DENOMBREMENT

PLAN

I : Listes

1- Sans répétition

Les concepts suivants sont analogues :

- ranger dans l'ordre p objets pris parmi n.
- définir une suite $(x_1, ..., x_p)$, les x_i étant des éléments distincts deux à deux d'un ensemble de n éléments. x_i est l'objet rangé en i-ème position.
- définir une injection d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. L'injection est $i \in \{1, ..., p\} \to x_i \in \{1, ..., n\}$ et c'est une injection si et seulement si les x_i sont distincts.

On définit dans ce cas une **liste sans répétition** de p éléments parmi n. Le nombre de telles listes est :

$$n(n-1)(n-2)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad \text{pour } p \leq n$$

En effet, on choisit d'abord un objet parmi n, puis un deuxième parmi les $n - 1$ restants, puis un troisième parmi les $n - 2$ restants, etc..., les choix se multipliant (le etc... cache en fait une récurrence implicite que seuls les lecteurs avides d'une parfaite rigueur mettront en évidence).

Si $p > n$, ce nombre est nul.

EXEMPLE :

❑ On considère 5 boules de couleurs différentes. On en prend 3 que l'on range dans un certain ordre. Il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ dispositions possibles.

Dans le cas où $p = n$, on obtient une identité entre :

- ranger dans l'ordre n objets.
- définir une permutation de n objets.
- définir une bijection entre deux ensembles de n éléments.

Le nombre de permutations est $n!$

2- Avec répétition

Les concepts suivants sont analogues :

- ranger dans l'ordre p objets, chaque objet étant doté d'un attribut choisi parmi n (par exemple la couleur). Deux objets de même attribut sont indiscernables.
- définir une suite $(x_1, ..., x_p)$, les x_i étant des éléments distincts ou non d'un ensemble de n éléments. x_i désigne l'attribut de l'objet placé en i-ème position, le même attribut pouvant apparaître plusieurs fois.
- définir une application d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. L'application est $i \in \{1, ..., p\} \to x_i \in \{1, ..., n\}$ sans condition sur les x_i.

On définit dans ce cas une **liste avec répétition** de p éléments parmi n. Le nombre de telles listes est n^p. Pour chacun des p objets, il y a en effet n choix.

EXEMPLES :

❑ On considère des boules de 5 couleurs possibles. On en prend 3 que l'on range dans un certain ordre. Il y a $5^3 = 125$ dispositions possibles.

❑ Soit E un ensemble de n éléments et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour chaque partie A de E, on définit la **fonction indicatrice** $\mathbf{1}_A$ de A par :

$$E \to \{0,1\}$$
$$x \to \mathbf{1}_A(x) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array}\right.$$

Inversement, toute fonction f de E dans $\{0,1\}$ est une fonction indicatrice. Son ensemble associé est $A = \{x \mid f(x) = 1\}$. On définit ainsi une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$. Il existe 2^n fonctions de E dans $\{0,1\}$. Il existe donc 2^n éléments de $\mathcal{P}(E)$ ou parties de E.

II : Combinaisons

1- Sans répétition

Les concepts suivants sont analogues :

- choisir un ensemble de p objets distincts, pris parmi n, l'ordre des éléments choisis n'intervenant pas.
- définir une suite *strictement croissante* $(x_1, ..., x_p)$, les x_i étant des éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On numérote les n objets de 1 à n, et les x_i désignent les numéros des p éléments choisis. Puisque l'ordre de choix n'intervient pas, on peut classer les numéros par ordre croissant. Les inégalités sont strictes car les éléments sont distincts.

On définit dans ce cas une **combinaison (sans répétition)** de p éléments parmi n. Nous montrons plus loin que le nombre de telles combinaisons est :

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ noté } \binom{n}{p} \text{ si } 0 \leq p \leq n$$

On le lit p *parmi* n, ce qui correspond exactement à la situation consistant à choisir p objet parmi n. On retrouve cette quantité en probabilité dans le nombre de chemins conduisant à p succès dans la loi binomiale, puisque ce nombre de chemins revient à définir, parmi les n expériences de Bernoulli, quelles seront les p expériences qui donneront un succès, et donc à choisir p expériences parmi les n (voir le chapitre L1/PROBA1.PDF).
Si $p > n$, ce nombre est nul.

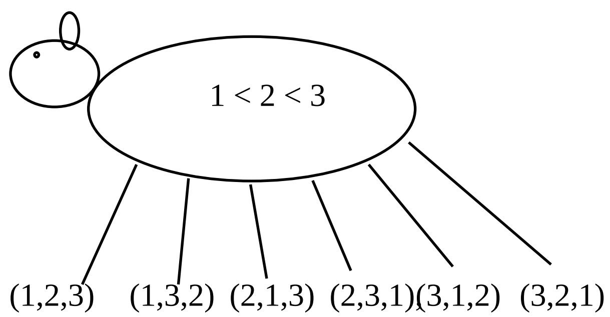
On note aussi (de plus en plus rarement) C_n^p le coefficient binomial. Plus généralement, pour α réel quelconque et p entier, on note :

$$\binom{\alpha}{p} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{p!}$$

mais on prendra garde que pour α non élément de $\mathbb{N}$, il n'y a pas de définition de la factorielle de α. Cette quantité intervient dans le développement limité de la fonction $x \rightarrow (1+x)^\alpha$ (voir L1/DLTAYLOR.PDF).

Montrons donc que $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}$. Chaque combinaison de p éléments peut être définie à partir de $p!$ listes sans répétition différentes, obtenues en rangeant les p éléments en question selon toutes les permutations possibles de ces p éléments. Il y a donc $p!$ fois moins de combinaisons que de telles listes. Or le nombre de listes sans répétition de p éléments parmi n est $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$. D'où le résultat annoncé.

Cette méthode de raisonnement est connue sous le nom **de principe des bergers**. Pour compter ses moutons, le berger compte en effet le nombre de pattes et divise le résultat par 4.
Dans le cas présent, un mouton formant une combinaison possède $p!$ pattes constituées de chacune des listes donnant cette combinaison. Ci dessous, la combinaison comprenant les nombres 1, 2, 3 :



Comme il y a au total $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ listes et que chaque mouton possède $p!$ pattes, il y a bien $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}$ moutons.

Sous une forme abstraite, le principe des bergers s'énonce également de la façon suivante :
Etant donnés deux ensembles E et F, et une application f de E dans F tels que, pour tout élément y de F, Card $f^{-1}(\{y\}) = p$, alors Card E = $p \times$ Card F.

