INTEGRATION

PLAN

I : Présentation

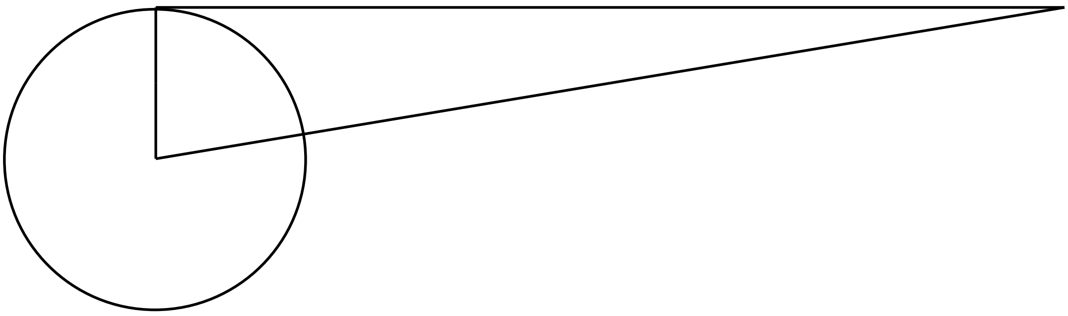
1- Bref historique

Le calcul d'aire remonte à la plus haute antiquité. Archimède sait comparer l'aire délimitée par une parabole avec celle d'un triangle. Il sait également que :

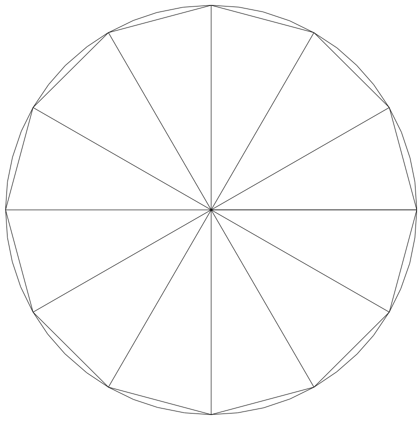
(i) Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre.

(ii) L'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon.

Or le coefficient de proportionnalité π est le même. Comment le démontrer ? Archimède compare l'aire d'un disque avec celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est le rayon du cercle, et dont l'autre a une longueur égale au périmètre du cercle. Il veut montrer que les deux aires sont égales. Il utilise pour cela une méthode dite par exhaustion.

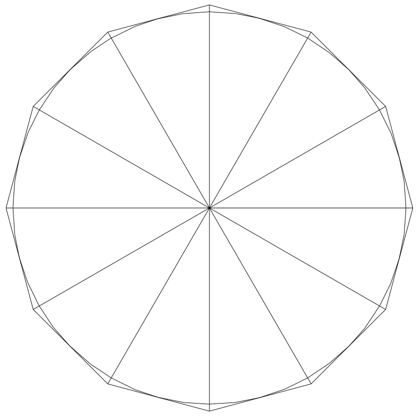


Appelons D l'aire du disque et T celle du triangle. Pour montrer l'égalité entre T et D, il fait un double raisonnement par l'absurde, en supposant d'abord que le triangle a une aire plus petite ($T < D$). Il construit alors un polygone d'aire P tel que $T < P < D$ en inscrivant dans le cercle un polygone régulier ayant suffisamment de côtés pour que son aire soit supérieure à l'aire du triangle. C'est possible car $T < D$.



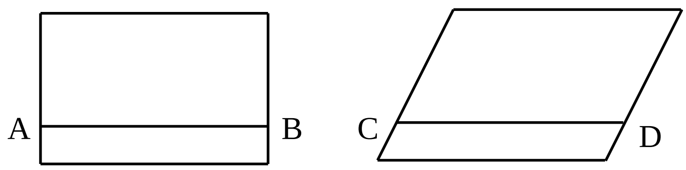
Or ce polygone est constitué de triangles dont la somme des longueurs de base est inférieure au périmètre du cercle et dont la hauteur est inférieure au rayon. L'aire P du polygone est donc inférieure à T. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $P > T$.

Il suppose ensuite que le triangle a une aire supérieure à celle du disque ($T > D$). Il circonscrit alors au cercle un polygone régulier de façon à ce que son aire soit inférieure à l'aire du triangle ($T > P > D$).

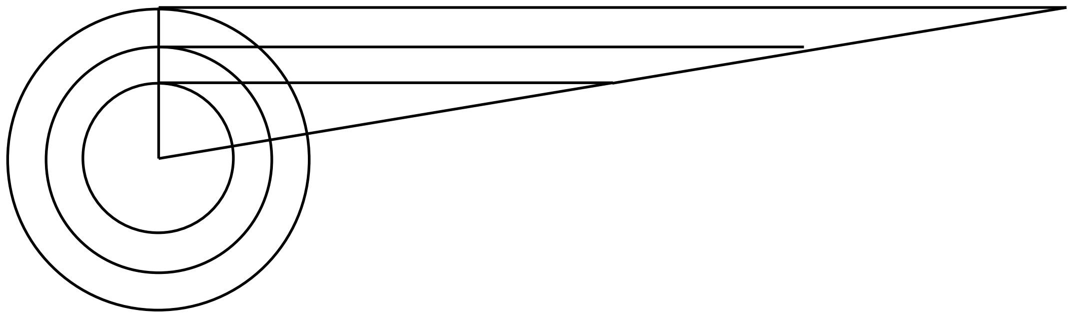


Or la somme des longueurs des bases des triangles constituant le polygone est supérieure au périmètre du cercle, et la hauteur est égale à celle du rayon. L'aire P du polygone est donc supérieure à l'aire T du triangle. Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse P < T.
La double contradiction conduit à la seule conclusion possible : D = T.

