et $y(t) = x(-t)$, alors il suffit de faire l'étude pour t positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à la première bissectrice.

etc ...

□ Etudier simultanément les variations de x et y , leurs limites. Tracer un tableau de variation où l'on représente les signes de x' et y' et les variations de x et y .

□ Etudier les branches infinies, les points stationnaires. Déterminer d'éventuels points multiples (points pour lesquels il existe t et t' tels que $M(t) = M(t')$).

EXAMPLE :

□ Etudier la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = t + t^2 - t^3 \\ y = t^2 + t^3 - t^5 \end{cases}$.

On a :

$$\begin{cases} x' = 1 + 2t - 3t^2 = (1-t)(1+3t) \\ y' = 2t + 3t^2 - 5t^4 = t(1-t)(2+5t+5t^2) \end{cases}$$

Donc le tableau de variation est le suivant :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$+\infty$		
x'	—	0	+	1	0	—	
x	$+\infty$	↗		↗	1	↗	$-\infty$
y	$+\infty$	↗		↗	1	↗	$-\infty$
y'	—		—	0	+	—	

$$x(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \approx -0.185$$

$$y(-1/3) = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{3^5} \approx 0.078$$

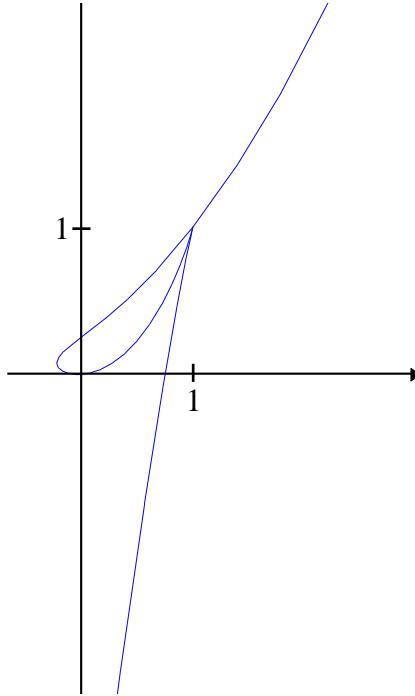
En l'infini, $x \sim -t^3$ et $y \sim t^5$, donc il y a des branches paraboliques d'axe Oy.

Il y a un point stationnaire en $t = 1$. On a :

$$\begin{cases} x'' = 2 - 6t \\ y'' = 2 + 6t - 20t^3 \end{cases}$$

donc le vecteur tangent est $\begin{pmatrix} x''(1) \\ y''(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce car $\begin{pmatrix} x'''(1) \\ y'''(1) \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à la tangente.

La courbe a l'allure suivante :



La branche parabolique dirigée vers les y négatifs coupe l'axe des ordonnées pour une valeur de t annulant $x = t + t^2 - t^3$ et donnant une valeur négative à $y = t^2 + t^3 - t^5$. Les solutions de l'équation $t + t^2 - t^3$ sont $0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La solution cherchée est $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pour laquelle $y = -2 - \sqrt{5}$.

Il semble qu'il y ait un point double en $(1, 1)$, l'un correspondant au point de rebroussement précédent, l'autre correspondant à un point régulier. Cherchons $t \neq 1$ tel que :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} t + t^2 - t^3 = 1 \\ t^2 + t^3 - t^5 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t^3 - t^2 - t + 1 = 0 = (t-1)(t^2-1) \\ t^5 - t^3 - t^2 + 1 = 0 = (t-1)(t^4 + t^3 - t - 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t^2 = 1 \\ t^4 + t^3 - t - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$t = -1$ est solution.

Il semble y avoir un point d'inflexion. Cherchons les t tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ soient colinéaires, ce qui est équivalent à dire que :

$$\begin{aligned} & \det\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} 1 + 2t - 3t^2 & 2 - 6t \\ 2t + 3t^2 - 5t^4 & 2 + 6t - 20t^3 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & 30t^5 - 30t^4 - 20t^3 + 12t^2 + 6t + 2 = 2(t-1)^2(15t^3 + 15t^2 + 5t + 1) \end{aligned}$$

La solution $t = 1$ correspondant au point de rebroussement ne nous intéresse pas. Le polynôme de degré 3 admet une unique racine réelle dont une valeur approchée est $-0,6427725889$. Le point correspondant est :

$$\begin{cases} x = 0,0359497502 \\ y = 0,2573111006 \end{cases}$$

On pourra vérifier qu'en ce point, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

5- Courbes en coordonnées polaires

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormée $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, une courbe en polaire est paramétrée par une fonction $\theta \rightarrow r(\theta)$ (ou plus généralement par une fonction $t \rightarrow (r(t), \theta(t))$) mais nous ne traiterons pas de ce cas). Un point M de la courbe de coordonnées $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est tel que $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$, avec $\mathbf{e}_r = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j}$. A noter que r n'est ici pas nécessairement positif. On a donc seulement $\sqrt{x^2 + y^2} = |r|$

On note \mathbf{e}_θ le vecteur normé directement orthogonal à \mathbf{e}_r :

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin(\theta)\mathbf{i} + \cos(\theta)\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}$$

De même :

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r$$

Il en résulte que la dérivée de \mathbf{OM} par rapport au paramètre θ est :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta} = r'\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_\theta$$

où r' est la dérivée de r par rapport à θ . Il ne peut y avoir de point stationnaire qu'en O, si r' s'annule. Si la courbe passe par l'origine, le vecteur directeur de la tangente est donné par \mathbf{e}_r . En effet, cela résulte directement de la relation $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$ qui implique que \mathbf{e}_r est un vecteur directeur de la corde joignant O à M, et donc à la limite, est un vecteur directeur de la tangente. En particulier, l'angle entre l'axe des abscisses et le vecteur tangent est exactement égal à la valeur θ du paramètre qui annule r .

Si on donne r et θ en fonction du temps t , on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{OM}}{dt} &= \mathbf{V} = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta \\ \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} &= \mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Le plan d'étude d'une courbe polaire paramétrée par $\theta \rightarrow r(\theta)$ comporte les éléments suivants :

□ Déterminer l'ensemble de définition de $r(\theta)$.

□ Réduire l'étude à un ensemble plus petit en tenant compte des périodicités, symétries ... Les propriétés les plus courantes sont :

i) Il existe T tel que $r(\theta + T) = r(\theta)$. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur T , puis une rotation d'angle kT , $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Si, pour tout θ , $r(-\theta) = r(\theta)$, alors les points $M(-\theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à Ox . Il suffit de faire l'étude pour θ positif ou nul, puis une symétrie par rapport à Ox .

iii) Si pour tout θ , $r(-\theta) = -r(\theta)$, les points $M(-\theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à Oy . Il suffit de faire l'étude pour θ positif ou nul, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des y .

iv) Si pour tout θ , $r(\pi - \theta) = r(\theta)$, alors les points $M(\pi - \theta)$ et $M(\theta)$ sont symétriques par rapport à Oy . Il suffit de faire l'étude pour $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, et d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des y .

v) Si pour tout θ , $r(\pi + \theta) = -r(\theta)$, alors les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ coïncident. Il suffit de faire une étude sur $[0, \pi]$.

etc ...

□ Etudier les variations de r en fonction de θ , ses limites. Tracer un tableau de variation.

□ Pour tracer les tangentes aux points remarquables, on notera que l'égalité $\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta} = r'\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_\theta$ permet de trouver l'angle φ entre \mathbf{e}_r et la tangente. On a en effet :

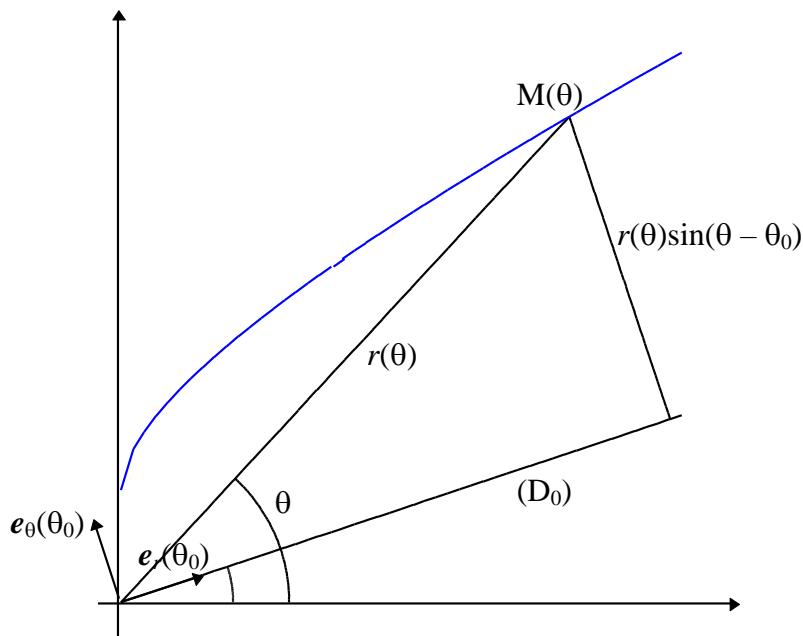
$$\tan(\varphi) = \frac{r'}{r}$$

et si $r' = 0$, alors l'angle vaut $\frac{\pi}{2} \bmod \pi$.

□ Etude des branches infinies. Il y a une branche infinie quand r tend vers l'infini lorsque θ tend vers une limite θ_0 .

Si θ_0 est elle-même infinie, on a une spirale.

Si θ_0 est finie on cherche s'il y a une asymptote en regardant l'écart entre la courbe et la droite (D_0) passant par O d'angle θ_0 avec l'axe des abscisses. Cet écart se mesure algébriquement par la quantité $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$, le long du vecteur $\mathbf{e}_\theta(\theta_0)$.



Si $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$ tend vers une limite l , alors il y a une asymptote, parallèle à la droite (D_0) ; cette asymptote est obtenue à partir de (D_0) par une translation de vecteur $l\mathbf{e}_\theta(\theta_0)$.

Si $r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$ tend vers l'infini, alors il y a une branche parabolique dans la direction D_0 .

EXAMPLE :

□ Etudier la courbe d'équation polaire $r = 1 + \tan(\frac{\theta}{2})$.

La fonction $\theta \rightarrow 1 + \tan(\frac{\theta}{2})$ est 2π -périodique, définie sauf pour θ multiple impair de π . Donc on peut faire l'étude sur $]-\pi, \pi[$.

Sur cet intervalle, r croît strictement de la valeur $-\infty$ à $+\infty$.

r s'annule pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, et dans ce cas l'angle de la tangente avec Ox fait également un angle de $-\frac{\pi}{2}$.

On peut chercher s'il y a une asymptote quand θ tend vers π . On a $\lim_{\theta \rightarrow \pi, \theta < \pi} r(\theta) = +\infty$, puis on cherche :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} r(\theta) \sin(\theta - \pi) = \lim_{h \rightarrow 0} -r(\pi - h) \sin(h) \text{ en posant } h = \pi - \theta$$

Or :

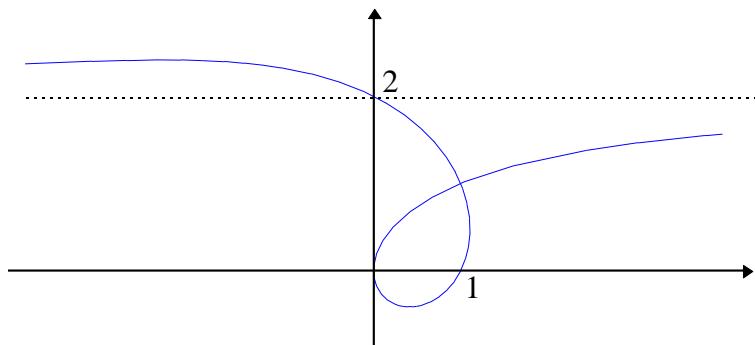
$$-r(\pi - h) \sin(h) = -\sin(h) - \tan(\frac{\pi - h}{2}) \sin(h) = \sin(h) - \frac{\sin(h)}{\tan(\frac{h}{2})} \rightarrow -2$$

Il y a une asymptote d'équation cartésienne $y = 2$ (et $x = r \cos(\theta)$ tend vers $-\infty$), l'asymptote étant obtenue par translation de l'axe des abscisses par le vecteur $-2\mathbf{e}_0 = 2\mathbf{j}$, car, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{j}$.

On peut chercher s'il y a une asymptote quand θ tend vers $-\pi$. On a $\lim_{\theta \rightarrow -\pi, \theta > -\pi} r(\theta) = -\infty$, puis on cherche :

$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi} r(\theta) \sin(\theta + \pi) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h - \pi) \sin(h) \text{ en posant } h = \theta + \pi$$

ce qui donne le même résultat que précédemment. L'asymptote est la même, mais cette fois, x tend vers $+\infty$ car r tend vers $-\infty$. On remarquera également que, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 2$ donc la courbe coupe son asymptote en ce point. Voici l'allure de la courbe



On observe un point double qu'on peut trouver en cherchant θ tel que $r(\theta) = -r(\theta + \pi)$, avec par exemple $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, ce qui conduit à :

$$1 + \tan(\frac{\theta}{2}) = -\left(1 + \tan(\frac{\theta + \pi}{2})\right) = -1 + \frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}$$

$$\Leftrightarrow \tan^2(\frac{\theta}{2}) + 2\tan(\frac{\theta}{2}) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan(\frac{\theta}{2}) = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{donc } \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= -1 + \sqrt{2} > 0 & \text{car on a choisi } \theta \text{ entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} \text{ donc } \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} &= \arctan(\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{8} & \text{à vérifier en exercice} \\
 \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

III : Etude métrique des courbes

Dans ce paragraphe (sauf au III-6), les courbes sont incluses dans un espace euclidien. La norme utilisée est la norme euclidienne.

1- Longueur d'une portion de courbe

DEFINITION :

Soit une courbe paramétrée par une fonction $f : t \in I \rightarrow f(t) = OM(t)$, continue, C^1 par morceaux sur un intervalle I . Soient t_0 et t_1 deux éléments de I tels que $t_0 < t_1$. On appelle **longueur** de la portion de courbe reliant $M(t_0)$ à $M(t_1)$ la quantité :

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\| dt$$

Cette définition se justifie par les raisons suivantes :

□ Si $f(t) = A + tu$, avec u vecteur non nul, l'arc paramétré est la droite passant par A de vecteur directeur u . Si t varie de t_0 à t_1 , on parcourt un segment de longueur $(t_1 - t_0) \|u\|$, ce qui correspond à la valeur donnée par l'intégrale.

□ Pour un cercle de rayon R de centre O dans \mathbb{R}^2 , $f(t) = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, et la définition donne pour longueur du cercle $2\pi R$.

A noter que, dans cet exemple, $M(2\pi + \frac{\pi}{2}) = M(\frac{\pi}{2})$, mais la longueur de la portion de courbe reliant $M(0)$ à $M(\frac{\pi}{2})$ vaut $\frac{R\pi}{2}$, alors que la longueur de la portion de courbe reliant $M(0)$ à $M(2\pi + \frac{\pi}{2})$ est $R(2\pi + \frac{\pi}{2})$ car dans le second cas, on fait d'abord un tour complet du cercle avant de rejoindre le point final.

□ On peut donner une interprétation physique. Si t est le temps, $f(t)$ est la position à l'instant t d'un point mobile, $f'(t)$ est sa vitesse vectorielle, $\|f'(t)\|$ est sa vitesse scalaire, $\|f'(t)\| dt$ la longueur parcourue pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ et L la somme de ces longueurs élémentaires.

EXEMPLE :

□ Pour la cycloïde $\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq \pi$, on a $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, donc :

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin(t)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = \int_0^\pi 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8$$

Examinons ce qui se passe en cas de changement de paramétrage. Si $u \rightarrow t(u)$ est un changement de variable strictement croissant pour u variant de u_0 à u_1 , on a :

$$\int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\| dt = \int_{u_0}^{u_1} t'(u) \|f'(t(u))\| du = \int_{u_0}^{u_1} \|g'(u)\| du \quad \text{avec } g(u) = f(t(u)).$$

Si $u \in [u_1, u_0] \rightarrow t(u) \in [t_0, t_1]$ est strictement décroissant, on a $t'(u) \leq 0$ et :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\| dt &= \int_{u_0}^{u_1} t'(u) \|f'(t(u))\| du \\ &= \int_{u_1}^{u_0} -t'(u) \|f'(t(u))\| du \\ &= \int_{u_1}^{u_0} |t'(u)| \|f'(t(u))\| du \\ &= \int_{u_1}^{u_0} \|t'(u) f'(t(u))\| du \\ &= \int_{u_1}^{u_0} \|g'(u)\| du \quad \text{avec } g(u) = f(t(u)) \text{ et } u_1 < u_0 \end{aligned}$$

On calcule donc la même longueur que ce soit avec le paramétrage f qu'avec le paramétrage g . Il est cependant essentiel pour appliquer la formule de changement de variables que $t'(u)$ garde un signe constant de façon que : $\forall u, |t'(u)| = t'(u)$ ou $\forall u, |t'(u)| = -t'(u)$, sinon, les calculs précédents ne sont pas valides. On imposera donc au changement de variable d'être strictement monotone. Un tel changement de paramétrage est dit **admissible**. Physiquement, il signifie que, si la courbe est parcourue une seule fois avec le paramètre t , il doit en être de même du paramètre u . Il n'est pas question par exemple de choisir un changement de paramétrage qui impose un aller-retour sur la courbe alors que le premier paramétrage ne le faisait pas. Faute de quoi, évidemment, la longueur du parcours serait différente.