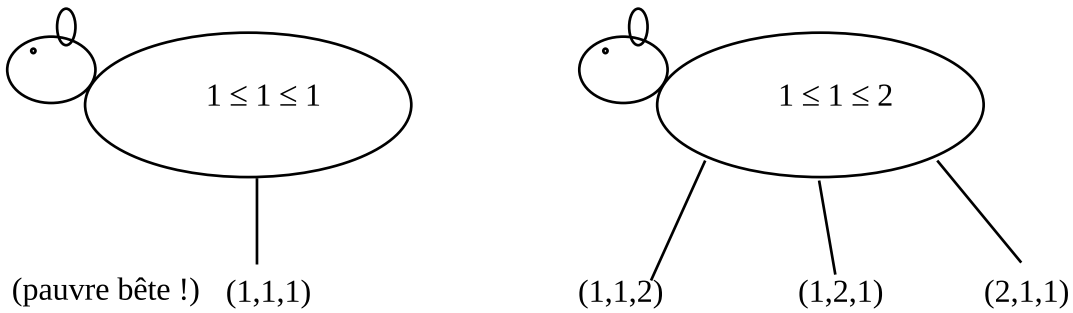
EXEMPLE :
❑ On considère 5 boules de couleurs différentes. On en prend 3 dans un ordre arbitraire.
Il y a $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10$ choix possibles.

2- Avec répétition

Les concepts suivants sont analogues :

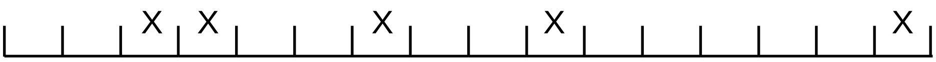
- choisir une suite non ordonnée de p objets, chaque objet étant doté d'un attribut choisi parmi n (par exemple la couleur). Deux objets de même attributs sont indiscernables.
- définir une suite *croissante au sens large* $(x_1, ..., x_p)$, les x_i étant des éléments de $[\![1, n]\!]$. On numérote les n attributs possibles de 1 à n, et les x_i désignent les numéros des p attributs des éléments choisis. Puisque l'ordre de choix n'intervient pas, on peut classer les numéros par ordre croissant. Les inégalités sont larges car le même attribut peut apparaître plusieurs fois.
- définir un n-uplet d'entiers positifs ou nuls $(a_1, ..., a_n)$ avec $a_1 + ... + a_n = p$. a_i désignent le nombre de fois où l'attribut i est choisi.

On définit dans ce cas une **combinaison avec répétition** de p éléments parmi n. Le nombre de telles combinaisons est difficile à trouver à partir des listes. En effet, ici, les moutons n'ont pas tous le même nombre de pattes ☹ !!



Il convient alors de coder la situation de façon à se ramener à un problème connu.

Nous disposons de n caractères distincts $C_1, C_2, ..., C_n$. On place, dans une suite de $n + p - 1$ cases, $n - 1$ croix qui séparent les objets de même caractère des autres. Chaque case non occupée par une croix correspond à un objet d'un caractère donné. Le nombre de cases non occupées est donc égal à p :



Dans l'exemple ci-dessus, on a $n = 6$, $p = 11$; il y a $a_1 = 2$ objets C_1, $a_2 = 0$ objets C_2, $a_3 = 2$ objets C_3, $a_4 = 2$ objet C_4, $a_5 = 5$ objet C_5, $a_6 = 0$ objet C_6. Cette disposition correspond alors à la combinaison (1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5).

Le nombre de combinaisons avec répétition de p objets parmi n est égal au nombre de façon de choisir $n - 1$ cases (où placer les croix) parmi $n + p - 1$ cases. C'est donc $\binom{n+p-1}{n-1}$. Un moyen de mémoriser ce résultat est le suivant :

$$\binom{n+p-1}{n-1} = \frac{(n+p-1)(n+p)...(n+1)n}{p!} = \binom{n+p-1}{p}$$

alors que $\binom{-n}{p} = \frac{(-n)(-n-1)...(-n-p+1)}{p!} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$

Ainsi, le nombre de combinaisons avec répétition de p objets parmi n peut aussi s'écrire $\left|\binom{-n}{p}\right|$, à comparer au nombre de combinaisons sans répétition qui est $\binom{n}{p}$.

EXEMPLE :

❑ On considère des boules de 5 couleurs possibles. On en prend 3. Il y a 35 choix possibles.

III : Formules classiques des coefficients binomiaux

1- Valeurs courantes

A savoir sans hésitation

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1} \qquad \boxed{\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n} \qquad \boxed{\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}}$$

2- Formules de récurrence

En utilisant l'expression des coefficients binomiaux au moyen des factorielles, on prouve aisément que :

$$\boxed{\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}} \qquad \boxed{\forall\, n \geq 1, \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}} \qquad \boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}$$

La première formule se justifie également en remarquant que choisir p objet parmi n, c'est aussi en exclure $n - p$ parmi n.

La troisième formule se montre également en supposant que parmi les n objets, il en existe un possédant une marque particulière. Choisir p objets parmi n, c'est alors :

ou bien choisir l'objet marqué et $p - 1$ objets parmi les $n - 1$ restants

ou bien choisir p objets parmi les $n - 1$ objets non marqués.

Elle reste vraie pour $p = 0$ en convenant que $\binom{n-1}{-1} = 0$, et pour $n = p$ puisque $\binom{n-1}{n} = 0$.

Cette formule se visualise dans le **triangle de Pascal** formé des coefficients $\binom{n}{p}$ (n indice de ligne, p indice de colonne) de la façon suivante. Si on ajoute deux éléments successifs d'une même ligne, le résultat obtenu se situe dans la colonne de l'élément de droite et sur la ligne suivante :

1											
1	1										
1	2	1									
1	3	3	1								
1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

En itérant la troisième formule, on prouve par récurrence sur n que $\boxed{\binom{n}{p} = \sum_{k=p-1}^{n-1} \binom{k}{p-1}}$. Cette formule peut aussi se montrer directement de la façon suivante. On considère n boules numérotées de 1 à n. On a $\binom{n}{p}$ choix d'en tirer p. Mais pour effectuer un tel choix, on peut aussi procéder comme suit : pour k variant de $p - 1$ à $n - 1$, prendre la boule $k + 1$ et choisir $p - 1$ boules parmi les boules numérotées de 1 à k.