La méthode par exhaustion basée sur le double raisonnement par l'absurde sera utilisée pendant près de 2000 ans. En 1635, Cavalieri (1598-1647), afin d'accélérer les démonstrations de la méthode par exhaustion, développe la théorie des indivisibles. Pour prouver l'égalité de deux aires, il vérifie l'égalité des lignes constituant les deux surfaces. Donnons un exemple très simple qui permettra de comprendre le fonctionnement et l'intérêt de cette méthode. Considérons un rectangle et un parallélogramme de même base et même hauteur.



A chaque segment [AB] du rectangle correspond un segment [CD] du parallélogramme de même longueur. La méthode des indivisibles conclut alors que, les segments correspondants étant égaux, il en est de même des aires des deux figures.
La démonstration du résultat d'Archimède relatif à l'aire du disque par la méthode des indivisibles consiste par exemple à tracer un cercle de rayon R, ainsi que, pour tous les cercles de même centre de rayon *r*, inférieur à R, des segments parallèles entre eux, tangents à chaque cercle et de longueur la circonférence de chaque cercle. A chaque cercle du disque correspond un segment. De même que les cercles vont remplir le disque de rayon R, de même, les segments vont remplir le triangle annoncé.



La théorie des indivisibles énonce alors que l'aire T du triangle sera égale à l'aire D du disque.

Cette méthode, bien artisanale comparée aux méthodes modernes et assez empirique, est cependant extrêmement efficace. On peut s'en faire une idée en lisant *Le traité de la Roulette* de Pascal (1623-1662), dans lequel Pascal calcule les centres de gravité de courbes, de surfaces, de volumes, choses que nous ne pourrions plus faire actuellement sans calcul intégral. Pascal fait un pas de plus que Cavalieri en disant qu'une surface est la somme de ses lignes :

> *"Je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble n'être pas géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes ; ce qui vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée."*

Les méthodes précédentes présentent cependant le grave défaut de ne pouvoir donner une valeur à une aire, mais seulement de comparer deux aires entre elles. Ainsi, il faut connaître a priori la valeur d'une aire avant de prouver que cette aire possède effectivement la valeur désirée.

Les travaux de Pascal ont grandement influencé Leibniz (1646-1716), inventeur avec Newton (1642-1727) du calcul différentiel et intégral. Le calcul d'aire est directement lié au calcul intégral, et Leibniz et Newton résolvent cette question d'une façon magistrale qui va révolutionner le calcul mathématique : ils découvrent en effet que le calcul d'une aire est un problème inverse de celui de la recherche de la tangente à une courbe. Autrement dit, l'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Pour calculer l'intégrale d'une fonction f (et donc l'aire comprise entre sa courbe représentative et l'axe des abscisses), il suffit de chercher une primitive de f.

Le calcul intégral de Newton et Leibniz connaîtra un épanouissement considérable au XVIIIème, mais se heurte à des difficultés. Il est limité aux fonctions admettant des primitives, par exemple les fonctions continues. Se pose alors le problème théorique de prouver que toute fonction continue admet une primitive. En outre, à partir du début du XIXème, les travaux de Fourier (1768-1830) nécessitent un calcul intégral de plus en plus poussé, allant au delà des seules fonctions continues et de la simple recherche de primitive. Comment calculer ou définir l'intégrale d'une fonction qui n'est pas continue ?

Cauchy (1789-1857) résout ce dernier point en définissant l'intégrale d'une fonction f continue indépendamment de l'existence d'une primitive, puis en prouvant que l'intégrale ainsi obtenue est effectivement une primitive de f. Pour définir son intégrale, Cauchy divise $[a, b]$ en n intervalles et il considère la somme $\sum_{k=1}^{n} l_k\, f(t_k)$ où l_k est la longueur d'un petit intervalle et t_k une extrémité de l'intervalle. Puis il fait tendre n vers $+\infty$. Cette démarche a été critiquée par la suite car les démonstrations utilisées par Cauchy présentent quelques défauts. En outre, l'intégrale de Cauchy ne s'applique qu'aux fonctions continues.

Il revient à Riemann (1826-1866) d'introduire en 1854 la première notion générale d'intégrale, reconnue encore valide de nos jours, en améliorant la démarche de Cauchy. L'intégrale de Riemann est suffisamment puissante pour définir une intégrale pour toutes les fonctions suivantes :

- Les fonctions continues
- Les fonctions monotones
- La fonction $\sin(\frac{1}{x})$
- La fonction de K. J. Thomae (1875) : $x \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ irréductible, } q > 0 \end{cases}$

Elle n'est cependant pas complète car elle ne permet pas d'attribuer une valeur à l'intégrale de la fonction de Dirichlet (1829) :

$$x \rightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

C'est d'autant plus étonnant que cette fonction ne semble guère différente de la fonction de Thomae.

L'intégrale de Riemann pose également des problèmes délicats lorsqu'il s'agit de savoir si, étant donné une suite de fonctions (f_n) intégrables convergeant vers f (dans un sens à préciser), f est intégrable (ce qui peut être faux) et si l'intégrale des f_n converge vers l'intégrale de f.

Ces défauts ont conduit Lebesgue (1875-1941) à introduire en 1901 une nouvelle notion d'intégrale, plus générale que celle de Riemann, et telle que :

- Toute fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable, avec la même valeur d'intégrale.
- La fonction de Dirichlet est Lebesgue-intégrable
- Un exemple de fonction positive bornée non Lebesgue-intégrable n'existe qu'à condition d'utiliser un axiome (dit axiome du choix), et un tel exemple ne peut pas être défini explicitement.
- L'intégrale de Lebesgue est particulièrement adaptée au problème de convergence de suites de fonctions.

Malheureusement, l'intégrale de Lebesgue est jugée trop difficile à introduire en première année d'enseignement supérieur. Dans les années 1950 à 1960, Kurzweil et Henstock ont proposé un troisième type d'intégrale, la KH-intégrale, aussi puissante que l'intégrale de Lebesgue, mais dont l'introduction pourrait être plus facile. Cependant, elle reste plus difficile à introduire que celle de Riemann et il paraît plus raisonnable de commencer par présenter cette dernière, en se limitant dans un premier temps aux fonctions dites continues par morceaux. Quelques précisions sont données sur ces diverses intégrales dans l'annexe II.