Dans le cas de changement de paramétrage admissible, la longueur ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie. Elle est intrinsèque à la courbe. Il peut être alors intéressant de privilégier un paramétrage particulier. C'est le rôle que peut jouer l'abscisse curviligne.

2- Abscisse curviligne

DEFINITION :

Le point $M(t_0) = M_0$ étant choisi comme origine d'une courbe paramétrée, on appelle **abscisse curviligne** du point $M(t)$, la quantité :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt$$

où $f(t) = OM(t)$.

On a noté un peu abusivement de la même façon la borne supérieure de l'intégrale et la variable d'intégration, afin de ne pas multiplier le nom des variables utilisées. On pourrait dire simplement que s est la primitive de $\|f'\|$ qui s'annule en t_0 .

Si t est supérieur à t_0 , $s(t)$ n'est autre que la longueur de la courbe reliant $M(t_0)$ à $M(t)$. Si t est inférieur à t_0 , $s(t)$ est l'opposé de cette longueur. L'abscisse curviligne joue donc pour une courbe le

même rôle que la mesure algébrique (ou abscisse) pour une droite munie d'une origine et d'un sens (droite orientée ou axe).

EXEMPLE :

□ Expression de l'abscisse curviligne en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

On a $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ et s est une primitive de cette fonction.

□ En coordonnées polaires, $\begin{cases} x = r(\theta)\cos(\theta) \\ y = r(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$. On vérifiera que $s' = \sqrt{r'^2 + r^2}$.

PROPRIETES

(i) *On a $|s(t) - s(t')| = L(M(t), M(t'))$, longueur parcourue entre $M(t)$ et $M(t')$.*

(ii) *L'abscisse curviligne reste invariante lors d'un changement de paramétrage admissible croissant. Elle change de signe si le changement de paramétrage est décroissant.*

(iii) *Si f' ne s'annule pas, l'application $t \rightarrow s(t)$ définit un changement de paramétrage admissible. Autrement dit, s lui-même peut servir à paramétriser la courbe.*

Démonstration :

□ (i) : évident

□ (ii) : Reprenant les calculs effectués précédemment sur la longueur, on a :

Si $u \rightarrow t(u)$ est strictement croissante, alors :

$$\int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt = \int_{u_0}^u t'(u) \|f'(t(u))\| du = \int_{u_0}^u \|g'(u)\| du \quad \text{avec } g(u) = f(t(u)).$$

s est le même que l'on prenne f ou g comme paramétrage.

Si $u \rightarrow t(u)$ est strictement décroissante, alors :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt &= \int_u^{u_0} -t'(u) \|f'(t(u))\| du \\ &= \int_u^{u_0} \|g'(u)\| du \\ &= -\int_{u_0}^u \|g'(u)\| du \end{aligned}$$

s change de signe selon que l'on prenne f ou g comme paramétrage. Le signe de l'abscisse curviligne dépend de l'orientation de la courbe issu du paramétrage choisi. s dépend également évidemment de l'origine choisie du paramétrage. Cette propriété n'est pas surprenante. Si on considère une droite du plan sur laquelle on veut définir une abscisse, il y a **deux** choix arbitraires à faire :

celui de l'origine (dans le cas d'une courbe, le point M_0),

celui de l'orientation de l'axe (dans le cas d'une courbe, la direction dans laquelle l'abscisse curviligne va croître).

On utilise usuellement le terme "l'abscisse curviligne" alors qu'on devrait plutôt dire "une abscisse curviligne".

□ (iii) : On a $s'(t) = \|f'(t)\|$ ou encore $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\mathbf{OM}}{dt}\|$. Donc, si $f'(t)$ ne s'annule pas, s est une fonction continue strictement croissante. Elle est donc bijective. On peut donc effectuer un changement de paramètre en prenant l'abscisse curviligne elle-même au lieu de t . Il s'agit d'un changement de paramétrage admissible. Si g est tel que $g(s(t)) = f(t)$, alors :

$$g'(s(t)) s'(t) = f'(t)$$

donc, en prenant la norme (et sachant que $s' > 0$) :

$$\|g'(s(t))\| s'(t) = \|f'(t)\|$$

donc $\|g'(s(t))\| = 1$

En général, on note $s = s(t)$ pour alléger les notations. L'égalité précédente s'écrit alors $\|g'(s)\| = 1$, ou encore $\|\frac{d\mathbf{OM}}{ds}\| = 1$.

3- Repère de Frenet dans le plan

On se place dans le plan, muni d'un repère orthonormé direct. Les courbes sont supposées de classe C^2 . Les points sont supposés biréguliers (pas de point stationnaire, pas de point de rebroussement, pas de point d'inflexion ...).

a) Vecteur normé tangent à l'arc, au point $\mathbf{M}(t)$:

Il est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{\frac{d\mathbf{OM}}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right\|} \\ &= \frac{\frac{ds}{dt}}{\left\| \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right\|} \frac{d\mathbf{OM}}{ds} \quad \text{en dérivant la fonction composée } t \rightarrow s \rightarrow \mathbf{M} \\ &= \frac{d\mathbf{OM}}{ds} \quad \text{puisque } \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right\| \end{aligned}$$

ce qu'on peut encore écrire
$$\boxed{\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}}$$

Physiquement, t est le temps, $\frac{d\mathbf{OM}}{dt}$ est la vitesse vectorielle \mathbf{V} , $\frac{ds}{dt}$ la vitesse scalaire V . \mathbf{T} n'est défini qu'en des points non stationnaires et est de norme 1. C'est le vecteur tangent unitaire. La relation $\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}$ exprime simplement que $\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{T}$.

Remarquons que le sens de \mathbf{T} dépend du paramétrage choisi. Si on opère un changement de paramétrage admissible décroissant, \mathbf{T} change de signe.

b) Vecteur normal à l'arc, au point $\mathbf{M}(t)$:

Soit (\mathbf{i}, \mathbf{j}) une base orthonormée du plan euclidien. Soit \mathbf{N} le vecteur unitaire directement orthogonal à \mathbf{T} . \mathbf{N} comme \mathbf{T} dépend de l'orientation du paramétrage utilisé.

DEFINITION :

Le **repère de Frenet** au point $M(t)$ est donné par les vecteurs unitaires \mathbf{T} tangent à l'arc en $M(t)$ et \mathbf{N} directement orthogonal à \mathbf{T} .

Soit α l'angle entre le vecteur de base \mathbf{i} et \mathbf{T} , de sorte que $\mathbf{T} = \cos(\alpha)\mathbf{i} + \sin(\alpha)\mathbf{j}$ et $\mathbf{N} = -\sin(\alpha)\mathbf{i} + \cos(\alpha)\mathbf{j}$. α est évidemment fonction du paramètre t , et comme \mathbf{N} dépend de l'orientation du paramétrage, α aussi : un changement de paramétrage admissible décroissant modifie α d'un angle π .

Nous admettrons que, si f est de classe C^k , $k \geq 2$, alors on peut choisir α de façon qu'il soit une fonction de classe C^{k-1} , comme \mathbf{T} .

Comme $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{OM}}{ds}$, on a, dans la base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) :

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha) \text{ et } \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha)$$

4- Courbure, rayon de courbure, centre de courbure dans le plan

PROPOSITION

Avec les notations précédentes, il existe une quantité C vérifiant les égalités suivantes :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = CN$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\mathbf{CT}$$

$$C = \frac{d\alpha}{ds}$$

C s'appelle **courbure** de l'arc paramétré au point considéré.

Puisque le signe de s , \mathbf{T} , \mathbf{N} change lorsque l'on effectue un changement de paramétrage admissible décroissant et que α est modifié de π , chaque égalité montre que C change de signe dans ce cas. La courbure dépend de l'orientation de l'arc paramétré.

Démonstration :

□ Puisque \mathbf{T} est un vecteur unitaire, on a $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$ et en dérivant cette égalité par rapport à s , on obtient $2 \langle \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \rangle = 0$. Donc $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ est orthogonal à \mathbf{T} donc orthogonal à \mathbf{N} . Il existe donc C tel que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = CN.$$

De même, \mathbf{N} étant unitaire, on montrera qu'il existe C' tel que $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = C'\mathbf{T}$.

Mais \mathbf{T} et \mathbf{N} sont orthogonaux. Si on dérive par rapport à s l'égalité $\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = 0$, on obtient :

$$\langle \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle CN, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{T}, C'\mathbf{T} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow C + C' = 0 \quad \text{car } \mathbf{T} \text{ et } \mathbf{N} \text{ sont unitaires}$$

$$\Rightarrow C' = -C$$

$$\text{donc } \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\mathbf{CT}$$

Si on prend la notation $\mathbf{T} = \cos(\alpha)\mathbf{i} + \sin(\alpha)\mathbf{j}$ et $\mathbf{N} = -\sin(\alpha)\mathbf{i} + \cos(\alpha)\mathbf{j}$, on constate que :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{d\alpha}{ds} \sin(\alpha) \mathbf{i} + \frac{d\alpha}{ds} \cos(\alpha) \mathbf{j} = \frac{d\alpha}{ds} \mathbf{N}$$

$$\text{donc } C = \frac{d\alpha}{ds}$$

EXEMPLE :

□ Soit un cercle de centre O et de rayon R, paramétré par :

$$\begin{cases} x = R\cos(t) \\ y = R\sin(t) \end{cases}$$

$\frac{d\mathbf{OM}}{dt}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$ d'où \mathbf{T} a pour composantes $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $\frac{ds}{dt} = \|\frac{d\mathbf{OM}}{dt}\| = R$, \mathbf{N} a pour composantes $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$, et $\alpha = \frac{\pi}{2} + t$. On a alors :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{R} \mathbf{N} \quad \text{donc } C = \frac{1}{R}$$

ou bien :

$$C = \frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{R}$$

La courbure est l'inverse du rayon du cercle.

Dans le cas d'un arc quelconque, la quantité $R = \frac{1}{C}$ s'appelle **rayon de courbure**. Contrairement au cercle, la courbure ou le rayon de courbure varie en fonction du point où on les calcule.

On appelle **centre de courbure** le point $\Omega = \mathbf{M} + RN$. Il n'est pas constant en général, sauf dans le cas du cercle.

Courbure et rayon de courbure sont des grandeurs algébriques, mais Ω est un point géométrique, qui ne dépend pas de l'orientation de l'arc paramétré. En effet, un changement d'orientation change les signes de N , C et R mais par celui de RN . Ω reste invariant par un tel changement.

Le cercle de centre Ω de rayon R s'appelle **cercle osculateur** de la courbe au point considéré.

REMARQUES :

□ La relation $\frac{d\alpha}{ds} = C = \frac{1}{R}$ est naturelle pour un cercle de rayon R . Si on se déplace d'une longueur ds , on tourne d'un angle $d\alpha$ tel que $ds = R d\alpha$. Cette formule reste donc valable dans le cas d'une courbe quelconque, par définition du rayon de courbure.

□ Si $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$, alors $C = 0$. La courbure est nulle. Par convention, R est dit infini dans ce cas. Cela se produit sur les segments de droites (évident) ou aux points d'inflexion. En effet, en un point d'inflexion, $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ qui n'est autre que $\frac{d^2\mathbf{OM}}{ds^2}$ est colinéaire à \mathbf{T} . Sa composante selon \mathbf{N} est nulle.

□ Le calcul du rayon de courbure R avec un paramétrage quelconque se fait comme suit : $\frac{d\mathbf{OM}}{dt}$

permet de calculer $\frac{ds}{dt}$ et \mathbf{T} . Puis $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds}$ permet de trouver R .

Un calcul plus direct de R se fait également de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{OM}}{dt} &= \frac{ds}{dt} \mathbf{T} \\ \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\mathbf{T}}{ds} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R} \mathbf{N} \end{aligned}$$

On reconnaît dans l'expression précédente celle de l'accélération vectorielle $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}$ d'un point mobile utilisée en cinématique, somme de l'accélération tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} = \frac{dV}{dt} \mathbf{T}$ et de l'accélération normale $\frac{V^2}{R} \mathbf{N}$. Résumons :

$$\begin{aligned} V &= \frac{ds}{dt} \\ \frac{d\mathbf{OM}}{dt} &= \mathbf{V} = V \mathbf{T} \\ \mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = \frac{dV}{dt} \mathbf{T} + \frac{V^2}{R} \mathbf{N} \end{aligned}$$

donc, sachant que $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = 1$, le déterminant étant calculé dans une base orthonormée directe, on a :

$$\det(\mathbf{V}, \mathbf{a}) = \det(V \mathbf{T}, \frac{dV}{dt} \mathbf{T} + \frac{V^2}{R} \mathbf{N}) = \frac{V^3}{R}$$

$$\text{ou } \boxed{\det\left(\frac{d\mathbf{OM}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}\right) = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{R}}$$

Cette formule est facile à mémoriser par homogénéité d'unité. Physiquement, $\frac{d\mathbf{OM}}{dt}$ s'exprime en mètre par seconde m/s , $\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}$ en m/s^2 , donc $\det\left(\frac{d\mathbf{OM}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}\right)$ s'exprime en m^2/s^3 . Il y a le cube d'un temps au dénominateur d'où la nécessité d'avoir $\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$. Mais on se retrouve avec des m^3 au numérateur d'où la nécessité de diviser par R homogène à une longueur.

□ En coordonnées cartésiennes, on obtiendra $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{R}$ d'où $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$

Dans le cas d'une courbe d'équation $y = F(x)$, où x sert de paramètre, la formule donne $\frac{1}{R} = \frac{F''}{(1 + F'^2)^{3/2}}$. Un cas particulier intéressant se produit lorsque la tangente à M est colinéaire à l'axe des abscisses. F' s'annule et on obtient $F''(t) = \frac{1}{R}$.

Un point de rebroussement peut être considéré comme un point où le rayon de courbure est nul. Considérons par exemple la famille de courbes C_λ suivantes et calculons le rayon de courbure en $t = 1$.

$$\begin{cases} x = 2t + \frac{1}{t^2} \\ y = t^2 + \frac{2\lambda}{t} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x' = 2 - \frac{2}{t^3} \\ y' = 2t - \frac{2\lambda}{t^2} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x'(1) = 0 \\ y'(1) = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{6}{t^4} \\ y'' = 2 + \frac{4\lambda}{t^3} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x''(1) = 6 \\ y''(1) = 2 + 4\lambda \end{cases}$$

Le rayon de courbure vaut $R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$, donc pour $t = 1$ et $\lambda \neq 1$:

$$R = -\frac{|2 - 2\lambda|^3}{6(2 - 2\lambda)} = -\frac{2(1 - \lambda)|1 - \lambda|}{2}$$

Quand $\lambda = 1$, la courbe est telle que $\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = 0$ et $\begin{pmatrix} x''(1) \\ y''(1) \end{pmatrix} \neq 0$. Il y a donc un point de rebroussement. On constate que $\lim_{\lambda \rightarrow 1} R = 0$.

□ En coordonnées polaires où $r = r(\theta)$, on a, en posant $\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}$:

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{OM}}{d\theta} = r'\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_\theta = \frac{ds}{d\theta} \mathbf{T} \quad \text{donc} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2\mathbf{OM}}{d\theta^2} = (r'' - r)\mathbf{e}_r + 2r'\mathbf{e}_\theta$$

Ainsi \mathbf{T} a pour composantes dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ $\begin{pmatrix} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \\ \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \end{pmatrix}$.

\mathbf{N} étant directement orthogonal à \mathbf{T} , a pour composantes $\begin{pmatrix} \frac{-r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \\ \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \end{pmatrix}$.

Pour calculer le rayon de courbure R , on peut utiliser la formule $\det\left(\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\mathbf{OM}}{d\theta^2}\right) = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{R}$:

$$\det\left(\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\mathbf{OM}}{d\theta^2}\right) = \begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix} = 2r'^2 - rr'' + r^2$$

donc $\frac{s'^3}{R} = 2r'^2 - rr'' + r^2$

donc $R = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{2r'^2 + r^2 - rr''}$

□ Géométriquement, le centre de courbure Ω est le point d'intersection de deux normales infiniment proches aux points $M(s)$ et $M(s + ds)$. En effet, la première normale a pour représentation paramétrique $M(s) + \lambda N(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et la deuxième a pour représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} M(s + ds) + \mu N(s + ds) &= M(s) + ds \frac{d\mathbf{OM}}{ds} + \mu N(s) + \mu ds \frac{dN}{ds} + o(ds) \\ &= M(s) + ds \mathbf{T} + \mu N(s) - \mu ds \mathbf{CT} + o(ds) \end{aligned}$$

Négligeant le reste $o(ds)$, les deux normales se coupent si et seulement si la composante en \mathbf{T} de la deuxième est nulle, donc si $\mu = \frac{1}{C} = R$. Le point intersection est alors $M(s) + \mu N(s) = \Omega(s)$.