Cette formule se visualise dans le triangle de pascal de la façon suivante, en sommant les termes d'une même colonne :

1											
1	1										
1	2	1									
1	3	3	1								
1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Voici un exemple d'application de cette formule. Pour $p = 2$, et en prenant $n + 1$ au lieu de n, on retrouve la somme des entiers :

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k}$$

Pour $p = 3$, (et là aussi $n + 1$ au lieu de n), on obtient :

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$$

On peut donc en déduire $\sum_{k=1}^{n} k^2$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

En procédant de même pour $p = 4$, on prouvera que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

3- Formule du binôme de Newton

Dans un anneau commutatif unitaire, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}$$

Cette formule se montre par récurrence sur n. En effet, elle est vraie pour $n = 0$ ou $n = 1$. Si elle est vraie au rang n, alors :

$$(a+b)^{n+1} = \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}\Big)(a+b) =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{p+1}\, b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p+1}$$

$$= \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} a^p\, b^{n-p+1} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p+1}$$

en faisant le changement d'indice $p + 1 \to p$ dans la première somme

$$= \sum_{p=0}^{n+1} \left(\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}\right) a^p\, b^{n-p+1} \quad \text{avec la convention } \binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$$

$$= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^p\, b^{n+1-p} \text{ avec la formule } \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

En prenant $a = 1$ et $b = \pm 1$, on notera en particulier que :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n}$$

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} = (1-1)^n = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } n \geq 1 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{array}\right.$$

Pour $n \geq 1$, en séparant les indices pairs des indices impairs dans la deuxième formule, on en déduit que $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1}$ sont égaux, et par conséquent, d'après la première formule que :

$$\boxed{\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1} \text{ pour } n \geq 1}$$

Annexe I : nombre de partitions et de surjections

Dans le paragraphe sur les arrangements sans répétition, on a dénombré le nombre d'injections d'un ensemble dans un autre. Le nombre de surjections est beaucoup plus difficile à déterminer.

Pour n entier strictement positif, on note I_n l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
Pour p entier strictement positif, on appelle p-partition de I_n une famille constituée de p parties disjointes de I_n, non vides, et dont la réunion est égale à I_n. (Voir L1/ENSEMBLE.PDF).
On note $S(n, p)$ le nombre de p-partitions de I_n. Comme chacune des p parties posséde au moins un élément, il faut que $p \leq n$. On pose donc $S(n, p) = 0$ si $p > n$.

On vérifiera par exemple que :

$S(n, 1) = S(n, n) = 1$

$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ (nombre de paires $\{A, A^c\}$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$)

$S(n, n-1) = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ (toutes les parties possèdent un élément sauf une qui en possède deux)

On peut établir une formule de récurrence entre les $S(n, p)$. Pour tout n supérieur ou égal à 2 et tout p supérieur ou égal à 2, on a :

$$S(n, p) = S(n-1,p-1) + p \times S(n-1, p)$$

En effet, parmi les p-partitions de I_n, il y a :
❑ celles qui contiennent le singleton $\{n\}$ et une $(p–1)$-partition de I_{n-1}, et qui sont donc au nombre de $S(n-1, p-1)$.
❑ celles qui ne contiennent pas le singleton $\{n\}$. On choisit alors une p-partition des $n - 1$ éléments restants, et on ajoute n à l'une des p parties, ce qui donne $p \times S(n-1, p)$ choix possibles.

Le relation de récurrence diffère légèrement de celle des coefficients binomiaux. On peut construire rapidement un triangle des $S(n, p)$:

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$

$n = 1$	1	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	1	0	0	0	0
$n = 3$	1	3	1	0	0	0
$n = 4$	1	7	6	1	0	0
$n = 5$	1	15	25	10	1	0
$n = 6$	1	31	90	65	15	1

On note maintenant $\sigma(n, p)$ le nombre de surjections de I_n sur I_p. On pose $\sigma(n, p) = 0$ pour $p > n$. On vérifiera que :

$\sigma(n, 1) = 1$ (Tous les éléments de I_n ont même image)

$\sigma(n, 2) = 2^n - 2$ (Chaque élément de I_n a deux images possibles. Il faut éliminer les deux applications constantes qui ne sont pas surjectives)

$\sigma(n, n) = n!$ (nombre de permutations de n éléments).

On convient que $\sigma(0, 0) = 1$ et que $0^0 = 1$. Pour $n > 0$, $\sigma(n, 0) = 0$.

Il existe également une relation de récurrence liant les $\sigma(n, p)$. Pour $2 \leq p \leq n$, on a :

$$\sigma(n, p) = p \times (\sigma(n-1, p-1) + \sigma(n-1, p))$$

(La convention $\sigma(0, 0) = 1$ rend également la relation précédente valide pour $p = 1$).

En effet, parmi les surjections f de I_n sur I_p, il y a :

❑ celles pour lesquelles $f(n)$ a pour seul antécédent n. On choisit $f(n)$ parmi p valeurs, puis une surjection des $n - 1$ éléments restants sur les $p - 1$ autres que $f(n)$, soit $p \times \sigma(n-1, p-1)$ choix possibles.

❑ celles pour lesquelles $f(n)$ admet plusieurs antécédents. On choisit $f(n)$ parmi p valeurs, puis on définit une surjection de I_{n-1} sur I_p soit $p \times \sigma(n-1, p)$ choix possibles.