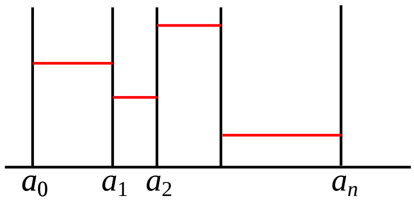
2- Fonctions en escalier

DEFINITION :

Une fonction f définie sur [*a*,*b*] *est* **en escalier** *s'il existe une subdivision finie*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

de [*a*, *b*] *telle que f soit constante sur chaque intervalle* $]x_i, x_{i+1}[$.



La valeur de f aux points a_i importe peu. Les fonctions en escalier forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, stable par produit. Pour le prouver, il suffit de remarquer que, si l'on dispose de deux fonctions en escalier f et g, on peut prendre une subdivision plus fine que celle de f et de g, et compatible à la fois avec f et g, en prenant la réunion des deux subdivisions de f et g. $f \pm g$, fg et les multiples de f sont alors constantes sur les sous-intervalles définis par cette subdivision.

Il est facile de définir l'intégrale de fonctions en escalier. Soit f en escalier sur [a, b], associée à une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Notons f_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f_i$$

On note aussi l'intégrale sous la forme $\int_{\mathrm{I}} f$, où I désigne l'intervalle [a, b]. On s'assurera que cette quantité ne dépend pas de la subdivision choisie, pourvue qu'elle soit compatible avec f. Pour cela, il suffit de voir qu'on peut ajouter un point à la subdivision sans changer la valeur de l'intégrale, puis qu'on peut ajouter plusieurs points. Enfin, pour comparer les valeurs données par deux subdivisions différentes, il suffit de passer par la subdivision obtenue en réunissant les deux subdivisions.

De même, il est trivial de vérifier les propriétés usuelles de l'intégrale, puisque celle-ci n'est ici qu'une somme finie, en prenant des subdivisions communes aux deux fonctions f et g :

- ❑ linéarité : $\int_{\mathrm{I}} (f+g) = \int_{\mathrm{I}} f + \int_{\mathrm{I}} g$ et $\int_{\mathrm{I}} \lambda f = \lambda \int_{\mathrm{I}} f$

- ❑ $f \geq 0 \Rightarrow \int_{\mathrm{I}} f \geq 0$ et $f \leq g \Rightarrow \int_{\mathrm{I}} f \leq \int_{\mathrm{I}} g$

- ❑ **relation de Chasles** : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $a \leq c \leq b$.

Le but est maintenant d'approximer les fonctions continues par des fonctions en escalier.

3- Approximation des fonctions continues

La définition de la continuité sur [a, b] est :

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y, |y - x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dans cette définition, α dépend de x et de ε. Nous avons besoin d'une condition plus forte où α ne dépend pas de x.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, \forall y, |y - x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Une fonction f vérifiant cette propriété est dite **uniformément continue**.

EXEMPLES :

❑ $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$. En effet :

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - y|\ |x + y| < \varepsilon$$

or si cette inégalité était vérifiée pour tout x et y tels que $|x - y| < \alpha$ pour un certain α, elle serait vraie pour tout x et y tels que $|x - y| = \dfrac{\alpha}{2}$ et l'on aurait alors $|x + y| < \dfrac{2\varepsilon}{\alpha}$ borné. Or $|x + y|$ n'est pas borné.

❑ $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. En effet :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{2}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\alpha = 2\varepsilon$

❑ Plus généralement, si f est k-lipschitzienne (par exemple dérivable, de dérivée bornée par k en utilisant l'inégalité des accroissements finis), alors f est uniformément continue. Il suffit de prendre $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$. On a ainsi les implications suivantes :

f dérivable à dérivée bornée
$\Rightarrow$ f lipschitzienne
$\Rightarrow$ f uniformément continue
$\Rightarrow$ f continue

L''exemple x^2 prouve qu'une fonction continue sur $\mathbf{R}$ n'est pas uniformément continue. On a cependant le résultat suivant.

THEOREME : (Heine 1821-1881)
Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est uniformément continue.

Démonstration :

❑ Si f n'est pas uniformément continue, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x, \exists y, |x - y| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Prenons $\alpha = \dfrac{1}{n}$ et appelons x_n et y_n les éléments x et y correspondants. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite l élément de $[a, b]$. La sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ converge nécessairement vers la même limite l, puisque $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}|$ tend vers 0. On en déduit que $(f(x_{\varphi(n)}))$ et $(f(y_{\varphi(n)}))$ convergent vers $f(l)$ par continuité de f, et donc que

$\left|f(x_{\varphi(n)})-f(y_{\varphi(n)})\right|$ tend vers 0, ce qui est contradictoire avec le fait que cette quantité reste supérieure à ε.

Voici maintenant le théorème d'approximation d'une fonction continue par les fonctions en escalier
PROPOSITION :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. *Alors, pour tout* ε *positif, il existe deux fonctions en escalier* Φ *et* Ψ *telles que :*

$$\forall x \in [a, b],\ \Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \quad et \quad \Psi - \Phi \leq \varepsilon$$

Démonstration :
❑ f est continue sur un segment, donc, d'après le théorème de Heine, uniformément continue. Il existe α tel que :

$$\forall x, \forall y, |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Choisissons n entier tel que $\dfrac{b-a}{n} < \alpha$. On peut alors diviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de la forme $I_k = \left]a + \dfrac{k(b-a)}{n}, a + \dfrac{(k+1)(b-a)}{n}\right[$ de longueur inférieure à α, et sur chacun de ces intervalles I_k, on a :

$$\forall x \in I_k, \forall y \in I_k, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Définissons Φ et Ψ sur chaque intervalle I_k par :

$$\forall x \in I_k,\ \Phi(x) = \text{Inf } \{f(x) \mid x \in I_k\} \text{ et } \Psi(x) = \text{Sup } \{f(x) \mid x \in I_k\}$$

Aux points $a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, on peut prendre Φ et Ψ égale à f.