□ Etant tangent à la courbe et ayant même courbure que la courbe au point de contact, le cercle osculateur est le cercle qui approxime le mieux la courbe au voisinage du point considéré. Voici comment procède Laplace dans sa Huitième leçon à l'Ecole Normale de l'an III pour montrer ce fait. On se place en un point (x_0, y_0) d'une courbe $x \rightarrow y(x)$. On pose $x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$ et on note $k = ah + bh^2 + o(h^2)$ le développement limité de $k = y - y_0$ en fonction $h = x - x_0$ quand h tend vers 0. Ecrivons l'équation d'un cercle passant par (x_0, y_0) et de centre (X, Y) quelconque, et notons R son rayon :

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = (x_0 - X)^2 + (y_0 - Y)^2$$

Pour cette équation, remplaçons y par $y_0 + k$ et x par $x_0 + h$, ce qui donne :

$$h^2 + k^2 + 2h(x_0 - X) + 2k(y_0 - Y) = 0$$

Notons $k = \alpha h + \beta h^2 + o(h^2)$ le développement limité de k en fonction de h issu de l'équation du cercle précédente :

$$h^2 + \alpha^2 h^2 + 2h(x_0 - X) + 2\alpha h(y_0 - Y) + 2\beta h^2(y_0 - Y) + o(h^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2(x_0 - X) + 2\alpha(y_0 - Y))h + (1 + \alpha^2 + 2\beta(y_0 - Y))h^2 + o(h^2) = 0$$

donc $\alpha = -\frac{x_0 - X}{y_0 - Y}$ et $\beta = -\frac{1 + \alpha^2}{2(y_0 - Y)} = -\frac{R^2}{2(y_0 - Y)^3}$

Le cercle qui approxime le mieux la courbe est celui pour lequel $\alpha = a$ et $\beta = b$. On souhaite donc que X et Y soient tels que :

$$\begin{cases} -\frac{x_0 - X}{y_0 - Y} = a \\ -\frac{R^2}{2(y_0 - Y)^3} = b \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_0 - X = -a(y_0 - Y) \\ -(1 + a^2) = 2b(y_0 - Y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = y_0 + \frac{1+a^2}{2b} \\ X = x_0 - \frac{a(1+a^2)}{2b} \end{cases} \quad \text{et} \quad R = \frac{(1+a^2)^{3/2}}{2b}$$

Comparons à la démarche moderne. Elle consiste à calculer :

$$\text{Le vecteur tangent : } \frac{d\mathbf{OM}}{dh} = \begin{pmatrix} 1 \\ a + 2bh + o(h) \end{pmatrix} = \sqrt{1 + (a + 2bh)^2} \mathbf{T}$$

$$\text{donc, pour } h = 0, \frac{d\mathbf{OM}}{dh} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ et } \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + a^2}$$

$$\text{Le vecteur normal en } h = 0 : \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ directement orthogonal à } \mathbf{T}$$

$$\text{La dérivée seconde en } h = 0 : \frac{d^2\mathbf{OM}}{dh^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$\text{Le rayon de courbure en } h = 0 : R = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\det\left(\frac{d\mathbf{OM}}{dh}, \frac{d^2\mathbf{OM}}{dh^2}\right)} = \frac{(1+a^2)^{3/2}}{2b}$$

$$\text{Le centre de courbure } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + RN$$

On retrouve les résultats donnés par Laplace.

5- Exemples

a) Ellipse :

(On peut éventuellement voir le chapitre L2/CONIQUES.PDF).

La Terre peut-être modélisée par un ellipsoïde. Si on la coupe par un plan passant par les pôles, on obtient une ellipse paramétrée de la façon suivante dans le plan de coupe :

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases}$$

avec a rayon de l'équateur, b rayon d'un méridien. La latitude au point (x, y) n'est pas égale à t mais à l'angle entre la normale (verticale du lieu) est le vecteur \mathbf{i} . On se pose la question de savoir quel est le rayon de courbure en un point donné, ainsi que le centre de courbure, point où vont converger les verticales au voisinage du point.

$$\begin{cases} x' = -a \sin(t) \\ y' = b \cos(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}$$

Le vecteur tangent est donc \mathbf{T} de composantes :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}$$

Le vecteur \mathbf{N} directement orthogonal à \mathbf{T} a pour composantes :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -b \cos(t) \\ -a \sin(t) \end{pmatrix}$$

La latitude θ est l'angle entre \mathbf{N} et \mathbf{i} . On a donc $\tan(\theta) = \frac{a}{b} \tan(t)$. La différence entre θ et t est très faible pour la Terre ($a \approx 6378,160 \text{ km}$ et $b \approx 6356,774 \text{ km}$).

Pour calculer le rayon de courbure, nous pouvons :

□ Ou bien calculer la dérivée de \mathbf{T} par rapport à t ce qui donne :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ -b\sin(t) \end{pmatrix} - \frac{(a^2 - b^2)\sin(t)\cos(t)}{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}} \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix}$$

soit, après simplification :

$$\frac{ab}{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}} \begin{pmatrix} -b\cos(t) \\ -a\sin(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{ab}{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)} \mathbf{N}$ et $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{ab}{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}} \mathbf{N}$

Le rayon de courbure vaut donc $R = \frac{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}}{ab}$

□ ou bien, plus simplement, calculer $\det(\frac{d\mathbf{OM}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2})$ ce qui donne $\begin{vmatrix} -a\sin(t) & -a\cos(t) \\ b\cos(t) & -b\sin(t) \end{vmatrix} = ab$ et

qui n'est autre que $\frac{(\frac{ds}{dt})^3}{R}$. On obtient donc $R = \frac{(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))^{3/2}}{ab}$

On note qu'à l'équateur ($t = 0$), le rayon de courbure vaut $\frac{b^2}{a}$ alors qu'au pôle ($t = \frac{\pi}{2}$), le rayon de

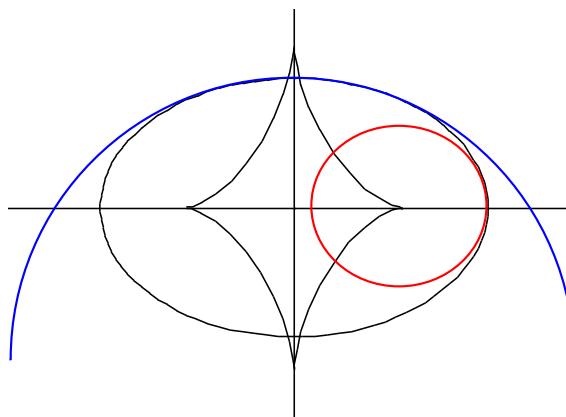
courbure vaut $\frac{a^2}{b}$. Ainsi, le rayon de courbure à l'équateur est **plus petit** que le rayon de courbure au

pôle, alors que le rayon a du cercle équateur est plus grand que le rayon b du méridien. Cette distinction n'est pas forcément aisée à comprendre et a donné lieu à une polémique au XVIIIème pour savoir si la Terre était aplatie aux pôles ou à l'équateur.

Le centre de courbure a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} a\cos(t) - \frac{\cos(t)(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))}{a} \\ b\sin(t) - \frac{\sin(t)(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t))}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a^2 - b^2)\cos^3(t)}{a} \\ \frac{(b^2 - a^2)\sin^3(t)}{b} \end{pmatrix}$$

Voici représentés ci-dessous le lieu des centres de courbure pour une ellipse fortement aplatie, ainsi que les cercles osculateurs à l'équateur (en rouge) et au pôle (en bleu) :



Si $a = b$, le centre de courbure est fixe et est au centre du cercle !!

La courbe paramétrée par $\begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$ s'appelle une **astroïde**. Le lieu des centres de courbure s'obtient en appliquant à l'astroïde un facteur de dilatation $\frac{a^2 - b^2}{a}$ selon Ox et un facteur $\frac{b^2 - a^2}{b}$ selon Oy.

La longueur du quart du méridien terrestre est $\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt$. Il n'existe pas

d'expression de cette quantité sous forme de fonctions élémentaires. La première définition du mètre, sous la Révolution, posait que le quart du méridien devait valoir 10 000 000 m. La mesure d'une partie du méridien, entre Dunkerque et Barcelone fut effectuée par les astronomes Delambre et Méchain. Par ailleurs, les valeurs de a et b proposées en 1980 par l'*International Association of Geodesy* étaient respectivement de 6378137 m et 6356752,314 m (*International Association of Geodesy, Geodetic Reference System IAG GRS 1980*). Une valeur approchée de l'intégrale donne alors pour longueur du quart du méridien terrestre la valeur de 10002 km. Delambre et Méchain ont donc commis une très légère erreur de 0,2 mm sur la mesure du mètre !!

b) Cycloïde :

Elle est paramétrée par :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x' = a(1 - \cos(t)) = 2a \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ y' = a \sin(t) = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \\ \Rightarrow & \frac{ds}{dt} = 2a \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

\mathbf{T} a pour composantes $\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. \mathbf{N} a pour composantes $\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } \frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{1}{2} \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{1}{4a \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathbf{N}$$

$$\text{Ainsi } \mathbf{R} = -4a \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

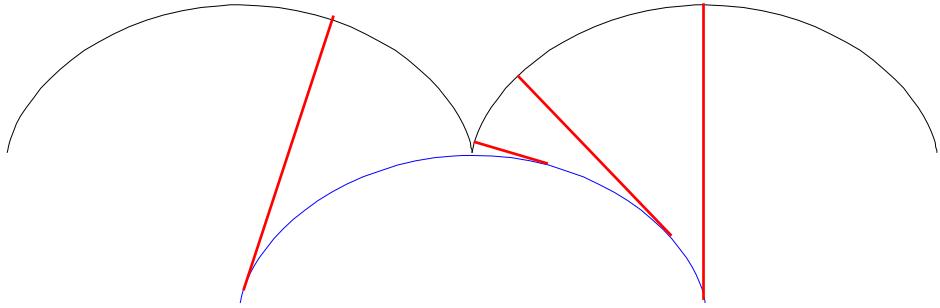
Le centre de courbure a pour composantes :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin(t)) + 2a \sin(t) = a(t + \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) - 2a(1 - \cos(t)) = -a(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

La courbe parcourue par le centre de courbure (en bleu) lorsque t varie est une cycloïde obtenue par translation de la cycloïde initiale. Posons $t = u - \pi$. Les coordonnées du centre de courbure deviennent :

$$\begin{cases} x = -a\pi + a(u - \sin(u)) \\ y = -2a + a(1 - \cos(u)) \end{cases}$$

Le vecteur de translation permettant de passer d'une cycloïde à l'autre est le vecteur de composantes

$$\begin{pmatrix} -a\pi \\ -2a \end{pmatrix}$$


c) Courbe de courbure constante : Une courbe de courbure C constante est un cercle. Utilisons la relation $C = \frac{d\alpha}{ds}$ où s est l'abscisse curviligne et α l'angle entre Ox et le vecteur unitaire tangent T . On obtient $\alpha = Cs$ (on peut supposer la constante d'intégration nulle en effectuant une rotation). D'où :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{ds} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(Cs) \\ \sin(Cs) \end{pmatrix}$$

donc $\mathbf{OM} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} \sin(Cs) \\ -\cos(Cs) \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (on peut prendre la constante d'intégration nulle en effectuant une translation). On obtient la représentation paramétrique d'un cercle de rayon $R = \frac{1}{C}$.

d) L'accélération centripète en $\frac{V^2}{R}$ permet de tester la loi de la gravitation universelle de Newton.

i) A la surface de la Terre, soit à une distance de 6370 km environ du centre de la Terre, l'accélération de la pesanteur est $9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

ii) La Lune se trouve à une distance de 384400 km de la Terre, et sa période sidérale T est de $27,3$ jours. Elle est soumise à une accélération $\frac{V^2}{R} = R\omega^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ soit :

$$\frac{4\pi^2 \times 384,4 \times 10^6}{27,3^2 \times 86400^2} \text{ m.s}^{-2} = 2,73 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

Il revient à Newton d'avoir attribué à la même cause ces deux effets, alors que la physique aristotélicienne, encore vaillante au XVIIème, bien que largement mise à mal par Galilée, distinguait soigneusement les phénomènes terrestres des phénomènes astronomiques.

iii) Si l'on calcule le produit de l'accélération par le carré de la distance, on trouve :

$$\text{dans le cas i) : } 9,81 \times 6,37^2 \times 10^{12} = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{dans le cas ii) : } 2,73 \times 10^{-3} \times 384,4^2 \times 10^{12} = 403 \times 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

Ces deux quantités sont proches de $400 \times 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. Elle correspond à la quantité GM , où M est la masse de la Terre et G la constante de la gravitation universelle. Sa détermination par Cavendish en 1798 permet de déterminer la masse M de la Terre. On a G de l'ordre de $6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$, de sorte que M vaut environ $6 \times 10^{24} \text{ kg}$.

6- Repère de Frenet en dimension 3

On se place ici dans l'espace euclidien de dimension 3. On considère une courbe paramétrée $s \rightarrow M(s)$ de classe C^3 , où s est l'abscisse curviligne. Les points sont supposés biréguliers, i.e. $\frac{dM}{ds}$ et $\frac{d^2M}{ds^2}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants.

- Le vecteur unitaire **tangent** à l'arc au point M est défini par $\mathbf{T} = \frac{dM}{ds}$. Il est unitaire car on a choisi l'abscisse curviligne comme paramètre.
- Comme $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle$ est la fonction constante 1, sa dérivée par rapport à s est nulle, donc $\frac{dT}{ds}$ est orthogonal à \mathbf{T} . Le vecteur **normal** à l'arc au point M est le vecteur \mathbf{N} unitaire orthogonal à \mathbf{T} et de même sens que $\frac{dT}{ds}$. On pose :

$$\boxed{\frac{dT}{ds} = CN}$$

et C s'appelle la **courbure**. Son inverse $R = \frac{1}{C}$ est le **rayon de courbure**. La différence avec le plan est que, dans le plan, on choisissait \mathbf{N} de façon que (\mathbf{T}, \mathbf{N}) forme une base orthonormée directe. \mathbf{N} était bien colinéaire à $\frac{dT}{ds}$ mais pas nécessairement de même sens. Dans l'espace, c'est $\frac{dT}{ds}$ qui permet de définir \mathbf{N} .

Le plan passant par M et dirigé par (\mathbf{T}, \mathbf{N}) s'appelle **plan osculateur** à la courbe en M . Parmi tous les plans passant par M , c'est celui qui est le plus proche de la courbe : il contient la partie principale du développement limité de $M(s)$ à l'ordre 2.

- On complète la base en posant $\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$. \mathbf{B} est le vecteur **binormal**. Comme $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle$ est la fonction constante 1, sa dérivée par rapport à s est nulle, donc $\frac{dN}{ds}$ est orthogonal à \mathbf{N} . $\frac{dN}{ds}$ est donc combinaison linéaire de \mathbf{T} et \mathbf{B} . Comme $\langle \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle$ est identiquement nul, il en est de même de sa dérivée, donc on a :

$$\langle \frac{dN}{ds}, \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{N}, \frac{dT}{ds} \rangle = 0$$

et donc $\langle \frac{dN}{ds}, \mathbf{T} \rangle = - \langle \mathbf{N}, \frac{dT}{ds} \rangle = -C$.

On pose τ le coefficient tel que :

$$\boxed{\frac{dN}{ds} = -CT + \tau B}$$

τ s'appelle la **torsion**. Son inverse est le **rayon de torsion**.

Comme $\langle \mathbf{B}, \mathbf{T} \rangle$ et $\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle$ sont identiquement nuls, leur dérivée l'est également. On en tire :

$$\langle \frac{dB}{ds}, \mathbf{T} \rangle = - \langle \mathbf{B}, \frac{dT}{ds} \rangle = -C \langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0$$

$$\text{et } \langle \frac{dB}{ds}, \mathbf{N} \rangle = - \langle \mathbf{B}, \frac{dN}{ds} \rangle = -\tau$$

donc

$$\boxed{\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}}$$

EXEMPLE :

□ Considérons l'hélice $t \rightarrow \mathbf{M}(t) = (r\cos(t), r\sin(t), at)$, où r et a sont des réels strictement positifs.

On a :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ a \end{pmatrix}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right\| = \sqrt{r^2 + a^2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ a \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{r}{r^2 + a^2} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{r}{r^2 + a^2}, \quad \mathbf{R} = \frac{r^2 + a^2}{r}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \begin{pmatrix} a\sin(t) \\ -a\cos(t) \\ r \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{N}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{r}{r^2 + a^2} \mathbf{T} + \frac{a}{r^2 + a^2} \mathbf{B}, \quad \tau = \frac{a}{r^2 + a^2}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{a}{r^2 + a^2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{a}{r^2 + a^2} \mathbf{N}$$

Pour une telle hélice, la courbure et la torsion sont constantes.