Il y a une relation directe entre les $\sigma(n, p)$ et les $S(n, p)$. En effet, à toute surjection f de I_n sur I_p, on associe une p-partition de I_n $\{A_1, ..., A_p\}$ où $A_i = f^{-1}(\{i\})$. Inversement, considérons une p-partition $\{B_1, ..., B_p\}$ donnée, il y a $p!$ surjections associée car B_1 est l'un des A_i (autrement dit, il faut définir l'image commune des éléments de B_1) ce qui laisse p choix possibles, puis B_2 est l'un des A_j restants ce qui donne $p - 1$ choix possibles, etc... Ainsi :

$$\sigma(n, p) = p!\, S(n, p)$$

On aurait pu retrouver ce résultat grâce aux relations de récurrence, en faisant une récurrence sur n. En effet, on a : $\forall\, p$, $\sigma(1, p) = p!\, S(1, p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p = 1 \\ 0 \text{ si } p \geq 2 \end{cases}$. Supposons que, pour tout p, on ait l'égalité $\sigma(n-1, p) = p!\, S(n-1, p)$. On a alors, pour tout p :

$$\begin{aligned} p!\, S(n, p) &= p! \times (S(n-1, p-1) + p \times S(n-1, p)) \\ &= p \times (\sigma(n-1, p-1) + \sigma(n-1, p)) \\ &= \sigma(n, p) \end{aligned}$$

Les $\sigma(n, p)$ peuvent se présenter sous forme de tableau, comme les $\binom{n}{p}$ et les $S(n,p)$:

	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$	$p = 6$
$n = 1$	1	0	0	0	0	0
$n = 2$	1	2	0	0	0	0

$n = 3$	1	6	6	0	0	0
$n = 4$	1	14	36	24	0	0
$n = 5$	1	30	150	240	120	0
$n = 6$	1	62	540	1560	1800	720

Mais cela ne donne pas une formule explicite des $\sigma(n, p)$, ce que nous allons faire maintenant.

Toute application f de I_n sur I_p étant une surjection de I_n sur $f(I_n)$, on a :

$$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sigma(n, k)$$

où p^n est le nombre d'applications de I_n dans I_p. Pour définir une telle application f, on choisit son image $f(I_n)$ soit $\binom{p}{k}$ choix possibles, k variant de 0 à p étant le nombre d'éléments de $f(I_n)$, puis cette image étant choisie, on définit une surjection de I_n sur $f(I_n)$, soit $\sigma(n, k)$ choix possibles.

Les relations $p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \sigma(n,k)$, pour n donné et p variant de 0 à n sont considérées comme $n + 1$ équations dont les $n + 1$ inconnues sont les $\sigma(n, k)$, $0 \le k \le n$. La matrice de ce système est de terme général $\binom{p}{k}$, à la $p^{\text{ème}}$ ligne et la $k^{\text{ème}}$ colonne, soit

$$\begin{pmatrix} 0^n \\ 1^n \\ \dots \\ (n-1)^n \\ n^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sigma(n, 0) \\ \sigma(n, 1) \\ \dots \\ \sigma(n, n-1) \\ \sigma(n, n) \end{pmatrix}$$

où A est la transposée de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. B est elle-même la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique, qui à X^k associe $(X + 1)^k$. L'endomorphisme réciproque associe donc à X^k le polynôme $(X - 1)^k$ de sorte que :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & & 1 & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

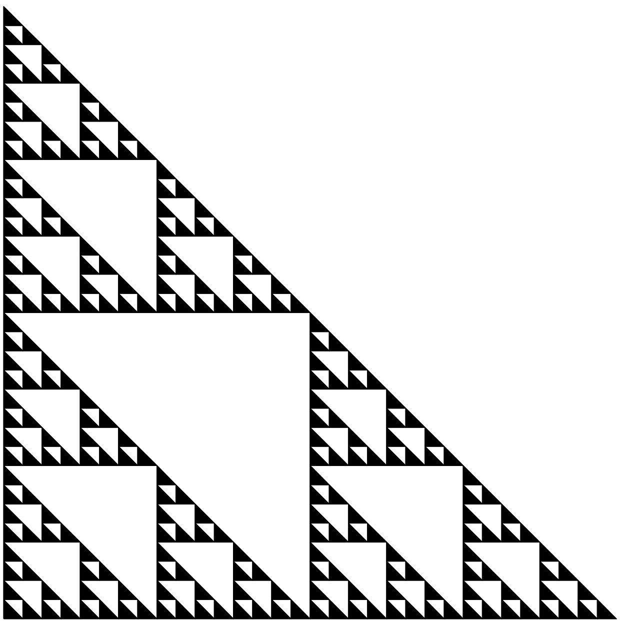
A^{-1} est la transposée de cette matrice. La relation $\begin{pmatrix} \sigma(n, 0) \\ \sigma(n, 1) \\ ... \\ \sigma(n, n-1) \\ \sigma(n, n) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0^n \\ 1^n \\ ... \\ (n-1)^n \\ n^n \end{pmatrix}$ donne alors la relation $\sigma(n, p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} k^n$. Tel est le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments. Le nombre de partitions $S(n, p)$ s'obtient en divisant ce résultat par $p!$.

Une autre démonstration de l'expression de $\sigma(n, p)$ est donnée dans les exercices du chapitre L2/SERIENTR.PDF.

Une programmation du calcul des $\sigma(n, p)$ est donnée dans les exercices du chapitre L2/ALGO2.PDF.

Annexe II : Le triangle de Sierpinski

Soit n un entier. Considérons le triangle de Pascal, de coefficient $\binom{m}{p}$ avec $0 \leq m \leq 2^n - 1$. Effaçons les coefficients binomiaux pairs et remplaçons les coefficients binomiaux impairs par un triangle noir. On obtient la figure suivante (ici pour $n = 5$) :



On remarque que la figure se répète régulièrement. Plus précisément, le triangle de coefficients $\binom{m}{p}$ mod 2, m étant l'indice de ligne et p l'indice de colonne, avec $0 \leq m \leq 2^{n-1} - 1$, se retrouve à l'identique et répété deux fois pour $2^{n-1} \leq m \leq 2^n - 1$. Cela signifie que :

$$\forall\, m \in [\![0, 2^{n-1} - 1]\!], \forall\, p \in [\![0, 2^{n-1} - 1]\!], \binom{m + 2^{n-1}}{p} \equiv \binom{m + 2^{n-1}}{p + 2^{n-1}} \equiv \binom{m}{p} \text{ mod } 2$$

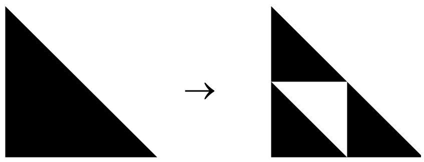
Montrons cette propriété par récurrence, ainsi que le fait que les coefficients de la dernière ligne $\binom{2^n - 1}{p}$ sont tous impairs.