Une fonction est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < ... < x_n = b$ telle que, pour tout i :

f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
f admet une limite à droite strictement des x_i, $0 \leq i \leq n-1$
f admet une limite à gauche strictement des x_i, $1 \leq i \leq n$

Pour tout i, f peut être prolongée par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$. Le théorème d'approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier s'applique a fortiori pour les fonctions continues par morceaux. Il suffit en effet d'appliquer le théorème sur chaque intervalle où f est continue.

4- Définition de l'intégrale

Voici comment on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Considérons les encadrements $\Phi \leq f \leq \Psi$, avec Φ et Ψ en escalier. Cet encadrement prouve que les intégrales des fonctions Φ sont majorées par l'intégrale de n'importe quelle Ψ, et que les intégrales des fonctions Ψ sont minorées par l'intégrale de n'importe quelle Φ. On peut donc définir :

$$S = \text{Sup}\left\{\int_a^b \Phi(t)\, dt \mid \Phi \text{ en escalier et } \Phi \leq f\right\}$$

$$I = \text{Inf}\left\{\int_a^b \Psi(t)\, dt \mid \Psi \text{ en escalier et } f \leq \Psi\right\}$$

On a S ≤ I puisque $\Phi \leq f \leq \Psi \Rightarrow \int_a^b \Phi(t)\,dt \leq \int_a^b \Psi(t)\,dt$. Mais, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe Φ et Ψ en escalier telles que $\Phi \leq f \leq \Psi$ et $\Psi - \Phi \leq \varepsilon$, de sorte que :

$$0 \leq I - S \leq \int_a^b \Psi(t)\,dt - \int_a^b \Phi(t)\,dt \leq \varepsilon(b-a)$$

Cette relation étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a nécessairement I = S. Cette valeur commune est par définition l'intégrale de f sur $[a, b]$. En particulier, si Φ et Ψ sont en escalier et vérifient $\Phi \leq f \leq \Psi$, on a $\int_a^b \Phi(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b \Psi(t)\,dt$. $\int_a^b f(t)\,dt$ s'interprète alors comme l'aire de la courbe comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de f.

II : Propriétés de l'intégrale

1- Linéarité

PROPOSITION :

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ *forme un espace vectoriel. L'intégrale est une forme linéaire.*

Démonstration :

❑ i) Soit f continue par morceaux. Alors $-f$ est continue par morceaux.

Si l'on a $\Phi \leq f \leq \Psi$ alors $-\Psi \leq -f \leq -\Phi$. On a donc :

$$\int_a^b -\Psi(t)\,dt \leq \int_a^b -f(t)\,dt \leq \int_a^b -\Phi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad -\int_a^b \Psi(t)\,dt \leq \int_a^b -f(t)\,dt \leq -\int_a^b \Phi(t)\,dt$$

Prenons la borne sup du membre de gauche et la borne inf du membre de droite sur l'ensemble des fonctions en escalier Φ et Ψ. On obtient :

$$\text{Sup} -\int_a^b \Psi(t)\,dt \leq \int_a^b -f(t)\,dt \leq \text{Inf} -\int_a^b \Phi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad -\text{Inf}\int_a^b \Psi(t)\,dt \leq \int_a^b -f(t)\,dt \leq -\text{Sup}\int_a^b \Phi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad -\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b -f(t)\,dt \leq -\int_a^b f(t)\,dt \text{ d'où l'égalité}$$

❑ ii) Considérons le produit de f par un réel λ. Compte tenu du i), on peut supposer $\lambda > 0$. On a : $\Phi \leq f \leq \Psi \Leftrightarrow \lambda\Phi \leq \lambda f \leq \lambda\Psi$, de sorte que :

$$\int_a^b \lambda\Phi(t)\,dt \leq \int_a^b \lambda f(t)\,dt \leq \int_a^b \lambda\Psi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \lambda\int_a^b \Phi(t)\,dt \leq \int_a^b \lambda f(t)\,dt \leq \lambda\int_a^b \psi(t)\,dt$$

Prenons la borne sup du membre de gauche et la borne inf du membre de droite sur l'ensemble des fonctions en escalier Φ et Ψ. On obtient :

$$\lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t \leq \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ d'où l'égalité}$$

❑ iii) Considérons la somme de deux fonctions f et g. Si on a :

$\Phi \leq f \leq \Psi$

$\Phi' \leq g \leq \Psi'$

Alors $\Phi + \Phi' \leq f + g \leq \Psi + \Psi'$, de sorte que :

$$\int_a^b (\Phi + \Phi')(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b (\Psi + \Psi')(t)\,\mathrm{d}t$$

On sépare les intégrales des fonctions en escalier en somme de deux intégrales et on prend la borne supérieure du membre de gauche et la borne inférieure du membre de droite. On obtient :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où l'égalité.

2- Majorations et encadrements

PROPOSITION :

Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b]$. *Alors :*

i) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

ii) $f \geq g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

iii) $|f|$ *est continue par morceaux et* $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

iv) $\left|\int_a^b (fg)(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \mathrm{Sup}\,|f| \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$ (**inégalité de la moyenne**)

v) $f \geq 0$, *f continue et* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$

<u>Démonstration</u> :

❑ i) Evident car 0 est une fonction en escalier minorant *f*.
L'intégrale est dite positive.