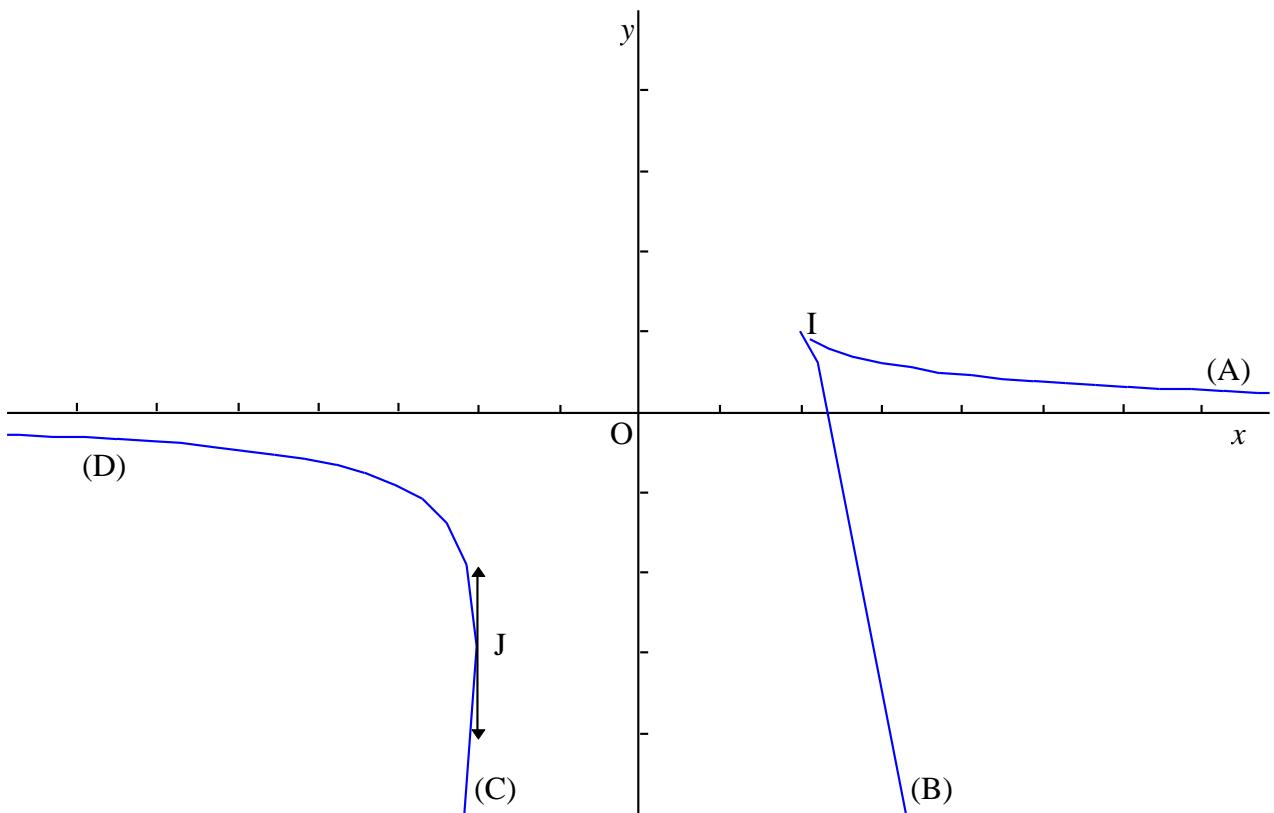
Exercices

1- Enoncés

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{t^2 + 1}{t} \\ y = \frac{2t - 1}{t^2} \end{array} \right]$$

Exo.1) On considère la courbe paramétrée dont voici une représentation graphique. Les

graduations des axes sont équidistantes d'une unité.



- a) Pour quelles valeurs de t obtient-on les branches infinies respectives (A), (B), (C) et (D) ?
- b) Lesquelles de ces branches sont asymptotes à des droites ? Lesquelles n'en sont pas ?
- c) Le point I est-il un point de rebroussement ? Quelle est la tangente en ce point ?
- d) En J, il y a une tangente verticale. Quelles sont les coordonnées de ce point ?
- e) Quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, dans quel sens parcourt-on la courbe ?
- f) A votre avis, y a-t-il un point d'inflexion ?

Exo.2) a) Etudier la courbe $\begin{cases} x = 3\sin(t) + \sin(3t) \\ y = 3\cos(t) - \cos(3t) \end{cases}$.
 b) Quelle est sa longueur ?

Exo.3) Soit (C) la courbe d'équation $\begin{cases} x = \frac{t - \sin(t)}{t^2} \\ y = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \end{cases}$. Montrer que (C) admet une infinité de points de rebroussement, que ces points sont situés sur un même cercle, et que les tangentes à (C) en ces points sont concourantes.

Exo.4) a) La **tractrice** est la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = \ln(\tan(\frac{t}{2})) + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}, t \in]0, \pi[$. Etudier cette courbe et la tracer.

- b) Montrer que l'arc est symétrique par rapport à Oy.
- c) Soit M un point de cette courbe et N l'intersection de la tangente en M à la courbe avec l'axe des abscisses. Montrer que la longueur MN est constante.

La courbe est la trajectoire suivie par un objet M qu'un enfant qui se déplace le long de Ox tire derrière lui à l'aide d'une ficelle de longueur constante.

d) Soit $a > \frac{\pi}{2}$. Quelle est la longueur de l'arc paramétré entre les points de paramètre $\frac{\pi}{2}$ et a ?

Exo.5) Etudier les courbes suivantes en polaire :

a) $r = \cos(\theta) + \cos(2\theta)$

b) $r = \frac{\cos(\theta)}{1 - 2\sin(\theta)}$

Exo.6) On considère la courbe d'équation $y = -\ln(\cos(x))$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Donner le repère de Frenet et la courbure en tout point. Que représente géométriquement la variable x , en dehors d'être l'abscisse du point général de la courbe ?

Exo.7) L'astroïde : Il s'agit de la courbe parcourue par un point d'un cercle de rayon a roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon $4a$.

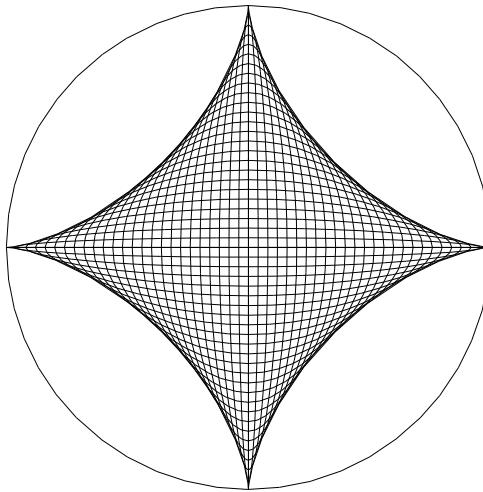
a) Donner une représentation paramétrique de cette courbe. Vérifier que la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = R\cos^3(t) \\ y = R\sin^3(t) \end{cases}$, où R est un réel strictement positif donné, est une astroïde.

b) Montrer que l'astroïde de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$ a pour équation :

$$(1 - x^2 - y^2)^3 = 27x^2y^2$$

c) Soit C un point du cercle de rayon R de centre O . On appelle A et B les projections orthogonales de C respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, et M la projection orthogonale de C sur $[AB]$. Montrer que $[AB]$ est de longueur constante, que M décrit une astroïde et que (AB) est la tangente en M à cette astroïde. Physiquement, une échelle $[AB]$ posée contre un mur et qui glisse sur le sol est tangente à chaque instant à l'astroïde. C est le centre instantané de rotation.

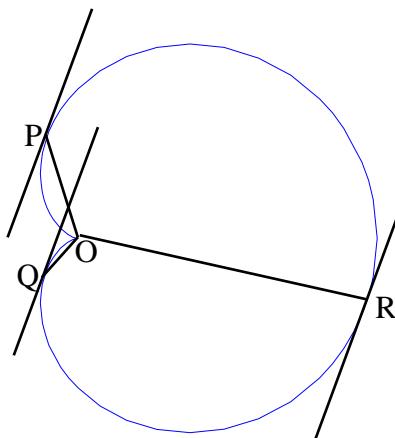
d) Considérons les ellipses d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, telles que $a + b = R$. Montrer que ces ellipses sont tangentes à l'astroïde et qu'elles sont les trajectoires des points liés à l'échelle.



- e) Plus généralement, on considère un triangle ABD, A et B étant les points définis au c). Quand A se déplace sur Ox et B sur Oy, quelle est la trajectoire de D ?
- f) Quelle est la longueur de l'astroïde ?
- g) Quelle est l'aire du domaine limité par l'astroïde ?
- h) Montrer que le lieu des centres de courbure d'une astroïde est également une astroïde.

Exo.8) La cardioïde : Soit a un réel strictement positif. On appelle cardioïde l'image dans le plan complexe du cercle (C) de rayon \sqrt{a} et de centre le point A d'affixe \sqrt{a} par l'application $z \rightarrow z^2$.

- a) Déterminer une équation polaire de la cardioïde ainsi obtenue. La tracer.
- b) Montrer que cette courbe est décrite par un point d'un cercle de rayon a qui roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle de même rayon
- c) Montrer que le lieu des projets orthogonaux d'un point donné B d'un cercle de rayon $2a$ sur les tangentes à ce cercle est aussi une cardioïde.
- d) Notons O le point de rebroussement de la cardioïde. Montrer que les tangentes en trois points P, Q, R de la cardioïde tels que les rayons [OP], [OQ] et [OR] fassent entre eux des angles de $\frac{2\pi}{3}$ sont parallèles.

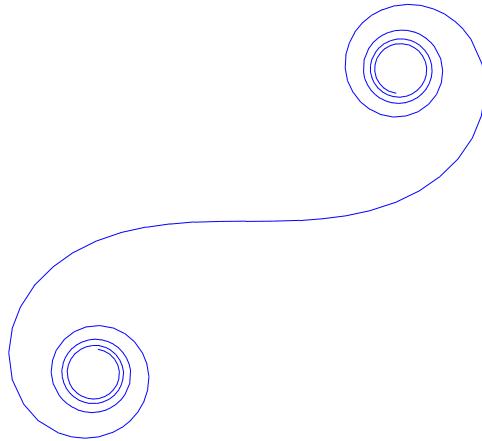


- e) Calculer la longueur de la cardioïde.
- f) Calculer le rayon de courbure R en tout point de la cardioïde.
- g) Quelle est l'aire du domaine limité par la cardioïde ?

Exo.9) La clothoïde : Cette courbe a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(\theta^2) d\theta \\ y(t) = \int_0^t \sin(\theta^2) d\theta \end{cases}$$

En voici la forme. C'est une double spirale :

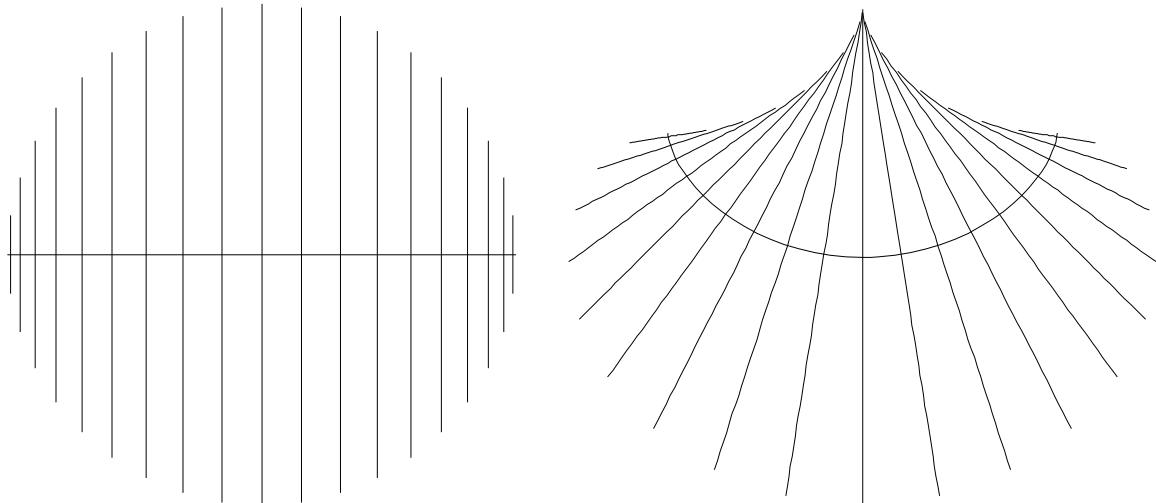


- a) Prouver que la courbure est proportionnelle à l'abscisse curviligne (d'origine le point $(0, 0)$).
- b) Etudier la réciproque.
- c) Cette courbe est utilisée pour relier des segments de droite à des arcs de cercle dans les tracé de bretelles d'autoroute et de lignes du TGV. Expliquer pourquoi.

Exo.10) Soit a un réel strictement positif et (C) une courbe de \mathbb{R}^2 vérifiant, pour tout $x > 0$, $s = \sqrt{ax}$, où s est l'abscisse curviligne de la courbe entre le point de (C) d'abscisse nulle et le point de (C) d'abscisse x . Donner une expression paramétrique de (C) . (On commencera par supposer y fonction de x).

Exo.11) Déterminer l'équation des courbes qui vérifient : $R = a \operatorname{ch}\left(\frac{s}{a}\right)$, où a est une constante, s est l'abscisse curviligne, et R le rayon de courbure.

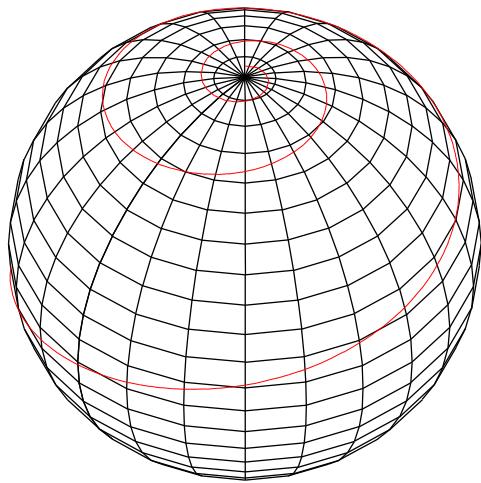
Exo.12) On considère un disque visualisé sous forme d'un diamètre et d'un certain nombre de cordes orthogonales à ce diamètre. Le diamètre est considéré comme flexible, les cordes restant perpendiculaire à celui-ci ; on plie ce diamètre jusqu'à obtenir une courbe telle que le rayon de courbure en chaque point de cette courbe soit égale à la demi-longueur de la corde en ce point.



Quelle est la courbe obtenue ?

Exo.13) La surface terrestre est assimilée à une sphère de centre O et de rayon $R = 6380$ km. On se donne deux points distincts A et B de la surface terrestre autres que les pôles, par leur latitude φ_A et φ_B , et leur longitude λ_A et λ_B .

a) **La loxodromie** : Une loxodromie est une courbe de la sphère terrestre coupant les méridiens (ou les parallèles) sous un angle constant (en rouge dans le dessin qui suit). C'est le chemin le plus facile à suivre pour un navigateur ou un aviateur puisqu'il suffit de se diriger selon un cap constant. Si A et B ont même latitude, la loxodromie joignant A à B est un parallèle. Si A et B ont même longitude, la loxodromie est un méridien. Supposons maintenant que $\varphi_A \neq \varphi_B$ et que $\lambda_A \neq \lambda_B$. Quand on se déplace le long de la loxodromie, la latitude et la longitude varie de façon monotone et on peut prendre la longitude λ comme fonction de la latitude φ .

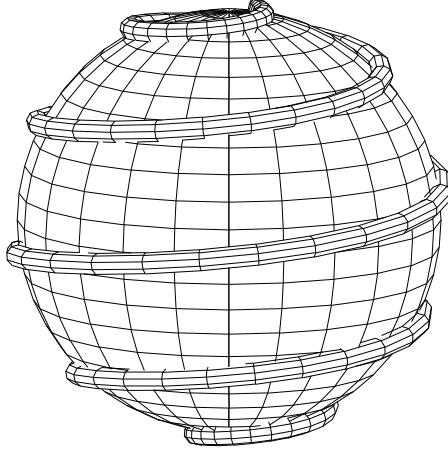


a.1) Chercher quelle relation relie latitude et longitude pour que la tangente à la loxodromie coupe les méridiens suivant un angle α constant.

a.2) Quelle est la longueur de la loxodromie joignant l'équateur au pôle sous un angle α ?

a.3) Quel est le cap α à prendre pour joindre Paris (48°51'N, 2°21'E) à Tokyo (35°40'N, 139°46'E) suivant une loxodromie et quelle est la longueur de celle-ci ?

b) **L'hélice sphérique** : La loxodromie ne doit pas être confondue avec l'hélice sphérique, courbe dessinée sur la sphère de façon que l'angle entre la tangente en tout point de cette courbe et le plan équatorial soit constant. On trouve cette courbe dans la forme que prend un escalier qui s'enroule le long d'un réservoir sphérique par exemple, cet escalier ayant une pente constante.



b.1) On considère une hélice sphérique, la latitude φ et la longitude λ étant fonctions d'un même paramètre t . Calculer un vecteur tangent \mathbf{T} en un point M de cette courbe en fonction de φ , λ et des dérivées de φ et λ par rapport à t . Exprimer le fait que ce vecteur tangent forme un angle α constant avec le plan horizontal Oxy. Vérifier que l'équation obtenue est équivalente à :

$$\varphi' \cos(\varphi) = \sqrt{\lambda'^2 \cos^2(\varphi) + \varphi'^2} \sin(\alpha)$$

b.2) Supposons par exemple $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ (et donc $\varphi' > 0$). On note t le paramètre tel que la coordonnée z de M suivant l'axe des pôles soit donnée par $\cos(\alpha) \sin(t)$. Déterminer φ , $\cos^2(\varphi)$ et φ' en fonction de t , puis λ' (qu'on supposera également positif) et λ en fonction de t .

b.3) Quelle est la longueur totale de l'hélice sphérique ?