On le vérifie trivialement pour $n = 1$.
Supposons les relations vraies jusqu'à la ligne $2^n - 1$. La ligne 2^n est constituée des coefficients suivants :

$$\binom{2^n}{p} = \binom{2^n - 1}{p} + \binom{2^n - 1}{p - 1} \qquad \text{voir les propriétés III-2)}$$
$$\equiv \left[\begin{array}{l} 1 \text{ si } p = 0 \text{ ou } 2^n \\ 1 + 1 \bmod 2 \equiv 0 \bmod 2, \text{ si } 1 \leq p \leq 2^n - 1 \end{array} \right.$$

en utilisant le fait que tous les termes de la ligne $2^n - 1$ sont impairs. On voit donc que tous les termes de la ligne 2^n sont nuls, sauf pour $p = 0$ et $p = 2^n$. Dès lors la première partie de la ligne 2^n pour $0 \leq p \leq 2^n - 1$ et la deuxième partie de la ligne 2^n pour $2^n \leq p \leq 2^{n+1} - 1$ ont un terme égal à 1 en première position et tous les autres nuls. Ces deux parties sont égales à la ligne 0, dont les coefficients $\binom{0}{p}$ sont tous nuls, sauf pour $p = 0$. On construit ensuite les lignes suivantes en utilisant la même relation $\binom{k}{p} \equiv \binom{k-1}{p} + \binom{k-1}{p-1} \bmod 2$, et puisque les lignes 0 et les deux moitiés de la ligne 2^n sont identiques, les calculs donneront les mêmes résultats pour les lignes suivantes, que l'on prenne $k \in [\![1, 2^n - 1]\!]$, ou $k + 2^n$ et $p \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, ou $k + 2^n$ et $p \in [\![2^n, 2^{n+1} - 1]\!]$ (on aura besoin pour calculer $\binom{k + 2^n}{2^n}$ de remarquer que $\binom{k + 2^n - 1}{2^n - 1} = \binom{k}{2^n - 1} = 0$ pour $k - 1 \leq 2^n - 1$). Le calcul se poursuit jusqu'à $k = 2^n - 1$, cette ligne se trouvant copiée en deux exemplaires à la ligne $2^{n+1} - 1$. Puisque la ligne $2^n - 1$ est constituée de 1 mod 2, il en sera de même de la ligne $2^{n+1} - 1$.
On a donc prouvé que le triangle compris entre les lignes 0 et $2^n - 1$ est copié deux fois entre les lignes 2^n et $2^{n+1} - 1$, la dernière ligne étant composée de nombres impairs.

La construction itérative de la figure peut également se faire comme suit. On part d'un triangle noir dont on enlève le triangle médian :



On itère le procédé sur chacun des petits triangles noirs restants. En poursuivant indéfiniment, il reste une structure fractale appelée le **triangle de Sierpinsky**.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) n garçons et n filles font une ronde. Combien y a-t-il de dispositions possibles en respectant l'alternance fille-garçon, et sans respecter l'alternance ?

Exo.2) Quel est le nombre de surjections d'un ensemble à $n + 1$ éléments sur un ensemble à n éléments ? On établira ce nombre par un raisonnement direct, sans utiliser l'annexe qui donne une expression générale du nombre de surjections d'un ensemble fini dans un autre, puis on vérifiera que le résultat trouvé est cohérent avec celui de l'annexe pour les premières valeurs de n.

Exo.3) On dispose de trois bateaux pour neuf passagers. Combien y a-t-il de façons de les répartir :

a) sachant que chaque bateau comporte trois passagers ?
b) sachant que chaque bateau comporte entre deux et quatre passagers ?
c) sachant qu'aucun bateau n'est vide ?

Exo.4) Vous décidez d'acheter au marché 12 fruits parmi des pommes, des poires et des pêches. Votre choix porte sur le nombre de fruits à prendre dans chaque catégorie. Combien de choix différents avez-vous ?

Exo.5) a) Dans la version initiale du loto français, on devait choisir 6 numéros parmi 49. Combien y a-t-il de tirages ?
b) Parmi ceux-ci, combien de tirages possèdent au moins deux numéros consécutifs ?

Exo.6) Dans le plan, on veut aller du point (0, 0) au point (n, p) en se déplaçant parallèlement aux axes, d'un point à coordonnées entières à l'autre.
a) Combien y a-t-il de tels chemins, de longueur minimale ?
b) Pour tout $k \in [\![1, \text{Min}(n, p)]\!]$, combien y a-t-il de tels chemins passant par le point A_k de coordonnées $(k, p - k)$?

c) En déduire les valeurs de $\sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}\binom{p}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

d) Calculer de deux façons différentes le coefficient de X^p dans le développement de $(1 + X)^n(1 + X)^p$ et retrouver le résultat du c).

Exo.7) Soit E un ensemble possédant n éléments. Calculer :
a) $\sum_{X \subset E} \text{Card}(X)$

b) $\sum_{X \subset E,\, Y \subset E} \text{Card}(X \cap Y)$

c) $\sum_{X \subset E,\, Y \subset E} \text{Card}(X \cup Y)$

Exo.8) Soit E un ensemble de cardinal n.
a) Quel est le nombre de couples de parties (X, Y) de E tels que X soit inclus dans Y ?
b) Quel est le nombre de r-uplets $(X_1, X_2, ..., X_r)$ de E tels que $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_r$?

Exo.9) Soient p et q deux entiers naturels, E l'ensemble des suites de $p + q + 1$ termes valant 0 ou 1, A le sous-ensemble de E des suites possédant au moins $p + 1$ fois le 0, B le sous-ensemble de E des suites possédant au moins $q + 1$ fois le 1, et pour tout k, A_k le sous-ensemble de A des suites possédant k fois le 1 avant le $(p + 1)$-ème 0.
a) Calculer Card(E) et Card(A_k).
b) Donner une expression de Card(A) et Card(B).
c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{q} \frac{\binom{p+k}{k}}{2^{p+k}} + \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{q+k}{k}}{2^{q+k}}$

Exo.10) Les p_i étant des nombres premiers distincts, combien peut-on former de quantités de la forme :

a) $p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times ... \times p_n^{r_n}$, les r_i étant des entiers naturels de somme r ?

b) $p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times ... \times p_n^{r_n}$, les r_i étant des entiers naturels de somme inférieure ou égale à r ?

Exo.11) On considère un alphabet A constitué de k lettres. Soit B un ensemble de mots de n lettres de cet alphabet, tels que deux mots de B différent d'au moins deux lettres. Montrer que $\mathrm{Card}(B) \le k^{n-1}$.

Exo.12) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!r!}$.