❑ ii) Appliquer i) sur $f - g$

❑ iii) On a $-|f| \leq f \leq |f|$
et on applique ii)

❑ iv) Il suffit de majorer $|fg|$ par $(\mathrm{Sup}\,|f|) \times |g|$. En particulier, en prenant $g = 1$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq (b-a)\ \mathrm{Sup}\,|f|$$

❑ v) Si $f \neq 0$, il existe x_0 tel que $f(x_0) > 0$, et par continuité, il existe un intervalle I de longueur l contenant x_0 tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. On peut alors minorer f par la fonction en escalier φ valant $\frac{f(x_0)}{2}$ sur I et 0 ailleurs. L'intégrale de f est minorée par l'intégrale de φ qui vaut $\frac{lf(x_0)}{2} > 0$ contrairement à l'hypothèse. On notera que l'énoncé devient faux si on supprime l'hypothèse de la continuité de f. Il suffit en effet de prendre f en escalier non nulle en un nombre fini de points et nulle ailleurs pour avoir un contre-exemple.

3- Relation de Chasles

PROPOSITION :

Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$, et soit c élément de $]a,b[$. Alors f est continue par morceaux sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration :

❑ Il suffit de remarquer que l'intégrale de f est la valeur commune de la borne supérieure des intégrales de Φ en escalier inférieures à f, et de la borne inférieure des intégrales de Ψ en escalier supérieures à f. On applique la relation de Chasles sur chacune de ces intégrales. On obtient donc :

$$\int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c \Phi(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc, en prenant la borne supérieure, on obtient :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On obtient l'autre inégalité en raisonnant sur les fonctions Ψ.

Pour $b < a$, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

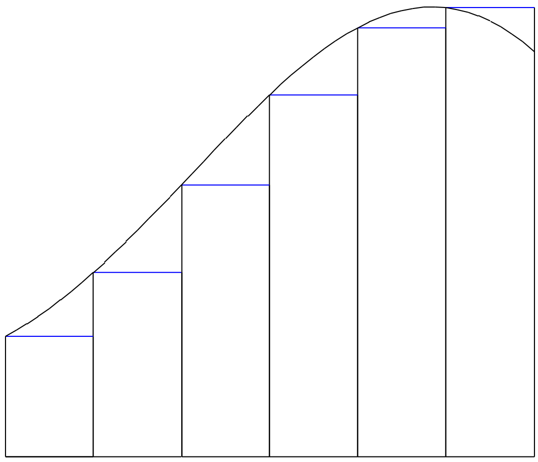
Ce qui permet de rendre valide la relation de Chasles pour toutes les dispositions relatives des trois nombres a, b et c.

4- Sommes de Riemann

On appelle **somme de Riemann** une somme de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$ où (x_i) forme une subdivision de $[a, b]$, et où c_i est élément de $[x_i, x_{i+1}]$. Nous nous limiterons au cas où l'intervalle $[a, b]$ a été divisé en n parties égales, et où c_i est la borne initiale de chaque intervalle. On obtient alors la somme :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

R_n s'interprète comme l'aire des rectangles de longueur de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(a + k\,\frac{b-a}{n})$.



PROPOSITION :
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, R_n *la somme de Riemann correspondant à une subdivision de* $[a,b]$ *en n intervalles de même longueur. Alors la suite* (R_n) *converge vers l'intégrale de f lorsque n tend vers* $+\infty$.

En adaptant la démonstration ci-dessous, on montre que le résultat reste vrai pour c_i quelconque dans $[x_i, x_{i+1}]$.

Démonstration 1:
❑ Pour simplifier un peu la démonstration, nous la donnerons dans le cas où f est continue. f étant continue sur $[a, b]$ est uniformément continue. Donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x, \forall\, y, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Choisissons N tel que $\frac{b-a}{N}$ soit inférieur à α. Pour tout n supérieur à N, on a, en utilisant la relation de Chasles et en notant $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$:

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - R_n \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\,dt \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\,dt \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,dt$$

Or $|t - x_k| \leq |x_{k+1} - x_k| = \dfrac{b-a}{n} \leq \dfrac{b-a}{\text{N}} \leq \alpha$. On a donc $|f(t) - f(x_k)| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \qquad \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{R}_n \right| \leq \varepsilon(b-a)$$

On a montré que :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \text{N}, \forall\ n \geq \text{N}, \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{R}_n \right| \leq \varepsilon(b-a)$$

ce qui correspond à la définition de la convergence de (R_n) vers l'intégrale de f.

<u>Démonstration 2</u> : limitée au cas d'une fonction C^1.

❑ La fonction f ayant sa dérivée continue sur le segment $[a, b]$, cette dérivée est bornée de sorte que, au moyen de l'inégalité des accroissements finis, on peut supposer que la fonction f est lipschitzienne de rapport $\text{M} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f\,'(x)|$. On a alors, en notant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$:

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{R}_n \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\,\mathrm{d}t \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\,\mathrm{d}t \right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \text{M}(t - x_k)\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \text{M}(t - x_k)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \text{M}\,\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{\text{M}(b-a)^2}{2n}$

$\Rightarrow \qquad \displaystyle\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{R}_n \right| \leq \frac{\text{M}(b-a)^2}{2n}$ qui tend évidemment vers 0 quand n tend vers l'infini.

EXEMPLES :

❑ Ce théorème permet de calculer certaines limites de suites. $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + .. + \dfrac{1}{2n-1}$ est la somme de Riemann $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ correspondant à la fonction $\dfrac{1}{x}$, x variant entre 1 et 2. Sa limite est donc égale à $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$.