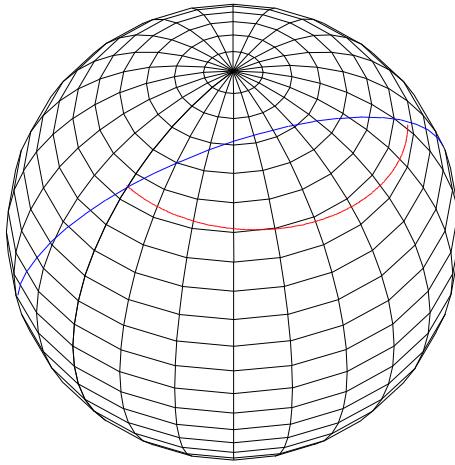
c) **L'orthodromie** : La loxodromie n'est pas le chemin le plus court joignant deux points A et B le long de la sphère. Ce chemin le plus court est donné par l'arc du cercle de centre O passant par A et B. Ce chemin s'appelle une orthodromie.

c.1) Exprimer la longueur de cette orthodromie en fonction de R , φ_A , φ_B , λ_A , λ_B . Quelle est la longueur de cette orthodromie entre Paris (48°51'N, 2°21'E) à Tokyo (35°40'N, 139°46'E) ?

c.2) Le rayon terrestre étant pris pour unité, montrer que le vecteur \mathbf{T} égal à $\mathbf{OB} - \langle \mathbf{OA} | \mathbf{OB} \rangle \mathbf{OA}$ est tangent à l'orthodromie en A. En déduire le cap β à prendre au départ de A pour joindre A à B en suivant une orthodromie, en fonction des latitudes et longitudes de A et B. Quelle est la valeur de β à prendre au départ de Paris pour joindre Paris (48°51'N, 2°21'E) à Tokyo (35°40'N, 139°46'E) suivant une orthodromie ?

c.3) On appelle **vertex** V de l'orthodromie le point de latitude φ_V maximale. En ce point, l'orthodromie coupe le méridien à angle droit. Expliquer comme déterminer la latitude φ_V et la longitude λ_V des vertex en utilisant le vecteur $\mathbf{U} = \mathbf{OB} \wedge \mathbf{OA}$. Calculer la position du vertex pour un trajet Paris-Tokyo.

Ci-dessous, en rouge la loxodromie reliant Paris à Tokyo, et en bleu l'orthodromie passant par ces deux villes.



Exo.14) Dans \mathbb{R}^3 , on considère la courbe paramétrée $t \rightarrow M(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(2t))$.

- Visualiser cette courbe.
- Déterminer le repère de Frénet en tout point de cette courbe.
- Déterminer la courbure et la torsion de la courbe en tout point de celle-ci.

2- Solutions

Sol.1) L'étude du paramétrage donne :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} \\ y'(t) = \frac{2(1-t)}{t^3} \end{cases}$$

Voici le tableau de variation correspondant à ce paramétrage :

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
x'	+	0	-		-	0	+		
x	$-\infty$	\nearrow	-2	\searrow	$-\infty \parallel +\infty$	\searrow	2	\nearrow	$+\infty$
y	0	\searrow	-3	\searrow	$-\infty \parallel -\infty$	\nearrow	1	\searrow	0
y'	-		-		+	0	-		

a) (D) s'obtient quand t tend vers $-\infty$, (C) quand t tend vers 0^- , (B) quand t tend vers 0^+ et (A) quand t tend vers $+\infty$.

b) Quand t tend vers ∞ , $x \sim t$ et y tend vers 0. L'axe des abscisses est asymptote.

Quand t tend vers 0, $x \sim \frac{1}{t}$ et $y \sim -\frac{1}{t^2}$ donc $x = o(y)$. Il y a une branche parabolique d'axe Oy.

c) I correspond à la valeur 1 du paramètre t , pour laquelle $x = 2$ et $y = 1$. I est stationnaire car :

$$x'(1) = y'(1) = 0$$

Si on pose $t = 1 + h$ au voisinage de $h = 0$, alors :

$$x = \frac{2 + 2h + h^2}{1 + h} = (2 + 2h + h^2)(1 - h + h^2 + o(h^2)) = 2 + h^2 + o(h^2)$$

$$y = \frac{1 + 2h}{1 + 2h + h^2} = (1 + 2h)(1 - 2h + 3h^2 + o(h^2)) = 1 - h^2 + o(h^2)$$

Il s'agit d'un point de rebroussement. La tangente a pour vecteur directeur $(1, -1)$.

d) J s'obtient au maximum de x pour $t < 0$, soit $t = -1$, et $(x, y) = (-2, -3)$.

e) On parcourt la courbe dans le sens (D), (C), (B) et (A).

f) Comme (C) est une branche parabolique de direction Oy , il y a nécessairement un changement de concavité au delà du point J et donc un point d'inflexion. On cherchera t tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, et on trouvera (en dehors de la valeur $t = 1$ correspondant au point I et pour lequel $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est nul) $t = -\frac{1}{2}$, soit $(x, y) = (-\frac{5}{2}, -8)$. Si on est courageux, on vérifiera qu'en ce point, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$ sont bien linéairement indépendants.

Sol.2) a) Les composantes x et y sont des fonctions périodiques de période 2π , x est impaire, y est paire. On effectue donc une étude sur $[0, \pi]$ puis une symétrie par rapport à Oy .

$x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$. On effectue une étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis une symétrie par rapport à Ox .

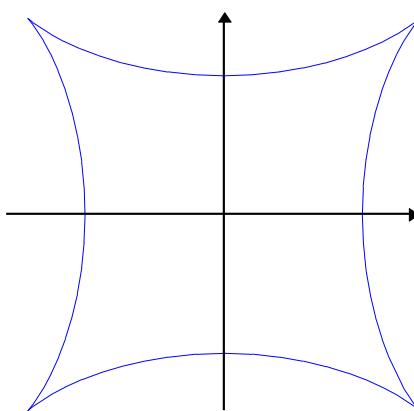
$$x'(t) = 3(\cos(t) + \cos(3t)) = 6\cos(t)\cos(2t)$$

$$y'(t) = 3(\sin(3t) - \sin(t)) = 6\sin(t)\cos(2t)$$

Le tableau de variation est le suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	+		0		-
x	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2
y	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	0
y'	+		0		-

En $t = \frac{\pi}{4}$, il y a un point stationnaire. On vérifiera que $x''(\frac{\pi}{4}) = -6\sqrt{2} = y''(\frac{\pi}{4})$. Il s'agit donc d'un point de rebroussement. La tangente est donnée par la droite $y = x$.



Il semble y avoir une symétrie par rapport à la bissectrice $y = x$, ce qu'on montre en effectuant le changement de variable $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - t$ qui échange x et y .

b) Pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, on a $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 6\cos(2t)$, donc la longueur de la courbe est, compte tenu de ses symétries :

$$L = 8 \int_0^{\pi/4} 6\cos(2t) dt = 24$$

légèrement supérieur à la longueur $8 \times 2\sqrt{2} \approx 22,6$ du carré circonscrit à la figure.

Sol.3) Cherchons les points stationnaires. Pour $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \cos(t))t - 2(t - \sin(t)) = 0 \\ t\sin(t) - 2(1 - \cos(t)) = 0 \end{cases} \text{ après simplification des numérateurs par } t \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(t) = t(1 + \cos(t)) \\ t\sin(t) = 2(1 - \cos(t)) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = t\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = t\cos\left(\frac{t}{2}\right) \text{ ou } \cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \\ t\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ ou } \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans la première équation, il est impossible que $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ car on aurait nécessairement $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0$

dans la deuxième équation. De même, il est impossible que $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ dans la deuxième équation

sinon on aurait $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0$ dans la première. Donc les deux équations se réduisent à :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = t\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ t\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \tan\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

équation qui possède une infinité de solutions. Pour chacune de ces solutions, on a :

$$\sin(t) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{4t}{4 + t^2} \quad \text{donc } x = \frac{t}{4 + t^2}$$

$$\cos(t) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{4 - t^2}{4 + t^2} \quad \text{donc } y = \frac{2}{4 + t^2}$$

On a donc $x^2 + y^2 = \frac{y}{2}$, équation du cercle de centre $(0, \frac{1}{4})$ et de rayon $\frac{1}{4}$. Donc tous les points stationnaires appartiennent à ce cercle.

Il s'agit bien de points de rebroussement car, en ces points, $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ est non nul. En effet, en remplaçant $\sin(t)$ et $\cos(t)$ par leur expression rationnelle ci-dessus :

$$x''(t) = \frac{\sin(t)}{t^2} - 4 \frac{1 - \cos(t)}{t^3} + 6 \frac{t - \sin(t)}{t^4} = \frac{2}{t(4 + t^2)}$$

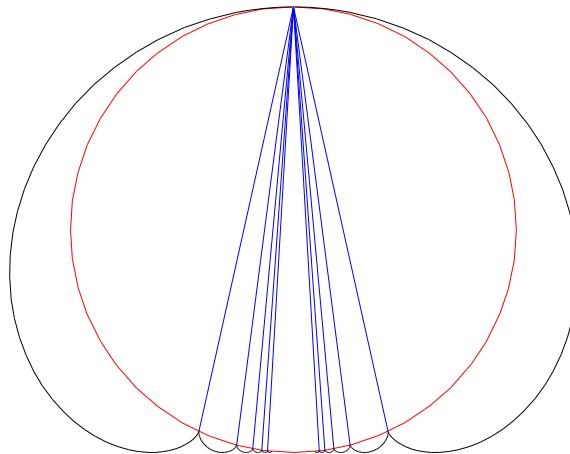
$$y''(t) = \frac{\cos(t)}{t^2} - \frac{4\sin(t)}{t^3} + 6 \frac{1 - \cos(t)}{t^4} = -\frac{1}{4 + t^2}$$

La tangente est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -t \end{pmatrix}$, qui est colinéaire à $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$. Elle admet la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = \frac{t}{4 + t^2} + 2\lambda \\ y = \frac{2}{4 + t^2} - \lambda t \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Toutes les tangentes passent par le point $(0, \frac{1}{2})$, obtenu pour $\lambda = -\frac{t}{2(4 + t^2)}$.

On a représenté ci-dessous en noir la courbe paramétrée, en rouge le cercle possédant les points de rebroussement (dix d'entre eux seulement sont représentés, symétriquement par rapport à l'axe des ordonnées), en bleu les tangentes en ces points de rebroussement, tracées depuis chaque point de rebroussement jusqu'à leur point commun.



Sol.4) a)

$$x' = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(\frac{t}{2}) \tan(\frac{t}{2})} - \sin(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) = \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} > 0$$

$$y' = \cos(t)$$

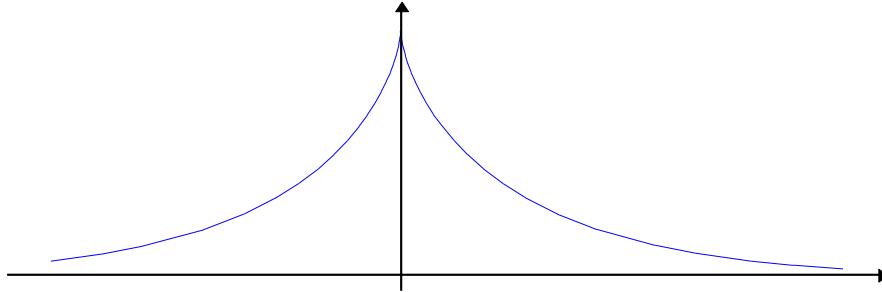
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x'	+	0	+
x	$-\infty$	\rightarrow	0

y	0	\Rightarrow	1	\Leftarrow	0
y'		+	0	-	

En $t = \frac{\pi}{2}$, il y a un point stationnaire. $x'' = -\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} - \cos(t)$ et $y'' = -\sin(t)$, donc :

$$x''(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ et } y''(0) = -1$$

La tangente au point $(0, 1)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il s'agit d'un point de rebroussement.



b) $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$

d'où la symétrie par rapport à Oy .

c) La tangente au point $(x(t), y(t))$ est donnée par :

$$\begin{cases} X = x(t) + \lambda x'(t) \\ Y = y(t) + \lambda y'(t) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Son intersection avec Ox est obtenue pour $Y = 0$ et donc pour $\lambda = -\frac{y(t)}{y'(t)}$. Le vecteur MN vaut alors

$$\lambda \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \text{ et sa norme vaut } \left| \frac{y(t)}{y'(t)} \right| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \left| \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \right| \sqrt{\frac{\cos^4(t)}{\sin^2(t)} + \cos^2(t)} = 1. \text{ La longueur } MN$$

est donc constante.

$$d) \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{\cos^4(t)}{\sin^2(t)} + \cos^2(t)} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \quad (\text{il y a un } - \text{ car } \cos(t) < 0 \text{ si } t > \frac{\pi}{2}).$$

Donc la longueur cherchée est :

$$\int_{\pi/2}^a -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt = -\ln(\sin(a))$$

Sol.5) a) $r(-\theta) = r(\theta)$, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox , et l'étude peut se réduire à l'intervalle $[0, \pi]$.

$$r' = -\sin(\theta) - 2\sin(2\theta) = -\sin(\theta)(1 + 4\cos(\theta))$$

donc r décroît sur $[0, \arccos(-\frac{1}{4})]$, depuis $r(0) = 2$ jusqu'à $r(\arccos(-\frac{1}{4})) = -\frac{9}{8}$, puis croît sur

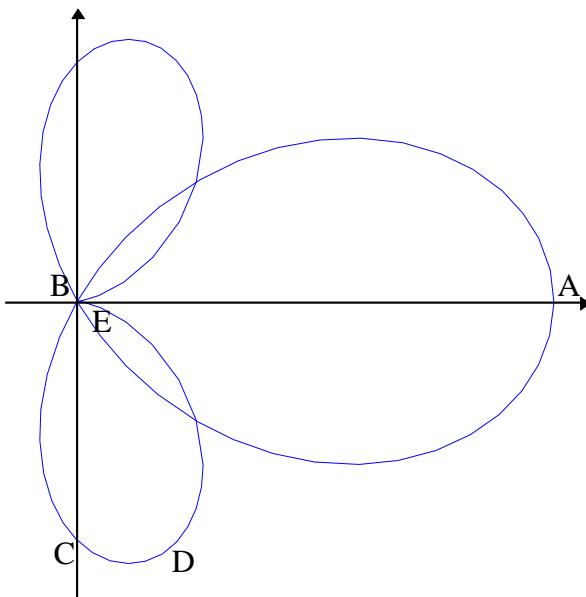
$[\arccos(-\frac{1}{4}), \pi]$, depuis $-\frac{9}{8}$ jusqu'à $r(\pi) = 0$.

r s'annule pour θ tel que pour $\cos(2\theta) = -\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta)$. Donc $2\theta \equiv \pi - \theta \pmod{2\pi}$ ou $2\theta \equiv \theta - \pi \pmod{2\pi}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou π . La courbe passe par l'origine pour ces deux valeurs, qui

donnent aussi l'angle que fait la tangente avec Ox . En raison de la symétrie de la courbe par rapport à Ox , il y a un point de rebroussement de première espèce pour $\theta = \pi$.

En $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r(\theta) = -1$. Les coordonnées du point correspondant sont $(0, -1)$.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos(-\frac{1}{4})$	π
r'	—	—	—	0	+
r	2	↙	0	↙	0
point	A	B	C	D	E



b) Par périodicité, on peut faire l'étude sur un intervalle de longueur 2π .

$r(\pi - \theta) = -r(\theta)$ donc on peut faire l'étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis effectuer une symétrie par rapport à Ox .

$$r'(\theta) = \frac{2 - \sin(\theta)}{(1 - 2\sin(\theta))^2} > 0$$

Dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, le dénominateur de $r(\theta)$ s'annule pour $\theta = \frac{\pi}{6}$. Il y a une branche infinie dans cette direction. Cherchons s'il y a une asymptote. On a :

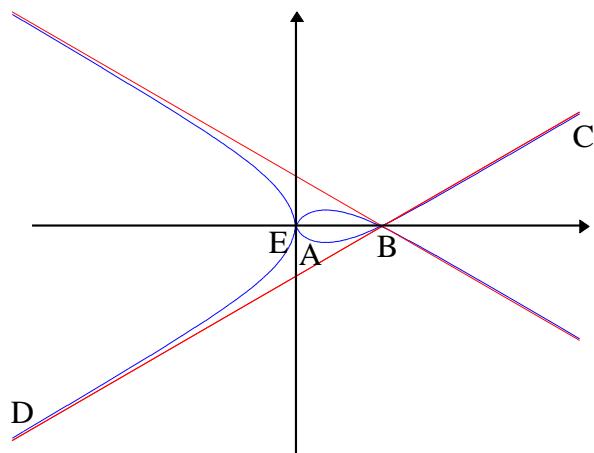
$$\begin{aligned}
 r(\theta) \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) &= r(\frac{\pi}{6} + h) \sin(h) \quad \text{en posant } \theta = \frac{\pi}{6} + h \\
 &= \frac{\cos(\frac{\pi}{6} + h)}{1 - 2\sin(\frac{\pi}{6} + h)} \sin(h) \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{3}\cos(h)}{2} - \frac{\sin(h)}{2}}{1 - \cos(h) - \sqrt{3}\sin(h)} \sin(h)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\sqrt{3}(1+o(h)) - h + o(h)}{2}}{\frac{h^2}{2} - \sqrt{3}h + o(h^2)} (h + o(h^2)) \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3} - h + o(h)}{2}}{\frac{h}{2} - \sqrt{3} + o(h)} (1 + o(h)) \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3} - h + o(h)}{h - 2\sqrt{3} + o(h)}}{1 + \frac{h}{2\sqrt{3}} + o(h)} (1 + o(h)) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} - h + o(h)) (1 + \frac{h}{2\sqrt{3}} + o(h)) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} - \frac{h}{2} + o(h)) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}h}{12} + o(h)
\end{aligned}$$

Donc il y a une asymptote, formant un angle $\frac{\pi}{6}$ avec l'axe Ox , à une distance $\frac{1}{2}$ de O dans la direction opposée à $e_\theta(\frac{\pi}{6})$, la courbe étant du côté de $e_\theta(\frac{\pi}{6})$ par rapport à l'asymptote pour $h > 0$, i.e. $\theta > \frac{\pi}{6}$, et de l'autre côté pour $\theta < \pi/6$.