Exo.13) Montrer que, pour tout entier m et n, $\displaystyle\sum \frac{m!}{x_1!\, x_2! \,...\, x_n!} = n^m$, la somme étant effectuée sur tous les n-uplets $(x_1, ..., x_n)$ d'entiers positifs ou nuls de somme m.

2- Solutions

Sol.1) On suppose que la ronde est invariante par rotation, mais pas par symétrie (on distingue la droite de la gauche).
Si on respecte l'alternance, il y a $n! \times (n - 1)!$ choix possibles. On choisit arbitrairement l'un des garçons comme pivot. On permute les $n - 1$ garçons sur les $n - 1$ places restantes disponibles pour les $n - 1$ garçons restants, et on permute les n filles sur les n places disponibles pour les filles.
Si on ne respecte pas l'alternance, il y en a $(2n - 1)!$. On choisit arbitrairement l'un des garçons pour pivot et on permute les $2n - 1$ autres enfants sur les $2n - 1$ autres places.

Sol.2) $n \times \binom{n+1}{2} \times (n - 1)! = \dfrac{n(n + 1)}{2} \times n!$ (choix d'un élément de l'ensemble d'arrivée ayant deux antécédents $\times$ choix de ces deux antécédents $\times$ nombre de bijections entre les éléments restants). Les premières valeurs numériques de $\dfrac{n(n + 1)}{2} \times n!$ et $\sigma(n + 1,n)$ donnée en annexe valent toutes deux, pour $1 \le n \le 10$: 1, 6, 36, 240, 1800, 15120, 141120, 1451520, 16329600, 199584000.

Sol.3) a) On choisit les 3 passagers (parmi 9) du premier bateau, puis les 3 passagers (parmi les 6 restants) du deuxième bateau, les 3 derniers passagers prenant le troisième bateau. Le nombre de dispositions est donc $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = 1680$.
b) La répartition des passagers peut être 3-3-3 ou bien 2-3-4. Le cas 3-3-3 est traité en a). Pour le deuxième cas, on choisit 4 passagers (parmi 9) pour un bateau, puis 3 passagers (parmi les 5 restants) pour un deuxième bateau, les 2 derniers passagers étant attribués à un troisième bateau. Il reste ensuite à affecter les trois groupes aux trois bateaux, ce qui peut se faire de 6 façons différentes (nombre de permutations de trois objets), d'où :

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} + 6 \times \binom{9}{4} \times \binom{5}{3} = 9240$$

c) On compte le nombre de répartitions sans condition (3^9) et on lui retranche le nombre de répartitions où un seul bateau est vide ($3 \times (2^9 - 2)$ = choix du bateau vide $\times$ répartition de 9 passagers dans les deux autres bateaux en excluant de mettre tous les passagers dans un seul de ces deux bateaux) ou deux bateaux sont vides (3 choix du bateau non vide) :

$$3^9 - 3 \times (2^9 - 2) - 3 = 18150$$

Sol.4) Il s'agit d'une combinaison avec répétition de 12 objets parmi 3 types. Donc le nombre de choix est $\left|\binom{-3}{12}\right| = \binom{14}{2} = 91$.

Sol.5) a) Il y a $\binom{49}{6}$ tirages possibles, soit 13 983 816.

b) Cherchons d'abord le nombre de tirages $1 \leq x_1 < x_2 < ... < x_6 \leq 49$ ne possédant pas deux numéros consécutifs. Chacun de ces tirages vérifie : $\forall\ i,\ x_{i+1} - x_i \geq 2$. A une telle suite (x_i), on associe une autre suite (y_i) par : $\forall\ i,\ y_i = x_i - i + 1$. On a alors $1 \leq y_1 < y_2 < ... < y_6 \leq 44$, et réciproquement, une telle suite (y_i) permet de définir une suite (x_i) répondant à la question en prenant $x_i = y_i + i - 1$. Le nombre de telles suites y_i est $\binom{44}{6} = 7\ 059\ 052$.

Par conséquent, le nombre de tirages au loto avec au moins deux numéros consécutifs est :

$$\binom{49}{6} - \binom{43}{6} = 6\ 924\ 764$$

soit à peu près la moitié des tirages.

Sol.6) a) Notons V un déplacement vertical d'une unité vers le haut et H un déplacement horizontal d'une unité vers la droite. Un chemin est une suite de $n + p$ lettres, dont n sont des H et p des V. Il y a $\binom{n+p}{p}$ tels déplacements, puisqu'il faut choisir où placer p lettres H parmi $n + p$.

b) Le nombre de chemins de (0, 0) à A_k est $\binom{p}{k}$. On prend la formule précédente avec k et $p - k$ en lieu et place de n et p. Le nombre de chemins de A_k à (n, p) est $\binom{n}{k}$. On prend la formule précédente avec $n - k$ et $p - (p - k) = k$ en lieu et place de n et p. Donc le nombre total de chemins passant par A_k est $\binom{n}{k}\binom{p}{k}$.

c) Pour joindre (0, 0) à (n, p), on passe par un A_k et un seul. En effet, à chaque pas, on passe d'un point de coordonnées (x, y) à $(x + 1, y)$ ou $(x, y + 1)$ de sorte que $x + y$ s'incrémente de 1. $x + y$ varie de 0 à $n + p$ et prend une seule fois la valeur p, pour une abscisse x ayant une valeur k entre 0 et p. Donc, d'après a) et b), $\binom{n+p}{p} = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k}\binom{p}{k}$. Pour $n = p$, on obtient $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

d) On a $(1 + X)^n(1 + X)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k$. Le coefficient de X^p dans le développement du produit est $\sum_{k} \binom{n}{k}\binom{p}{p-k} = \sum_{k} \binom{n}{k}\binom{p}{k}$. Mais on a aussi $(1 + X)^n(1 + X)^p = (1 + X)^{n+p}$ et le coefficient de X^p est $\binom{n+p}{p}$.