❑ En physique, le compteur électrique numérique (tel que le compteur Linky) utilise des sommes de Riemann pour calculer l'énergie consommée. Δt étant un intervalle de temps suffisamment petit (une fraction de seconde), il mesure à chaque instant $k\Delta t$, k entier, la tension $\mathrm{U}(k\Delta t)$ et l'intensité du courant $\mathrm{I}(k\Delta t)$, et multiplie les deux valeurs numériques pour obtenir la puissance $\mathrm{P}(k\Delta t) = \mathrm{U}(k\Delta t)\mathrm{I}(k\Delta t)$. L'énergie consommée pendant l'intervalle de temps $[k\Delta t, (k + 1)\Delta t[$ est estimée à $\mathrm{P}(k\Delta t)\Delta t$. L'énergie consommée sur un intervalle $[0, n\Delta t]$ est alors la somme des petites énergies consommée sur chaque petit intervalle de temps :

$$\mathrm{E} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(k\Delta t)\Delta t$$

On reconnaît une somme de Riemann en prenant $a = 0$, $b = n\Delta t$, $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$, ce qui donne bien :

$$\mathrm{E} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(k\frac{b-a}{n})$$

L'énergie exacte consommée est $\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$. Cette énergie sous forme intégrale était donnée par les anciens compteurs analogiques précédant les compteurs numériques, dans lequel un disque tournait en continu à une vitesse proportionnelle à la puissance $\mathrm{P}(t)$. Un afficheur relié à ce disque comptait le nombre de tours effectués.

5- Valeur moyenne d'une fonction

La **valeur moyenne** d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est égale à la quantité $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On remarquera qu'elle est la limite de la somme de Riemann $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$ qui est un bon candidat pour estimer une valeur moyenne de f, d'autant meilleur que n est grand, d'où l'intérêt de prendre la limite lorsque n tend vers l'infini.

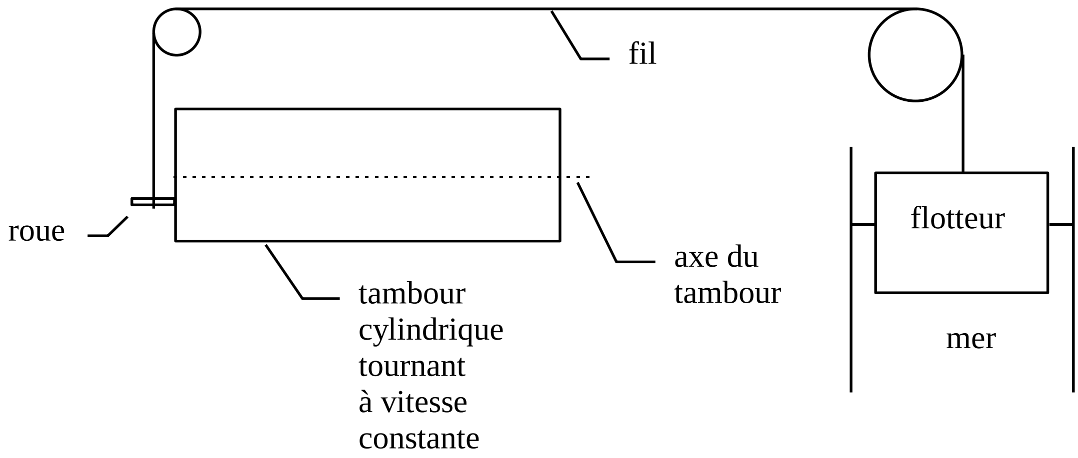
On peut citer les exemples suivants :

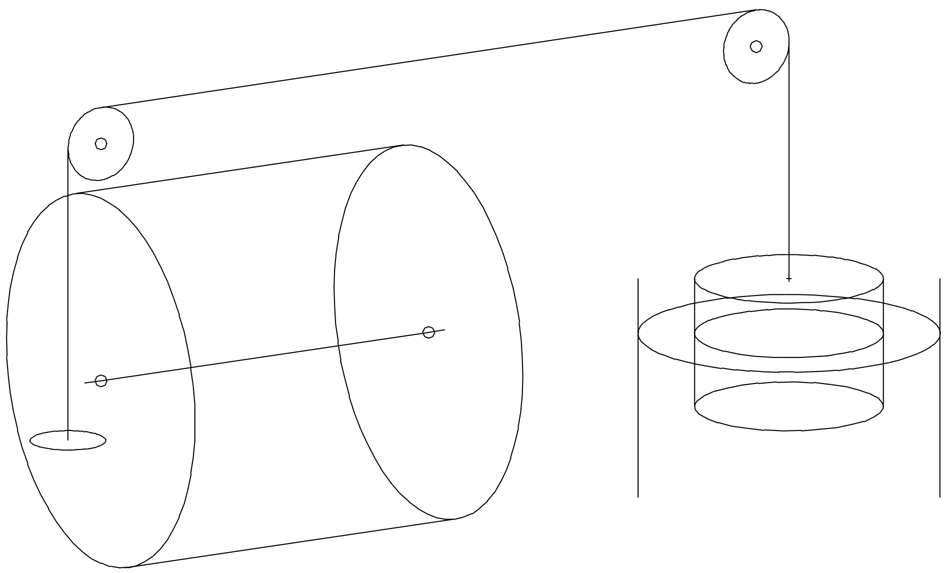
EXEMPLE 1 :

❑ Considérons les températures prises au cours d'une partie de la journée. On découpe cette partie en n intervalles égaux. La température moyenne est $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}(h_k)$, où h_k est le $k^{\text{ème}}$ instant de mesure. Plus n est grand et plus la fonction T est précise. A la limite, on peut modéliser T par une fonction continue. Sa valeur moyenne est $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{T}(t)\,\mathrm{d}t$ qui n'est autre que la limite de la somme de Riemann $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{T}(\frac{k}{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXEMPLE 2 :

❑ Le marégraphe de Marseille est chargé de mesurer la hauteur de la mer. La mer communique avec un puits pour amortir les vagues. Dans ce puits se trouve un flotteur. On mesure à quelle hauteur se trouve ce flotteur par rapport à un repère fixe. Un fil relié au flotteur possède un curseur qui permet de déterminer cette hauteur. Mais un mécanisme astucieux, en marche depuis un siècle, permet en outre de calculer la hauteur moyenne de la mer. En voici la description simplifiée :