Comme r s'annule en $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, l'origine O est un point double et l'axe Oy y est tangent à la courbe.

θ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$			
r	0	↗	1	↗	$+\infty \parallel -\infty$	↗	0
point	A	B	C D	E			



La courbe (en bleu) coupe son asymptote (en rouge) au point B. Compte tenu de la concavité de la courbe et du fait qu'il y a une asymptote en C, il y a nécessairement un point d'inflexion entre B et

C , et donc une valeur de θ élément de $]0, \frac{\pi}{6}[$ pour laquelle les deux vecteurs suivants sont colinéaires :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta} = r'\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d^2\mathbf{OM}}{d\theta^2} = (r'' - r)\mathbf{e}_r + 2r'\mathbf{e}_\theta$$

Le lecteur courageux vérifiera que cette condition est vérifiée si et seulement si :

$$\sin^3(\theta) - 3\sin(\theta) + 1 = 0$$

et qu'une valeur approchée de la solution θ est 0.354, soit un peu plus de 20° .

Sol.6) On prend x comme paramètre donc :

$$x' = 1 \text{ et } y' = \tan(x)$$

$$\text{donc } x'^2 + y'^2 = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

donc

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \text{ vecteur normal directement orthogonal à } \mathbf{T}$$

$$\frac{1}{R} \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dx}} \frac{d\mathbf{T}}{dx} = \cos(x) \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} = \cos(x) \mathbf{N} \text{ donc } R = \frac{1}{\cos(x)}$$

On peut aussi calculer R au moyen de la formule $\det\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}\} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 \frac{1}{R}$ donc :

$$\left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \tan(x) & \frac{1}{\cos(x)^2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{\cos(x)^3} \frac{1}{R}$$

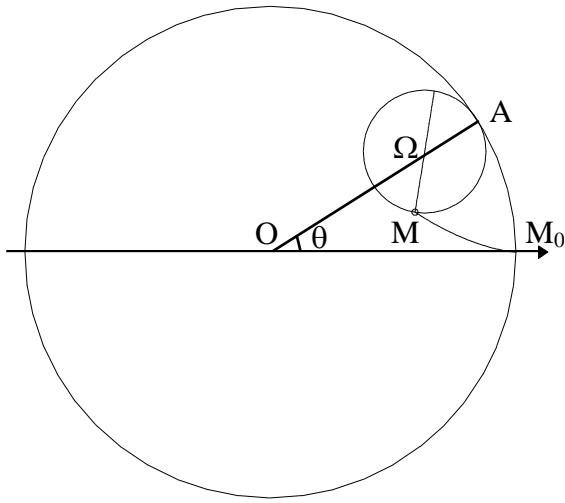
$$\text{donc } \frac{1}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^3} \frac{1}{R}$$

$$\text{donc } R = \frac{1}{\cos(x)}$$

Puisque $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$, x est aussi l'angle α entre l'axe des abscisses et le vecteur tangent, ce qui

$$\text{permet de retrouver directement } R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Sol.7) a) Soit O le centre du cercle fixe, Ω le centre du cercle mobile, M le point dont on suit la trajectoire, M_0 la position de M lorsque les deux cercles y sont tangents. On se place dans le repère orthonormé de centre O d'axe des abscisses (OM_0), le centre Ω tournant dans le sens trigonométrique.



Soit A l'intersection de la demi-droite $[O\Omega)$ avec le cercle fixe, θ l'angle entre OM_0 et OA , u le vecteur unitaire tel que $OA = 4au$. Comme le roulement se fait sans glissement, la longueur $4a\theta$ de l'arc M_0A est égal à la longueur de l'arc AM . Il en résulte que l'angle entre ΩM et ΩA vaut 4θ , ou que l'angle entre l'axe des abscisses et ΩM est égal à -3θ .

La relation de Chasles $OM = O\Omega + \Omega M$ permet de donner les coordonnées de M :

$$\begin{cases} x = 3a\cos(\theta) + a\cos(3\theta) = 4a\cos^3(\theta) \\ y = 3a\sin(\theta) - a\sin(3\theta) = 4a\sin^3(\theta) \end{cases}$$

b) Si on reporte $x = \cos^3(t)$ et $y = \sin^3(t)$ dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} & (1 - \cos^6(t) - \sin^6(t))^3 = 27\cos^6(t)\sin^6(t) \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{(e^{it} + e^{-it})^6}{64} + \frac{(e^{it} - e^{-it})^6}{64}\right)^3 = -27 \frac{(e^{it} + e^{-it})^6}{64} \frac{(e^{it} - e^{-it})^6}{64} \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{6e^{4it} + 20 + 6e^{-4it}}{32}\right)^3 = -27 \frac{(e^{2it} - e^{-2it})^6}{4096} \\ \Leftrightarrow & (2 - e^{4it} - e^{-4it})^3 = -(e^{2it} - e^{-2it})^6 \quad \text{après simplification par } \frac{27}{4096} \end{aligned}$$

ce qui est vrai car $2 - e^{4it} - e^{-4it} = -(e^{2it} - e^{-2it})^2$.

Réiproquement, si $(1 - x^2 - y^2)^3 = 27x^2y^2$, on a nécessairement $x^2 + y^2 \leq 1$ dans le membre de gauche car le membre de droite est positif ou nul. La courbe est invariante par les réflexions par rapport à Ox ou Oy, et on peut donc se limiter au cas $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$. Soit t élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$

tel que $x = \cos^3(t)$. On a à la fois :

$$(1 - \cos^6(t) - y^2)^3 = 27\cos^6(t)y^2$$

$$\text{et} \quad (1 - \cos^6(t) - \sin^6(t))^3 = 27\cos^6(t)\sin^6(t)$$

d'après la première partie du calcul. Il suffit de montrer que, pour chaque $x = \cos^3(t)$, il y a une unique solution y positive ou nulle à l'équation $(1 - x^2 - y^2)^3 = 27x^2y^2$ pour conclure que $y = \sin(t)$.

Si $x = 0$ (et donc $t = \frac{\pi}{2}$), on a immédiatement $y = 1 = \sin^3(\frac{\pi}{2})$. Sinon, $0 < x \leq 1$. Renommons x^2 en u et y^2 en z et étudions la fonction $\varphi : z \in [0, 1] \rightarrow (1 - u - z)^3 - 27uz$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi'(z) &= -3(1 - u - z)^2 - 27u \\ &= -3z^2 + 6z(1 - u) - 3(1 - u)^2 - 27u \\ &= -3(z^2 - 2z(1 - u) + 1 + 7u + u^2) \end{aligned}$$

Le trinôme $z^2 - 2z(1 - u) + 1 + 7u + u^2$ en z a pour discriminant (réduit au facteur 4 près) :

$$\Delta = (1-u)^2 - 1 - 7u - u^2 = -9u < 0$$

donc φ' est de signe constant sans s'annuler, donc strictement négatif car $\varphi'(0) < 0$. Donc φ décroît strictement d'où l'unicité de la solution.

c) Si C a pour coordonnées $(R\cos(\theta), R\sin(\theta))$, on a $A = (R\cos(\theta), 0)$ et $B = (0, R\sin(\theta))$ donc $AB = R$. En outre, (AB) a pour équation $\frac{x}{R\cos(\theta)} + \frac{y}{R\sin(\theta)} = 1$, ou encore $\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = R\cos(\theta)\sin(\theta)$. Le point $M = (R\cos^3(\theta), R\sin^3(\theta))$ vérifie cette équation de (AB) et on vérifiera que MC est orthogonal à (AB) . M est donc bien le projeté orthogonal de C sur (AB) .

La tangente en M à l'astroïde a pour vecteur directeur $\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta} = 3R\cos(\theta)\sin(\theta) \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, qui est bien colinéaire à (AB) .

d) Les ellipses ont pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) = (R-a)\sin(t) \end{cases}$. Au point de contact entre l'ellipse et l'astroïde, t doit être tel qu'il existe θ vérifiant $\begin{cases} x = a\cos(t) = R\cos^3(\theta) \\ y = (R-a)\sin(t) = R\sin^3(\theta) \end{cases}$. Une solution est donnée par : $t = \theta$ avec $\cos^2(\theta) = \frac{a}{R}$ et $\sin^2(\theta) = \frac{R-a}{R}$.

En ce point, la tangente à l'ellipse a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ (R-a)\cos(t) \end{pmatrix}$ et celle à l'astroïde a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -3R\cos^2(t)\sin(t) \\ 3R\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix} = 3R\cos(t)\sin(t) \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Les deux tangentes sont les mêmes car ces deux vecteurs sont colinéaires. En effet :

$$\begin{vmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ (R-a)\cos(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = -\sin^2(t) + (R-a)\cos^2(t) = R\cos^2(t) - a = 0$$

Le point de l'échelle se trouve à une distance a du pied. t est l'angle que fait l'échelle $[AB]$ avec l'horizontale (dirigée vers les x négatifs).

e) Avec les mêmes notations qu'au d), on a $A = (a\cos(t), 0)$, $B = (0, b\sin(t))$. On considère une base liée à $[AB]$, avec $\mathbf{u} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b\sin(t) \\ a\cos(t) \end{pmatrix}$. Au cours du mouvement, \mathbf{AD} a des composantes fixes dans cette base, donc il existe λ et μ tels que $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. \mathbf{D} a alors pour composantes (x, y) dans le repère fixe avec :

$$\begin{cases} x = (1-\lambda)a\cos(t) + \mu b\sin(t) \\ y = \lambda b\sin(t) + \mu a\cos(t) \end{cases}$$

On vérifiera que $\frac{(\lambda x - \mu y)^2}{a^2} + \frac{(\mu x - (1-\lambda)y)^2}{b^2} = (\lambda^2 - \lambda + \mu^2)^2$. L'équation étant de degré 2, il s'agit de coniques et elles sont nécessairement bornées. Il s'agit donc d'ellipses. Leurs axes sont généralement inclinés par rapport à Ox et Oy .

Il existe des cas dégénérés où les ellipses se réduisent à des segments de droites. C'est le cas quand le

vecteur $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-\lambda)a\sin(t) + \mu b\cos(t) \\ \lambda b\cos(t) - \mu a\sin(t) \end{pmatrix}$ a une direction qui ne dépend pas de t . On doit donc avoir $-(1-\lambda)a\sin(t) + \mu b\cos(t)$ proportionnel à $\lambda b\cos(t) - \mu a\sin(t)$, et donc $\begin{pmatrix} -(1-\lambda)a \\ \mu b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\mu a \\ \lambda b \end{pmatrix}$ colinéaires, ou encore $\mu^2 = \lambda(1-\lambda)$, ou $(\lambda - \frac{1}{2})^2 + \mu^2 = \frac{1}{4}$. Les points D pour lequel cela se produit

sont les éléments du cercle de diamètre [AB]. ABD forme alors un triangle rectangle. Ainsi, lorsqu'un triangle ABD, rectangle en D, se déplace de façon que A appartienne à Ox et B à Oy, le troisième sommet D parcourt un segment de droite.

f) Si $M = (R\cos^3(t), R\sin^3(t))$, $\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = 3R\cos(t)\sin(t) \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Donc, si s est l'abscisse curviligne et t élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$ (ce qui permet de décrire un quart de l'astroïde), on a :

$$\frac{ds}{dt} = 3R\cos(t)\sin(t) = \frac{3}{2} R \sin(2t)$$

Donc la longueur de l'astroïde est :

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} R \sin(2t) dt = 6R$$

Par comparaison, la longueur du périmètre d'un carré inscrit dans un cercle de rayon R est $4\sqrt{2}R$, légèrement inférieur à $5R$.

g) Si on suppose que le quart d'astroïde correspondant à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ est le graphe d'une fonction $x \in [0, R] \rightarrow y(x)$, l'aire du domaine limité par l'astroïde vaut $A = 4 \int_0^R y(x) dx$. On fait le changement de variable $x = R\cos^3(t)$, tel que $y(x) = R\sin^3(t)$ d'où :

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} 3R^2 \sin^4(t) \cos^2(t) dt = \dots = \frac{3}{8} \pi R^2$$

h) Toujours avec $t = [0, \frac{\pi}{2}]$ et avec les mêmes notations que le f), le vecteur tangent \mathbf{T} vaut $\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ (vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\frac{d\mathbf{OM}}{dt}$) et $\frac{ds}{dt} = 3R\cos(t)\sin(t)$.

Le vecteur normal a pour composantes $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$, vecteur unitaire directement orthogonal à \mathbf{T} .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{ds}{dt} C \mathbf{N} \text{ où } C \text{ est la courbure} \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} &= 3R\cos(t)\sin(t) C \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad C &= -\frac{1}{3R\cos(t)\sin(t)} \\ \Rightarrow \quad R &= -3R\cos(t)\sin(t) \text{ où } R \text{ est le rayon de courbure.} \end{aligned}$$

Le centre de courbure Ω a pour composantes $\mathbf{M} + R\mathbf{N}$, soit :

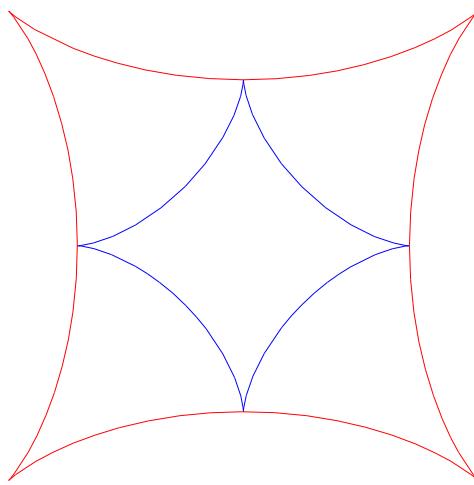
$$\begin{cases} X = R\cos^3(t) + 3R \sin^2(t)\cos(t) = R(3\cos(t) - 2\cos^3(t)) \\ Y = R\sin^3(t) + 3R\sin(t)\cos^2(t) = R(3\sin(t) - 2\sin^3(t)) \end{cases}$$

Donc, au facteur R près :

$$\begin{aligned} X + Y &= 3(\cos(t) + \sin(t)) - 2(\cos^3(t) + \sin^3(t)) \\ &= (\cos(t) + \sin(t))(3 - 2(\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t))) \\ &= (\cos(t) + \sin(t))(1 + 2\cos(t)\sin(t)) \\ &= (\cos(t) + \sin(t))(1 + \sin(2t)) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)) \end{aligned}$$

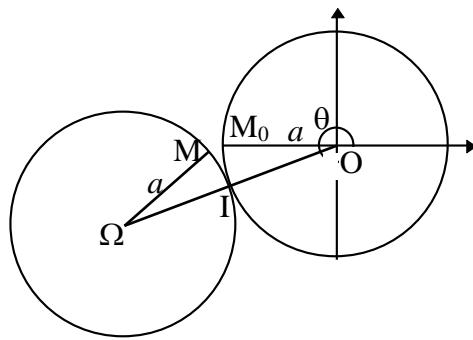
$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \cos(\theta)(1 + \cos(2\theta)) \text{ en posant } \theta = \frac{\pi}{4} - t \\
&= 2\sqrt{2} \cos^3(\theta) \\
X - Y &= 3(\cos(t) - \sin(t)) - 2(\cos^3(t) - \sin^3(t)) \\
&= (\cos(t) - \sin(t))(3 - 2(\cos^2(t) + \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t))) \\
&= (\cos(t) - \sin(t))(1 - 2\cos(t)\sin(t)) \\
&= (\cos(t) - \sin(t))(1 - \sin(2t)) \\
&= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)) \\
&= \sqrt{2} \sin(\theta)(1 - \cos(2\theta)) \text{ en posant } \theta = \frac{\pi}{4} - t \\
&= 2\sqrt{2} \sin^3(\theta) \text{ en posant } \theta = \frac{\pi}{4} - t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]
\end{aligned}$$

Le lieu des centres de courbure du quart d'astroïde limité par deux pointes est lui-même un quart d'astroïde comprenant une pointe, dans le repère $(1, 1)$ $(1, -1)$. On complète par symétrie à l'astroïde entière. Ci-dessous, l'astroïde initiale en **bleu**, et le lieu des centres de courbures en **rouge**. Ce lieu est en contact avec l'astroïde initiale aux points de rebroussement de celle-ci. En effet, en un tel point de rebroussement, le rayon de courbure R est nul et Ω coïncide avec M .



Sol.8) a) Une représentation paramétrique de (C) est donnée par $x = \sqrt{a}(1 + \cos(\theta))$ et $y = \sqrt{a}\sin(\theta)$ donc $z = x + iy = 2\sqrt{a}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp\left(\frac{i\theta}{2}\right)$, donc $z^2 = 4a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta}$, donc $r = 4a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2a(1 + \cos(\theta))$.

b) Prenons d'abord un repère du plan tel que l'origine soit le centre O du cercle fixe, et que le cercle mobile soit initialement tangent au cercle fixe en le point $M_0 = (-a, 0)$. Le centre Ω du cercle mobile a initialement pour coordonnées $(-2a, 0)$. Après un certain roulement du cercle mobile sur le cercle fixe, notons θ l'angle entre Ox et $O\Omega$, de sorte que Ω a maintenant pour coordonnées $(2a\cos(\theta), 2a\sin(\theta))$. M_0 correspond à $\theta = \pi$.