Sol.7) a) On regroupe les X de même cardinal k, en faisant varier k de 0 à n. Pour chaque k, il y a $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k donc :

$$\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

On peut aussi dire, en remarquant qu'on peut sommer sur toutes les parties X aussi bien que tous leurs complémentaires, que $\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X) = \sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X^c)$. Donc :

$$\sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(X) = \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} (\mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(X^c)) = \frac{1}{2} \sum_{X \subset E} \mathrm{Card}(E) = \frac{1}{2} 2^n\, n = n2^{n-1}$$

b) Pour chaque k variant de 0 à n, on choisit une partie de cardinal k formant $X \cap Y$ (il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles), puis, pour chaque élément en dehors de cette intersection (il y a $n - k$ tels éléments) on choisit si cet élément appartient à X seul, à Y seul ou à aucun d'entre eux (3 choix possibles pour chaque élément). Donc :

$$\sum_{X \subset E,\, Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} 3^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^{n-1-k} = n4^{n-1}$$

On peut aussi dire, par un raisonnement analogue à celui du a) concernant les complémentaire, que :

$${}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(X \cap Y) = {}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(X^c \cap Y) = {}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(X \cap Y^c) = {}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(X^c \cap Y^c)$$

Donc ${}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(X \cap Y)$ est égale à la quantité :

$$\frac{1}{4}\,{}_{X \subset E,\, Y \subset E}(\mathrm{Card}(X \cap Y) + \mathrm{Card}(X^c \cap Y) + \mathrm{Card}(X \cap Y^c) + \mathrm{Card}(X^c \cap Y^c))$$

$$= \frac{1}{4}\,{}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(E) = \frac{1}{4}\ 2^n \times 2^n \times n = n4^{n-1}$$

c) ${}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(X \cup Y) = \sum_{X \subset E,\, Y \subset E} (\mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y) - \mathrm{Card}(X \cap Y))$

$$= n2^{n-1} \times 2^n + n2^{n-1} \times 2^n - n4^{n-1}$$
$$= n2^{2n} - n4^{n-1} = 3n4^{n-1}$$

ou bien, en utisant le fait que $X \cup Y$ est la réunion disjointe de $X \cap Y$, $X^c \cap Y$ et $X \cap Y^c$:

$${}_{X \subset E,\, Y \subset E}\mathrm{Card}(X \cup Y) = {}_{X \subset E,\, Y \subset E}(\mathrm{Card}(X \cap Y) + \mathrm{Card}(X^c \cap Y) + \mathrm{Card}(X \cap Y^c))$$

$$= \sum_{X \subset E,\, Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y) + \sum_{X \subset E,\, Y \subset E} \mathrm{Card}(X^c \cap Y) + \sum_{X \subset E,\, Y \subset E} \mathrm{Card}(X \cap Y^c)$$

$$= 3n4^{n-1}$$

Sol.8) a) On définit deux parties $X \subset Y$ en décidant, pour chaque élément de E, si cet élément n'appartient ni à X ni à Y, ou bien appartient à Y seul, ou bien appartient à X et à Y. Il y a trois choix pour chaque élément, donc 3^n façons de définir $X \subset Y$.
b) Le nombre de chaînes emboîtées est $(r + 1)^n$, obtenu en généralisant le raisonnement du a). Posons $E = X_{r+1}$. Une chaîne d'inclusion $X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_r$ étant donnée, à chaque élément de E, on peut associer le plus petit indice p pour lequel cet élément appartient à X_p. On définit ainsi une application de E dans $[\![1, r + 1]\!]$ et inversement une telle application définit une chaîne unique. $(r + 1)^n$ est le nombre de telles applications.
On peut aussi le montrer par récurrence sur r. Pour $r = 1$, on choisit simplement une partie de E et il y a 2^n parties. Pour $r = 2$, c'est la question a). Supposons la propriété vraie pour les chaînes de longueur $r - 1$. Le nombre de façons de définir une chaîne de longueur r est :

$\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} r^p = (r + 1)^n$ où $\binom{n}{p}$ est le choix de X_r de cardinal p, et r^p le nombre de chaînes incluses dans X_r.

Sol.9) a) $\mathrm{Card}(E) = 2^{p+q+1}$
En ce qui concerne A_k, dans les $p + k$ premiers termes, il y a k fois le 1 et p fois le 0. Puis il y a un 0 en $(p + k + 1)$-ème position, suivis de 0 ou 1 arbitraires au nombre de $q - k$. Donc :

$$\mathrm{Card}(A_k) = \binom{p+k}{k} \times 2^{q-k}.$$

b) A est la réunion disjointe des A_k, $0 \leq k \leq q$, donc $\mathrm{Card}(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{k} \times 2^{q-k}$. De même on aura

$$\mathrm{Card}(B) = \sum_{k=0}^{p} \binom{q+k}{k} \times 2^{p-k}.$$

c) Par ailleurs, $A \cup B = E$, réunion disjointe. Donc :

$$2^{p+q+1} = \sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{k} \times 2^{q-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{q+k}{k} \times 2^{p-k}$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{\binom{p+k}{k}}{2^{p+k}} + \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{q+k}{k}}{2^{q+k}} = 2$$

Sol.10) a) Il s'agit d'une combinaison avec répétition de r termes pris parmi n. Le nombre cherché est donc $\left|\binom{-n}{r}\right| = \dfrac{n(n+1)...\,(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$
b) Le nombre cherché est la somme, pour k variant de 0 à r, du nombre de façons d'obtenir $p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times ... \times p_n^{r_n}$, la somme des r_i valant k. D'après a) et en utilisant la somme des termes d'une colonne du triangle de Pascal, c'est :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+r}{n}$$

On aurait pu adjoindre aussi un n + 1-ème nombre premier p_{n+1} et définir $r_{n+1} = r - r_1 - ... - r_n$. Le nombre demandé dans le b) est identique au nombre de quantités $p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times ... \times p_{n+1}^{r_{n+1}}$ où les r_i ont pour somme r. On applique le a) avec n + 1 au lieu de n.

Sol.11) Par récurrence sur n, en considérant la première lettre des mots de B.
Si $n = 1$, Card(B) = 1 car deux mots d'une lettre ne peuvent différer que de cette seule lettre.
Si $n = 2$, Card(B) $\leq k$ car si on prend $k + 1$ mots, deux au moins de ces mots ont même première lettre et ces deux mots ne peuvent différer de deux lettres.
Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$. Considérons des mots de n lettres. Pour tout lettre a élément de A, notons $a\mathrm{A}^{n-1}$ l'ensemble des mots de n lettres commençant par a et soit $\mathrm{B}_a = \mathrm{B} \cap a\mathrm{A}^{n-1}$. Si, dans B_a, on fait abstraction de la première lettre commune a, l'hypothèse de récurrence permet de dire que $\mathrm{Card}(\mathrm{B}_a) \leq k^{n-2}$. Comme B est la réunion disjointe des k parties B_a, on a :

$$\mathrm{Card(B)} \leq k \times k^{n-2} = k^{n-1}$$

Sol.12) Les méthodes abondent[1]. On sera amené à utiliser plusieurs fois la formule du binôme de Newton suivant :

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = (1-1)^m = \begin{cases} 0 \text{ si } m \geq 1 \\ 1 \text{ si } m = 0 \end{cases}$$

<u>Méthode 1</u> :

La somme cherchée s'écrit $\displaystyle\sum_{(k,r) \text{ tq } 0 \leq k+r \leq n} \frac{1}{(k+r)!} (-1)^k \binom{k+r}{k}$. L'ensemble des couples (k, r) forme un triangle de points dans le plan. En posant $m = k + r$, cette somme peut s'écrire $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{m!} (-1)^k \binom{m}{k}$.