Une petite roue, reliée par un fil tendu au flotteur, roule par frottement contre un cylindre tournant à vitesse constante. Soit x la distance de la roue à l'axe du cylindre. x correspond à la hauteur du flotteur. Plus le flotteur est haut, plus la roue est loin de l'axe du tambour et plus x est grand. Plus le flotteur est bas, plus la roue est proche de l'axe du tambour et plus x est petit. La hauteur du flotteur ainsi que x dépend du temps t. La hauteur moyenne sur un intervalle de temps $[a, b]$ est calculé par $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$. Or la vitesse de rotation de la roue est proportionnelle à x. Plus x est grand, plus la roue tourne vite. Si le tambour tourne à la vitesse constante Ω et si le rayon de la roue est R, sa vitesse de rotation ω est $\omega = \dfrac{\Omega x}{\mathrm{R}}$. Le nombre de tours dont tourne la petite roue est une primitive de ω et est donc proportionnelle à une primitive de x. Ce nombre de tours divisé par le temps de mesure indique donc à une constante multiplicative près, la valeur moyenne de x et donc la hauteur moyenne de la mer.

Depuis quelques décennies, ce système est couplé avec un système électronique mesurant, à intervalle régulier, la hauteur de la mer. Ce système additionne les données recueillies pour en calculer la moyenne, et calcule donc une somme de Riemann. Il permet donc également de calculer une valeur moyenne de la hauteur d'eau. Comme pour les compteurs de consommation électrique, c'est le système mécanique analogique, plus ancien, qui calcule une intégrale, et le système électronique, plus récent, qui calcule une somme de Riemann.

Lors d'une visite du marégraphe à la fin des années 1990, le guide indiqua qu'on avait observé en un siècle une variation d'une vingtaine de cm de la hauteur de la mer, sans qu'on sache si c'était le niveau de la mer qui montait ou le socle rocheux du marégraphe qui s'enfonçait. La comparaison avec d'autres marégraphes, situés en Bretagne ou dans d'autres pays, plaidait pour une élévation du niveau de la mer, sans qu'on en connaisse à l'époque la raison. C'est la mise en évidence du réchauffement climatique au début des années 2000 par de multiples observations et mesures qui permit de donner une explication cohérente de cette élévation du niveau de la mer, due principalement à la dilatation thermique de l'eau sous l'effet de la chaleur, et secondairement à la fonte des glaciers continentaux. Cette élévation du niveau de la mer est depuis quelques années mesurée par satellite.

EXEMPLE 3 :

❑ La puissance dissipée par effet Joule en courant alternatif est RI^2, avec $I = \mathbf{I_0}\sin(\omega t)$. La puissance moyenne peut se mesurer sur une période $\dfrac{2\pi}{\omega}$ et vaut :

$$\int_0^{2\pi/\omega} R\mathbf{I_0}^2\sin^2(\omega t)\,dt \times \frac{\omega}{2\pi}$$

Le calcul donne $\dfrac{1}{2}\,R\mathbf{I_0}^2$.

Dans un dipôle soumis à une tension $U = \mathbf{U_0}\sin(\omega t + \varphi)$, la puissance moyenne vaut :

$$\int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{I_0}U_0\sin(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)\,dt \times \frac{\omega}{2\pi}$$

qui donne $\dfrac{1}{2}\,\mathbf{I_0}\mathbf{U_0}\cos(\varphi)$.

III : Intégrale fonction de la borne supérieure

1- Définition

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. f est donc continue par morceaux sur $[a, x]$, pour tout x élément de $[a, b]$. On pose :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Cette fonction s'appelle **intégrale fonction de la borne supérieure**.

2- Continuité

PROPOSITION :

L'intégrale fonction de la borne supérieure est une fonction continue.

Démonstration :

❑ Nous allons utiliser la relation de Chasles.

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)\, dt \right| \le \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt \text{ si } h > 0 \text{ ou } \int_{x+h}^{x} |f(t)|\, dt \text{ si } h < 0$$

$\Rightarrow \quad |F(x+h) - F(x)| \le M\,|h|$ où M est un majorant de $|f|$.

F est lipschitzienne de rapport M, donc est continue.

3- Dérivation

PROPOSITION :

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, F *l'intégrale fonction de la borne supérieure correspondante. Si f est continue en un point x, alors* F *est dérivable en x, de dérivée* $f(x)$.

Démonstration :

❑ Soit x un point de continuité de f.

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x)\, dt \right|$$

$$\le \sup_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout y élément de $]x - \alpha, x + \alpha[$, on ait $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Pour h appartenant à cet intervalle, on en déduit que $\sup_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)|$ est lui même inférieur ou égal à ε. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α positif tel que, pour tout h appartenant à $]x - \alpha, x + \alpha[$, la différence entre le taux d'accroissement de F, entre x et $x + h$, et la valeur $f(x)$ est inférieure à ε. Cela est la définition même de la convergence du taux d'accroissement de F vers $f(x)$. Ce taux admettant une limite, F est dérivable, de dérivée $f(x)$.

Si f n'est pas continue en x_0, rien ne permet de dire que F y est dérivable.

EXEMPLE :

❑ Sur $[0, 2]$, soit $f(x) = 1$ sur $]0,1]$ et $f(x) = 0$ sur $]1,2]$. On a alors $F(x) = x$ sur $[0, 1]$ et $F(x) = 1$ sur $[1, 2]$. F est bien continue, mais n'est pas dérivable en $x = 1$.

COROLLAIRE :

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

En effet, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est dérivable en tout x de dérivée $f(x)$, donc est la primitive de f qui s'annule en a.

Si G est une autre primitive, alors G' – F' = 0, donc G – F est constante, et G = F + Cte. Cette constante vaut G(a). Donc F = G – G(a), et en particulier F(b) = G(b) – G(a). Ainsi :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) \text{ pour une primitive G quelconque}$$

On note parfois G(t) = $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ sans préciser les bornes, étant convenu que cette notation ne désigne pas une primitive particulière mais une primitive quelconque définie à une constante près. L'oubli de cette constante peut conduire à des déboires, comme on le montre dans les exemples du paragraphe suivant.