Le roulement ayant lieu sans glissement, l'arc du cercle mobile compris entre le point de contact I et M a même longueur que l'arc du cercle fixe entre I et la position initial M₀. Les deux cercles ayant même rayon, il en résulte que l'angle entre ΩI et ΩM et le même que celui entre OM_0 et OI , égal à $\theta - \pi$, ou que l'angle entre Ox et ΩM vaut $2(\theta - \pi)$ et donc que :

$$\Omega M = a \begin{pmatrix} \cos(2(\theta - \pi)) \\ \sin(2(\theta - \pi)) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les coordonnées de M = $\Omega + \Omega M$ sont :

$$\begin{cases} x = a(2\cos(\theta) + \cos(2\theta)) \\ y = a(2\sin(\theta) + \sin(2\theta)) \end{cases}$$

Si l'on prend maintenant l'origine du repère en M₀ = (-a, 0), les coordonnées deviennent :

$$\begin{cases} x = a(2\cos(\theta) + \cos(2\theta)) + a = 2a\cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ y = a(2\sin(\theta) + \sin(2\theta)) = 2a\sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{cases}$$

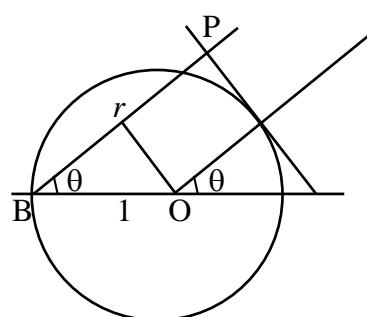
ou encore $r = 2a(1 + \cos(\theta))$. On retrouve l'équation du a).

c) Considérons d'abord le cas d'un cercle de centre O de rayon 1, et soit B = (-1, 0). Une tangente à ce cercle en le point $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ a pour équation $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = 1$. Le projeté orthogonal P de B sur cette droite vérifie cette équation et les relations $\begin{cases} x = -1 + \lambda\cos(\theta) \\ y = \lambda\sin(\theta) \end{cases}$, ce qui donne $\lambda = 1 + \cos(\theta)$, d'où les coordonnées de P :

$$\begin{cases} x = -1 + \cos(\theta) + \cos^2(\theta) \\ y = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{cases}$$

Si on effectue une translation d'une unité vers la gauche, on obtient $\begin{cases} x = \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ y = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{cases}$ ou encore $r = 1 + \cos(\theta)$, en prenant B comme pôle des coordonnées polaires. On dit que la cardioïde est la **podaire** du cercle par rapport à B.

On peut aussi faire le schéma suivant, où l'on voit directement que $r = 1 + \cos(\theta)$.



Le cas du cercle de rayon $2a$ se déduit du précédent par une homothétie de rapport $2a$, ce qui donne l'équation polaire $r = 2a(1 + \cos(\theta))$.

d) Cherchons l'angle α entre l'axe des abscisses et la tangente :

$$\begin{aligned} r &= 2a(1 + \cos(\theta)) \\ \Rightarrow r' &= -2a\sin(\theta) \\ \Rightarrow \tan(\varphi) &= \frac{r}{r'} = -\frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}) \text{ où } \varphi \text{ est l'angle entre le rayon vecteur } \mathbf{e}_r \text{ et} \end{aligned}$$

la tangente. Comme α n'est autre que $\theta + \varphi$, on a $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}$. Si on ajoute $\frac{2\pi}{3}$ à θ , on ajoute π à α , ce qui ne change pas la direction de la tangente. Les tangentes sont donc parallèles.

e) $\mathbf{OM} = 2a(1 + \cos(\theta)) \mathbf{e}_r$

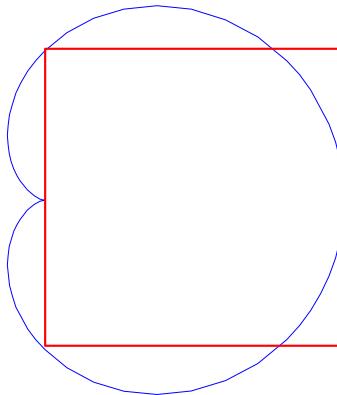
$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{d\mathbf{OM}}{d\theta} &= -2a\sin(\theta) \mathbf{e}_r + 2a(1 + \cos(\theta)) \mathbf{e}_\theta \\ &= 4a\cos(\frac{\theta}{2}) (-\sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_r + \cos(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_\theta) \end{aligned}$$

donc pour θ variant de $-\pi$ à π , $\frac{ds}{d\theta} = 4a\cos(\frac{\theta}{2})$, s étant l'abscisse curviligne.

donc:

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} 4a\cos(\frac{\theta}{2}) d\theta = 16a$$

Ci-dessous, la cardoïde bleue et le périmètre du carré rouge ont même longueur.



f) Nous donnons trois méthodes pour calculer le rayon de courbure R :

Méthode 1 :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta} = -2a\sin(\theta) \mathbf{e}_r + 2a(1 + \cos(\theta)) \mathbf{e}_\theta$$

$$\text{et } \frac{d^2\mathbf{OM}}{d\theta^2} = -2a(2\cos(\theta) + 1) \mathbf{e}_r - 4a\sin(\theta) \mathbf{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \det(\frac{d\mathbf{OM}}{d\theta}, \frac{d^2\mathbf{OM}}{d\theta^2}) &= 8a^2\sin^2(\theta) + 4a^2(1 + \cos(\theta))(1 + 2\cos(\theta)) \\ &= 4a^2(2\sin^2(\theta) + 1 + 3\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta)) \\ &= 12a^2(1 + \cos(\theta)) \\ &= 24a^2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) \\ &= (\frac{ds}{d\theta})^3 \frac{1}{R} \end{aligned}$$

or nous avons vu que, pour θ élément de $-\pi, \pi$, $\frac{ds}{d\theta} = 4a\cos(\frac{\theta}{2})$, donc :

$$R = \frac{8}{3} a\cos(\frac{\theta}{2})$$

Méthode 2 :

$$\mathbf{T} = -\sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_r + \cos(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_\theta \quad \text{vecteur tangent unitaire colinéaire et de même sens que } \frac{d\mathbf{OM}}{d\theta}$$

$$\mathbf{N} = -\cos(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_r - \sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_\theta \quad \text{vecteur normal directement orthogonal à } \mathbf{T}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{T}}{d\theta} = -\frac{3}{2} \cos(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_r - \frac{3}{2} \sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_\theta = \frac{3}{2} \mathbf{N} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{ds}{d\theta} \frac{1}{R} \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2}{3} \frac{ds}{d\theta} = \frac{8}{3} a\cos(\frac{\theta}{2})$$

Méthode 3 :

L'angle α entre Ox et \mathbf{T} est égal à $\alpha = \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$, somme de l'angle θ entre Ox et \mathbf{e}_r et de l'angle $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$

entre \mathbf{e}_r et $\mathbf{T} = -\sin(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_r + \cos(\frac{\theta}{2}) \mathbf{e}_\theta = \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_r + \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_\theta$. Donc :

$$\alpha = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{2}{3} \frac{ds}{d\theta} = \frac{8}{3} a\cos(\frac{\theta}{2})$$

g) L'aire du domaine limité par la cardioïde est (voir au besoin le chapitre L2/INTMULT.PDF) :

$$\iint r dr d\theta = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{2a(1+\cos(\theta))} r dr d\theta = \int_0^{\pi} 4a^2(1 + \cos(\theta))^2 d\theta = \dots = 6\pi a^2$$

Dans la figure du e), le carré rouge avait un périmètre de même longueur que la cardioïde, mais le domaine limité par le carré a pour aire $16a^2$, inférieure, à $6\pi a^2$.

Sol.9) a) $\begin{cases} x' = \cos(t^2) \\ y' = \sin(t^2) \end{cases}$ donc $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$ et $\frac{ds}{dt} = 1$. Donc $s = t$ si on convient que $s = 0$ pour $t = 0$.

Comme $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$, l'angle α entre Ox et \mathbf{T} vaut t^2 . La courbure est $C = \frac{d\alpha}{ds} = 2t$, proportionnelle à s .

b) Réciproquement, si $C = 2\lambda s = \frac{d\alpha}{ds}$ avec $\lambda \neq 0$, on a $\alpha = \lambda s^2$, en choisissant $\alpha = 0$ pour $s = 0$ (à une rotation près). Le vecteur tangent \mathbf{T} vaut :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos(\alpha) = \cos(\lambda s^2) \\ \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha) = \sin(\lambda s^2) \end{cases}$$

donc, en prenant l'origine O du repère au point de la courbe d'abscisse curviligne $s = 0$ (à une translation près) :

$$\begin{cases} x = \int_0^t \cos(\lambda s^2) \, ds \\ y = \int_0^t \sin(\lambda s^2) \, ds \end{cases}$$

Quitte à effectuer une symétrie par rapport à Ox ce qui change le signe de λ , on peut supposer $\lambda > 0$.

Posons alors $\theta = \sqrt{\lambda} s$ et prenons comme nouveau paramètre $u = r\sqrt{\lambda}$. On obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^u \cos(\theta^2) \, d\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^u \sin(\theta^2) \, d\theta \end{cases}$$

Ainsi, la courbe cherchée redonne la clothoïde du a) après une rotation, une translation et une homothétie. On passe donc d'une courbe à l'autre par une similitude.

c) Quand le train parcourt une courbe à la vitesse V, il subit une accélération normale à la trajectoire égale à $\frac{V^2}{R}$, où R est le rayon de courbure. Elle est donc proportionnelle à la courbure C. Lors du passage de la ligne droite à un arc de cercle via une clothoïde, cette accélération normale augmente donc progressivement et continûment de la valeur 0 quand le train se déplace en ligne droite à la valeur $\frac{V^2}{R}$ quand il se déplace à la vitesse V sur un arc de cercle de rayon R. Si on reliait directement une ligne droite à un arc de cercle, l'accélération normale passerait instantanément de la valeur 0 à la valeur $\frac{V^2}{R}$, entraînant inconfort pour les passagers et forte contrainte sur le matériel.

Sol.10) Si on écrit que y est fonction de x alors $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$ donc $y'^2 = \frac{a}{4x} - 1$ donc $y' = \sqrt{\frac{a}{4x} - 1}$ (en effectuant au besoin une symétrie par rapport à Ox pour que $y' > 0$). D'où :

$$y = \int \sqrt{\frac{a}{4x} - 1} \, dx$$

Nécessairement, $x \leq \frac{a}{4}$. Effectuons le changement de variable $x = \frac{a \cos^2(\theta)}{4}$, avec θ élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$.

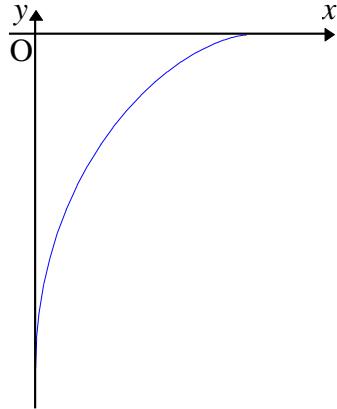
Alors :

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{a \cos(\theta) \sin(\theta)}{2} \, d\theta \\ \Rightarrow y &= -\frac{a}{2} \int \sin^2(\theta) \, d\theta = -\frac{a}{4} \int 1 - \cos(2\theta) \, d\theta \\ &= -\frac{a}{4} \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) (+ \text{Cte qu'on peut supposer nulle par une translation}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{8} (1 + \cos(2\theta)) \\ y = \frac{a}{8} (\sin(2\theta) - 2\theta) \end{cases}$$

Il s'agit d'un arc de cycloïde.



Sol.11) On utilise d'abord la formule $R = \frac{ds}{d\alpha}$ avec α l'angle entre Ox et le vecteur tangent \mathbf{T} , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\alpha} &= a \operatorname{ch}\left(\frac{s}{a}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a \operatorname{ch}\left(\frac{s}{a}\right)} \frac{ds}{d\alpha} &= 1 \end{aligned}$$

On intègre les deux membres par rapport à α . Pour une primitive de $\frac{1}{\operatorname{ch}}$, voir L1/INTEGRAL.PDF.

$$\Leftrightarrow 2 \arctan(\exp(\frac{s}{a})) = \alpha \quad (+ \text{ Cte qu'on peut supposer nulle à une rotation près})$$

Nécessairement, $0 < \alpha < \pi$.

On utilise ensuite le fait que \mathbf{T} vérifie :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

donc :

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} = \frac{1 - \exp(\frac{2s}{a})}{1 + \exp(\frac{2s}{a})} = -\operatorname{th}\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$\text{et} \quad \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha) = \frac{2\tan(\frac{\alpha}{2})}{1 + \tan^2(\frac{\alpha}{2})} = \frac{2\exp(\frac{s}{a})}{1 + \exp(\frac{2s}{a})} = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{s}{a}\right)}$$

Il suffit de prendre une primitive pour déterminer x et y . On prendra la constante d'intégration nulle (à une translation près).

$$\begin{cases} x = -a \ln(\operatorname{ch}(\frac{s}{a})) = a \ln(\sin(\alpha)) \\ y = 2a \arctan(\exp(\frac{s}{a})) = \alpha a \end{cases}$$

ou même directement, y étant élément de $]0, \pi a[$:

$$x = a \ln(\sin(\frac{y}{a}))$$

Sol.12) On peut supposer que le disque est de rayon 1. La courbe cherchée vérifie $R = \sqrt{1 - s^2}$, $-1 \leq s \leq 1$, où R est le rayon de courbure et s l'abscisse curviligne d'origine le centre du disque. Or $R = \frac{ds}{d\alpha}$ où α est l'angle entre Ox et le vecteur tangent \mathbf{T} , donc :

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{1 - s^2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \arcsin(s) \quad (\text{à une rotation près})$$

$$\Leftrightarrow s = \sin(\alpha) \quad \alpha \text{ variant entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}.$$

Le vecteur tangent \mathbf{T} vérifie :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

donc (à une translation près de (x, y)) :

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\alpha} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\alpha} = \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{u + \sin(u)}{4} \quad \text{en posant } u = 2\alpha$$

$$\text{et } \frac{dy}{ds} = \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\alpha} = \sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 - \cos(u)}{4}$$

Il s'agit d'une cycloïde.

Sol.13) On se place dans le repère de centre O et de vecteurs $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, où \mathbf{i} est dirigé de O vers le point de latitude et de longitude nulles, \mathbf{k} est dirigé de O vers le pôle nord, et $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$. La norme euclidienne peut être choisie telle que $R = 1$ (en prenant comme unité le rayon terrestre), ce qui allège les notations. On gérera la notation R dans le calcul des longueurs.

a.1) Dans le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, un point M de latitude φ et de longitude λ a pour coordonnées $(\cos(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Un vecteur unitaire tangent en M au méridien (dirigé en direction du pôle nord) est donné par :

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Le vecteur tangent à la loxodromie dans le sens des latitudes croissantes est $\frac{d\mathbf{OM}}{d\varphi}$, dérivée par rapport à φ de la fonction composée $\varphi \rightarrow (\varphi, \lambda) \rightarrow \mathbf{M}(\varphi, \lambda)$. On a :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} + \frac{d\lambda}{d\varphi} \begin{pmatrix} -\sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{d\mathbf{OM}}{d\varphi} \right\|^2 = 1 + \cos^2(\varphi) \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2$$

$\frac{d\mathbf{OM}}{d\varphi}$ forme un angle α avec \mathbf{N} si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d\mathbf{OM}}{d\varphi}, \mathbf{N} \right\rangle = \cos(\alpha) \left\| \frac{d\mathbf{OM}}{d\varphi} \right\| \\ \Leftrightarrow & 1 = \cos(\alpha) \sqrt{1 + \cos^2(\varphi) \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2} \quad \text{en particulier } \cos(\alpha) > 0 \text{ et } \alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \cos^2(\varphi) \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & 1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \cos^2(\varphi) \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{d\lambda}{d\varphi} = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\cos(\varphi)} \end{aligned}$$

On a + la loxodromie est dans le sens SO-NE et - si elle est dans le sens SE-NO. Supposons par exemple que la loxodromie sont dans le sens SO-NE. On obtient :

$$\lambda = \lambda_0 + \tan(\alpha) \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

λ_0 est la longitude où la loxodromie coupe l'équateur.

a.2) λ tend vers l'infini quand φ tend vers $\frac{\pi}{2}$. La loxodromie s'enroule en spirale autour des pôles.

Néanmoins sa longueur est finie. Si s est l'abscisse curviligne, on a :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \left\| \frac{d\mathbf{OM}}{d\varphi} \right\| = \frac{R}{\cos(\alpha)} \\ \Rightarrow s &= \frac{R\varphi}{\cos(\alpha)} + s_0 \end{aligned}$$

De l'équateur au pôle, φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et la longueur de la loxodromie est $\frac{\pi R}{2\cos(\alpha)}$.