On somme ainsi suivant les diagonales du triangle. Mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \geq 1 \\ 1 \text{ si } m = 0 \end{cases}$ donc la somme cherchée vaut 1, obtenu pour la seule valeur $m = 0$.

<u>Méthode 2</u> :
On utilise le fait que :

$$\begin{aligned} \{(k, r) \mid 0 \leq k \leq n, 0 \leq r \leq n-k\} &= \{(k, r) \mid k \geq 0, r \geq 0, 0 \leq r + k \leq n\} \\ &= \{(k, r) \mid 0 \leq r \leq n, 0 \leq k \leq n - r\} \end{aligned}$$

ce qui permettra d'écrire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-k} = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r}$:

[1] Gérard Lavau, Joël Pipon, Claude Morin, *Différentes méthodes de calcul de la somme* $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!r!}$, Bulletin de l'Union des professeurs de classes préparatoires scientifiques, n° 279 (été 2022), 44-46.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^k}{k!r!} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^k}{k!(n-k-r)!}$$ par le changement d'indice $r \to n-k-r$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^k}{(n-r)!}\binom{n-r}{k}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{(n-r)!}\binom{n-r}{k}$$ en intervertissant les indices

$$= \sum_{r=0}^{n}\left(\frac{1}{(n-r)!}\sum_{k=0}^{n-r}(-1)^k\binom{n-r}{k}\right)$$ on voit apparaître le binôme de Newton

$$= \sum_{r=0}^{n}\frac{(1-1)^{n-r}}{(n-r)!}$$ avec $(1-1)^{n-r} = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } r < n \\ 1 \text{ si } r = n\end{array}\right.$

$= 1$ obtenu pour la seule valeur $r = n$

<u>Méthode 3</u> :
On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la somme vaut 1. Supposons que ce soit le cas au rang n. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sum_{r=0}^{n+1-k}\frac{(-1)^k}{k!r!} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n+1-k}\frac{(-1)^k}{k!r!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^k}{k!r!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n+1-k)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k!(n+1-k)!}$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence
et en regroupant les termes de droite

$$= 1 + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}$$ on reconnaît un binôme de Newton

$$= 1 + \frac{(1-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$= 1$

<u>Méthode 4</u> :
On utilise la formule de Taylor-Lagrange sur e^x et e^{-x}, entre 0 et 1, ce qui donne :

$$e = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$$

et $$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{(-1)^k}{k!r!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\,(e - \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-k}}{(n-k)!}\,e^t\,\mathrm{d}t)$$

$$= e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^n\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}\frac{(t-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\,e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(t-1)^{n-k}\,e^t\,\mathrm{d}t$$

on reconnaît un binôme de Newton sous l'intégrale

$$= e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^n\,e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} + e\,\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec le changement } t \to 1-t$$

$$= e(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t)$$

$$= e \times e^{-1} = 1$$

<u>Méthode 5</u> :

En utilisant une formule de Taylor sur le polynôme $\mathrm{P(X)} = \sum_{m=0}^{n}\frac{\mathrm{X}^m}{m!}$ en 1, on a :

$$\mathrm{P(X)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{P}^{(k)}(1)}{k!}(\mathrm{X}-1)^k \qquad \text{et en particulier } \mathrm{P}(0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{P}^{(k)}(1)$$

Donc, en remarquant que $\mathrm{P}^{(k)}(1) = \sum_{r=0}^{n-k}\frac{1}{r!}$:

$$1 = \mathrm{P}(0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{P}^{(k)}(1) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{r=0}^{n-k}\frac{1}{r!}$$

<u>Méthode 6</u> :

On calcule de deux façons l'espérance du nombre de points fixes d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$. On trouvera cette démonstration dans le chapitre L1/PROBA1.PDF.

<u>Méthode 7</u> :

On cherche le coefficient du terme x^n dans le développement limité à l'ordre de n de :

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z} \times e^{-z} \times e^z$$

Ce coefficient dans le développement limité du membre de gauche vaut 1. Dans le membre de droite, on effectue le produit des développements limités de chacun des trois facteurs :

$$\frac{1}{1-z} \times e^{-z} \times e^{z} = \left(\sum_{p=0}^{n} 1 \times z^p + o(n)\right) \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} z^k + o(n)\right) \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} z^r + o(n)\right)$$

Le coefficient du terme de degré n est :

$$\sum_{(p,k,r),\ p+k+r=n} 1^p \times \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{r!} = \sum_{(k,r),\ k+r\leq n} \frac{(-1)^k}{k!r!} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!r!}$$

On a donc bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!r!} = 1$.

Sol.13) On procède par récurrence :
Pour $n = 1$, c'est trivial.

Pour $n = 2$, c'est $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$. On est en fait en train de prouver une généralisation de cette formule.

On suppose la relation vraie pour tout m au rang $n - 1$. On a alors :

$\displaystyle\sum \frac{m!}{x_1!\ x_2!\ \dots\ x_n!} = \sum_{x_n=0}^{m} \binom{m}{x_n} \sum \frac{(m-x_n)!}{x_1!\ x_2!\ \dots\ x_{n-1}!}$, la somme intérieure étant effectuée sur tous les $(n-1)$-uplets de somme $m - x_n$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\sum_{x_n=0}^{m} \binom{m}{x_n} (n-1)^m = n^m$$

On peut aussi réfléchir au fait que :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^m = \sum \binom{m}{x_1} \binom{m-x_1}{x_2} \dots \binom{m-x_1-\dots-x_{n-1}}{x_n}$$
$$= \sum \frac{m!}{x_1!\ x_2!\ \dots\ x_n!}\ a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots a_n^{x_n}$$

puis prendre $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

◆