Si (λ_1, φ_1) et (λ_2, φ_2) sont les coordonnées de Paris et Tokyo, on a :

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \tan(\alpha) \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right)$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 + \tan(\alpha) \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \right)$$

donc :

$$\tan(\alpha) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)}$$

On trouve $\tan(\alpha) = -7.66930$, soit $\alpha = -82^\circ 34'$. La loxodromie est dans le sens SE-NO, et, puisque la latitude de Tokyo est inférieure à celle de Paris, on se dirigera vers le SE, avec un angle de $7^\circ 26'$ vers le sud par rapport aux parallèles.

Compte tenu de l'expression de s , la longueur du parcours est $\frac{R(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\alpha)}$ soit 11 354 km.

b.1) Dans le même repère que dans le a), on rappelle que tout point M de la sphère a pour coordonnées $(\cos(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\lambda)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, λ et φ étant fonction de t . Un vecteur tangent \mathbf{T} est donné par :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \lambda' \begin{pmatrix} -\sin(\lambda)\cos(\varphi) \\ \cos(\lambda)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi' \begin{pmatrix} -\cos(\lambda)\sin(\varphi) \\ -\sin(\lambda)\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\lambda'^2 \cos^2(\varphi) + \varphi'^2}$$

On veut que \mathbf{T} fasse un angle constant α avec le plan (i, j) , ce qui se traduit par :

$$\frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{k} \rangle}{\|\mathbf{T}\|} = \sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \varphi' \cos(\varphi) = \sqrt{\lambda'^2 \cos^2(\varphi) + \varphi'^2} \sin(\alpha)$$

b.2) On veut que $z = \sin(\varphi) = \cos(\alpha)\sin(t)$, donc $\varphi = \arcsin(\cos(\alpha)\sin(t))$. On peut remarquer que cela suppose que $|z| \leq \cos(\alpha)$. Il est en effet impossible de poursuivre la courbe au-delà de

$|z| = \cos(\alpha)$, car en un point pour lequel $z = \pm \cos(\alpha)$, le méridien fait précisément un angle α avec le plan équatorial, i.e. l'hélice sphérique est tangente à ce méridien en ces points ultimes. En particulier, l'hélice n'atteint pas les pôles. Sur un escalier s'enroulant sur un réservoir sphérique, on atteint le sommet du réservoir en prolongeant généralement l'hélice par un escalier qui suit un méridien et dont la pente décroît de $\tan(\alpha)$ à 0.

$$\cos^2(\varphi) = 1 - \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t)$$

$$\varphi' = \frac{\cos(\alpha)\cos(t)}{\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t)}}$$

$$\varphi'^2 = \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t)}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda'^2 &= \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \left(\frac{\varphi'^2 \cos^2(\varphi)}{\sin^2(\alpha)} - \varphi'^2 \right) \\ &= \varphi'^2 \left(\frac{1}{\sin^2(\alpha)} - \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \right) \\ &= \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t)} \left(\frac{1}{\sin^2(\alpha)} - \frac{1}{1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t)} \right) \\ &= \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{(1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t))^2} \frac{1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t) - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \\ &= \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{(1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t))^2} \frac{\cos^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)\sin^2(t)}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{(1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t))^2} \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{\sin^2(\alpha)}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{(1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t))\sin(\alpha)} \\ \lambda &= \int \frac{\cos^2(\alpha)\cos^2(t)}{(1 - \cos^2(\alpha)\sin^2(t))\sin(\alpha)} dt \\ &\quad \text{posons } u = \tan(t), dt = \frac{du}{1+u^2} \\ &= \int \frac{1}{(1+u^2)^2} \frac{\cos^2(\alpha)}{(1 - \cos^2(\alpha) \frac{u^2}{1+u^2})\sin(\alpha)} du \\ &= \int \frac{1}{1+u^2} \frac{\cos^2(\alpha)}{(1 + u^2 - \cos^2(\alpha)u^2)\sin(\alpha)} du \\ &= \int \frac{1}{1+u^2} \frac{\cos^2(\alpha)}{(1 + \sin^2(\alpha)u^2)\sin(\alpha)} du \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha)} \int \frac{1}{1+u^2} - \frac{\sin^2(\alpha)}{1 + \sin^2(\alpha)u^2} du \\ &= \frac{\arctan(u)}{\sin(\alpha)} - \arctan(\sin(\alpha)u) + \text{Cte} \\ &= \frac{t}{\sin(\alpha)} - \arctan(\sin(\alpha)\tan(t)) + \text{Cte} \end{aligned}$$

b.3) On a, s étant l'abscisse curviligne :

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right\| = \sqrt{\lambda'^2 \cos^2(\varphi) + \varphi'^2} = \frac{\varphi' \cos(\varphi)}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos(t)}{\tan(\alpha)}$$

$$\text{donc } s = \frac{\sin(t)}{\tan(\alpha)} (+ \text{Cte})$$

Entre les deux points extrêmes obtenus pour $t = \pm \frac{\pi}{2}$, la longueur totale L de l'hélice sphérique est

$L = \frac{2R}{\tan(\alpha)}$ (en réintroduisant le rayon R qui servait d'unité), ce qui est a posteriori évident : on s'élève d'une hauteur $2R\cos(\alpha)$ entre les deux points extrêmes de l'hélice, en suivant un chemin de pente $\tan(\alpha)$, donc $\frac{2R\cos(\alpha)}{L} = \sin(\alpha)$.

c.1) Si $\lambda_B - \lambda_A = \pi \bmod 2\pi$, A et B sont diamétralement opposés et la longueur demandée vaut πR . Sinon, notons θ l'angle géométrique entre \mathbf{OA} et \mathbf{OB} , élément de $]0, \pi[$. On a (en prenant R comme unité) :

$$\begin{aligned} \mathbf{OA} &= \cos(\varphi_A)\cos(\lambda_A)\mathbf{i} + \cos(\varphi_A)\sin(\lambda_A)\mathbf{j} + \sin(\varphi_A)\mathbf{k} \\ \mathbf{OB} &= \cos(\varphi_B)\cos(\lambda_B)\mathbf{i} + \cos(\varphi_B)\sin(\lambda_B)\mathbf{j} + \sin(\varphi_B)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle \\ &= \cos(\varphi_A)\cos(\lambda_A)\cos(\varphi_B)\cos(\lambda_B) + \cos(\varphi_A)\sin(\lambda_A)\cos(\varphi_B)\sin(\lambda_B) + \sin(\varphi_A)\sin(\varphi_B) \\ &= \cos(\varphi_A)\cos(\varphi_B)\cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin(\varphi_A)\sin(\varphi_B) \end{aligned}$$

donc :

$$\cos(\theta) = \cos(\varphi_A)\cos(\varphi_B)\cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin(\varphi_A)\sin(\varphi_B)$$

La distance cherchée est $R\theta = R \arccos(\cos(\varphi_A)\cos(\varphi_B)\cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin(\varphi_A)\sin(\varphi_B))$.

Pour un trajet Paris-Tokyo, on trouvera une distance de 9732 km, soit une économie de près de 1600 km par rapport à la loxodromie.

c.2) $\mathbf{T} = \mathbf{OB} - \langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle \mathbf{OA}$ est dans le plan OAB qui contient le cercle de l'orthodromie et il est orthogonal à \mathbf{OA} donc il est tangent à ce cercle. En A, le vecteur unitaire \mathbf{N} tangent au méridien dirigé vers le nord est :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda_A)\sin(\varphi_A) \\ -\sin(\lambda_A)\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{pmatrix}$$

donc :

$$\cos(\beta) = \frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle}{\|\mathbf{T}\|}$$

Pour éviter d'avoir à calculer $\|\mathbf{T}\|$, on peut aussi utiliser le vecteur unitaire \mathbf{E} tangent au parallèle en A, dirigé vers l'est :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_A) \\ \cos(\lambda_A) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{E} \rangle}{\|\mathbf{T}\|}$$

donc, sachant que \mathbf{OA} est orthogonal à \mathbf{N} et \mathbf{E} et que $\mathbf{OB} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_B)\cos(\varphi_B) \\ \sin(\lambda_B)\cos(\varphi_B) \\ \sin(\varphi_B) \end{pmatrix}$:

$$\tan(\beta) = \frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{E} \rangle}{\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{OB}, \mathbf{E} \rangle}{\langle \mathbf{OB}, \mathbf{N} \rangle} = \frac{\cos(\varphi_B)\sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\cos(\varphi_A)\sin(\varphi_B) - \cos(\varphi_B)\sin(\varphi_A)\cos(\lambda_B - \lambda_A)}$$

On trouvera $\beta = 33^\circ 24'$. Autrement dit, on part de Paris en direction du nord-est, bien que Tokyo ait une latitude plus basse que celle de Paris. Par contre, le cap devra être continûment modifié au cours un parcours.

c.3) Le vecteur $\mathbf{U} = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB}$ est colinéaire à l'axe perpendiculaire au plan du cercle orthodromique. Le plan $(O, \mathbf{U}, \mathbf{k})$ est un plan de symétrie de ce cercle. Il coupe le cercle en deux points où la tangente au cercle est perpendiculaire à ce plan, donc orthogonale à \mathbf{k} , donc parallèle au plan équatorial, donc cette tangente coupe le méridien à angle droit. Ces deux points sont donc les deux vertex. Leurs latitudes ont des signes opposés, et leurs longitudes diffèrent de 180° . On en déduit la latitude d'un vertex, égal à l'angle entre \mathbf{U} et \mathbf{k} , et sa longitude, égale à l'angle entre $-\mathbf{i}$ et le projeté de \mathbf{U} sur le plan équatorial. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} \cos(\lambda_A)\cos(\varphi_A) \\ \sin(\lambda_A)\cos(\varphi_A) \\ \sin(\varphi_A) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos(\lambda_B)\cos(\varphi_B) \\ \sin(\lambda_B)\cos(\varphi_B) \\ \sin(\varphi_B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\lambda_A)\cos(\varphi_A)\sin(\varphi_B) - \sin(\lambda_B)\cos(\varphi_B)\sin(\varphi_A) \\ \sin(\varphi_A)\cos(\lambda_B)\cos(\varphi_B) - \sin(\varphi_B)\cos(\lambda_A)\cos(\varphi_A) \\ \cos(\lambda_A)\cos(\varphi_A)\sin(\lambda_B)\cos(\varphi_B) - \cos(\lambda_B)\cos(\varphi_B)\sin(\lambda_A)\cos(\varphi_A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\lambda_A)\cos(\varphi_A)\sin(\varphi_B) - \sin(\lambda_B)\cos(\varphi_B)\sin(\varphi_A) \\ \sin(\varphi_A)\cos(\lambda_B)\cos(\varphi_B) - \sin(\varphi_B)\cos(\lambda_A)\cos(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A)\cos(\varphi_B)\sin(\lambda_B - \lambda_A) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si on note θ l'angle entre \mathbf{OA} et \mathbf{OB} , on a vu en c.1) que :

$$\cos(\theta) = \cos(\varphi_A)\cos(\varphi_B)\cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin(\varphi_A)\sin(\varphi_B)$$

On a :

$$\| \mathbf{U} \| = \| \mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB} \| = \sin(\theta) \text{ (en prenant R comme unité).}$$

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{k} \rangle = \cos(\varphi_A) \cos(\varphi_B) \sin(\lambda_B - \lambda_A)$$

$$\text{Par conséquent, } \cos(\varphi_V) = \frac{\langle \mathbf{U}, \mathbf{k} \rangle}{\| \mathbf{U} \|} = \frac{\cos(\varphi_A) \cos(\varphi_B) \sin(\lambda_B - \lambda_A)}{\sin(\theta)}$$

Pour l'orthodromie Paris-Tokyo, on trouvera $\varphi_V = 68^\circ 46'$.

Le $p(\mathbf{U})$ projeté de \mathbf{U} sur le plan équatorial a pour composantes dans la base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) :

$$p(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_A) \cos(\varphi_A) \sin(\varphi_B) - \sin(\lambda_B) \cos(\varphi_B) \sin(\varphi_A) \\ \sin(\varphi_A) \cos(\lambda_B) \cos(\varphi_B) - \sin(\varphi_B) \cos(\lambda_A) \cos(\varphi_A) \end{pmatrix}$$

Sa norme est telle que :

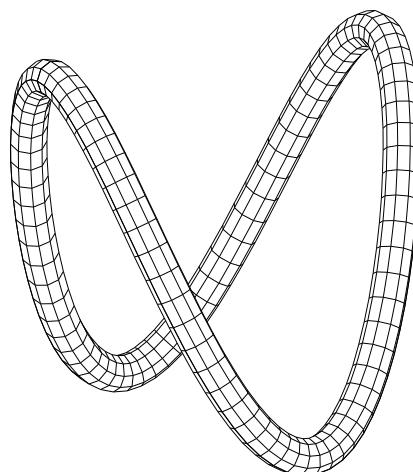
$$\begin{aligned} \| p(\mathbf{U}) \|^2 &= (\sin(\lambda_A) \cos(\varphi_A) \sin(\varphi_B) - \sin(\lambda_B) \cos(\varphi_B) \sin(\varphi_A))^2 \\ &\quad + (\sin(\varphi_A) \cos(\lambda_B) \cos(\varphi_B) - \sin(\varphi_B) \cos(\lambda_A) \cos(\varphi_A))^2 \\ &= \sin^2(\lambda_A) \cos^2(\varphi_A) \sin^2(\varphi_B) + \sin^2(\lambda_B) \cos^2(\varphi_B) \sin^2(\varphi_A) \\ &\quad - 2 \sin(\lambda_A) \cos(\varphi_A) \sin(\varphi_B) \sin(\lambda_B) \cos(\varphi_B) \sin(\varphi_A) \\ &\quad + \sin^2(\varphi_A) \cos^2(\lambda_B) \cos^2(\varphi_B) + \sin^2(\varphi_B) \cos^2(\lambda_A) \cos^2(\varphi_A) \\ &\quad - 2 \sin(\varphi_A) \cos(\lambda_B) \cos(\varphi_B) \sin(\varphi_B) \cos(\lambda_A) \cos(\varphi_A) \\ &= \cos^2(\varphi_A) \sin^2(\varphi_B) + \sin^2(\varphi_A) \cos^2(\varphi_B) \\ &\quad - 2 \sin(\varphi_A) \cos(\varphi_A) \sin(\varphi_B) \cos(\varphi_B) \cos(\lambda_B - \lambda_A) \\ &= \sin^2(\varphi_A + \varphi_B) - \sin(2\varphi_A) \sin(2\varphi_B) \cos^2\left(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\cos(\lambda_V) = \frac{\langle p(\mathbf{U}), -\mathbf{i} \rangle}{\| p(\mathbf{U}) \|} = \frac{\sin(\lambda_B) \cos(\varphi_B) \sin(\varphi_A) - \sin(\lambda_A) \cos(\varphi_A) \sin(\varphi_B)}{\sqrt{\sin^2(\varphi_A + \varphi_B) - \sin(2\varphi_A) \sin(2\varphi_B) \cos^2\left(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{2}\right)}}$$

Pour le trajet Paris-Tokyo, on trouvera $\lambda_V = 65^\circ 57'$.

Le vertex se situe en Russie, un peu au nord du cercle polaire arctique.

Sol.14) a) Quand t varie, le projeté $(x(t), y(t), 0)$ du point $M(t)$ décrit dans le plan Oxy le cercle de centre O et de rayon 1, alors que sa cote $z(t)$ oscille deux fois entre 1 et -1 . On représente ci-dessous la courbe après l'avoir épaissi en un tube de façon à la rendre plus visible :



b) Les calculs sont fastidieux.

$$\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{OM}}{dt} \right\| = \sqrt{1 + 4\sin^2(2t)}$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{OM}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\sin^2(2t)}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\frac{8\sin(2t)\cos(2t)}{(1 + 4\sin^2(2t))^2} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{1 + 4\sin^2(2t)} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ -4\cos(2t) \end{pmatrix} \\ &= \dots = \frac{1}{(1 + 16\sin^2(t)\cos^2(t))^2} \begin{pmatrix} -\cos(t)(1 + 16\sin^4(t)) \\ -\sin(t)(1 + 16\cos^4(t)) \\ 4(\sin^2(t) - \cos^2(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dont on peut vérifier qu'il est bien orthogonal à \mathbf{T} .

Le vecteur normal \mathbf{N} est le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\begin{pmatrix} -\cos(t)(1 + 16\sin^4(t)) \\ -\sin(t)(1 + 16\cos^4(t)) \\ 4(\sin^2(t) - \cos^2(t)) \end{pmatrix}$.

$$\text{Courbure } C = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{\sqrt{17 - 48\sin^2(t)\cos^2(t)}}{(1 + 16\sin^2(t)\cos^2(t))^{3/2}}$$

$$\text{Par exemple, } C = \begin{cases} \sqrt{17} \text{ pour } t = 0 \bmod \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{5} \text{ pour } t = \frac{\pi}{4} \bmod \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le vecteur binormal vaut $\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}$. On vérifiera que c'est le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\begin{pmatrix} -4\cos^3(t) \\ 4\sin^3(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{17 - 48\sin^2(t)\cos^2(t)}} \begin{pmatrix} -4\cos^3(t) \\ 4\sin^3(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Torsion } \tau = -\left\langle \frac{d\mathbf{B}}{ds}, \mathbf{N} \right\rangle = \frac{12\sin(t)\cos(t)}{17 - 48\sin^2(t)\cos^2(t)}$$

$$\text{Par exemple, } \tau = 0 \text{ pour } t = \begin{cases} 0 \bmod \frac{\pi}{2} \\ \frac{6}{5} \text{ pour } t = \frac{\pi}{4} \bmod \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