4- Intégration par parties

On appelle **fonction de classe C¹** une fonction continue dérivable dont la dérivée est elle-même continue.

PROPOSITION :
Soient u et v deux fonctions de classe C^1 *sur* [a, b]. *Alors :*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration :
❑ On considère les deux fonctions suivantes :

$$F : x \to \int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

et $$G : x \to u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

On a : F(a) = G(a) = 0 et F'(x) = G'(x) = $u'(x)v(x)$ donc F = G, donc F(b) = G(b).

EXEMPLES :
❑ On calcule une primitive de ln(x) en intégrant par parties $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$, avec $u' = 1$ et $v = \ln(x)$. Les bornes sont généralement sous-entendues dans le calcul de primitives :

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv' = x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln(x) - x \text{ (+ Cte)}$$

❑ Cet exemple illustre les erreurs qu'on peut commettre en omettant les constantes dans le calcul de primitives. On calcule une primitive de $e^x\mathrm{ch}(x)$ en intégrant par parties deux fois de suite.

$$\int e^x\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = e^x\mathrm{ch}x - \int e^x\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{en prenant } u' = e^x \text{ et } v = \mathrm{ch}(x)$$

$$= e^x\,\mathrm{ch}(x) - e^x\,\mathrm{sh}(x) + \int e^x\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{en prenant } u' = e^x \text{ et } v = \mathrm{sh}(x)$$

Après simplification de $\int e^x\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x$ dans les deux membres, on obtient :

$0 = e^x \operatorname{ch}(x) - e^x \operatorname{sh}(x)$

Donc $0 = 1$.

En fait les deux expressions $\int e^x\operatorname{ch}(x)\,dx$ désignent une primitive de $e^x\operatorname{ch}(x)$ à une constante près. Elles diffèrent donc entre elles a priori d'une constante, et la conclusion exacte est, après la simplification dans les deux membres :

$0 = e^x \operatorname{ch}(x) - e^x \operatorname{sh}(x) + \text{Cte}$

5- Changement de variable

PROPOSITION :

Soit Φ *de classe* C^1 *de* $[\alpha, \beta]$ *dans* $[a, b]$ *et* f *continue sur* $[a, b]$. *Alors :*

$$\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(u)\,du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,dt$$

On effectue ainsi le changement de variable $u = \Phi(t)$. On note ici l'intérêt de la notation du qui permet de ne pas oublier le $\Phi'(t)\,dt$. Les bornes sont naturelles : si $t = \alpha$, $u = \Phi(\alpha)$ et si $t = \beta$, $u = \Phi(\beta)$.

<u>Démonstration</u> :

❑ On considère les deux fonctions suivantes, définies sur $[\alpha, ß]$:

$$F : x \to \int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(x)} f(u)\,du$$

$$G : x \to \int_{\alpha}^{x} f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,dt$$

On a $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$ et $F'(x) = G'(x) = f(\Phi(x))\Phi'(x)$ (la dérivée de F étant calculée par dérivation de la fonction composée $x \to y = \Phi(x) \to \int_{\Phi(\alpha)}^{y} f(u)\,du$). Donc $F = G$, donc $F(\beta) = G(\beta)$.

Si Φ est bijective de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\Phi^{-1}(a)}^{\Phi^{-1}(\beta)} f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,dt$$

EXEMPLES :

❑ On a $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt$ en posant $u = \sin(t)$

Il suffit alors de linéariser $\cos^2(t)$ pour trouver $\frac{\pi}{4}$ comme valeur de l'intégrale.

❑ On a $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^b \mathrm{ch}^2(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \mathrm{sh}(t)$, où b est tel que $1 = \mathrm{sh}(b)$. La résolution de l'équation $1 = \mathrm{sh}(b) = \dfrac{e^b + e^{-b}}{2}$ conduit à $b = \ln(1+\sqrt{2}) = \mathrm{argsh}(1)$, où argsh est la réciproque de la fonction sh (voir L1/FONCTUSU.PDF). Par ailleurs :

$$\mathrm{ch}^2(t) = \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{1 + \mathrm{ch}(2t)}{2}$$

Donc l'intégrale vaut :

$$\frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\mathrm{sh}(2t)\right]_0^b = \frac{b}{2} + \frac{\mathrm{sh}(2b)}{4}$$

Or $\dfrac{\mathrm{sh}(2b)}{4} = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} = \dfrac{(e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t})}{8} = \dfrac{\mathrm{ch}(b)\mathrm{sh}(b)}{2} = \dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(b)}\,\mathrm{sh}(b)}{2}$ en utilisant la relation $\mathrm{ch}^2 = 1 + \mathrm{sh}^2$. Donc $\dfrac{\mathrm{sh}(2b)}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et finalement, l'intégrale vaut $\dfrac{\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}}{2}$.

Le changement de variable $u = \tan(\theta)$ est également possible, mais il se trouve que l'intégrale est plus difficile à intégrer. Elle sera revue dans le paragraphe IV.

6- Fonctions à valeurs complexes

Pour le calcul de primitive , il nous faut introduire les notions suivantes :

❑ Intégrale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes, $h = f + ig$, où f et g sont les parties réelles et imaginaires de h :

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi : $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(h)(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(h)(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$

❑ Dérivée d'une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes, $h = f + ig$, où f et g sont les parties réelles et imaginaires de h : $h' = f' + ig'$

On vérifie que les règles usuelles de dérivation et d'intégration s'étendent au cas complexe. Il suffit pour cela de séparer partie réelle et partie imaginaire. Seule l'inégalité

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

n'est pas évidente. Soit θ l'argument de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, de sorte que $\displaystyle e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ soit réel, égal à $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|$. Posons $\displaystyle\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\,\mathrm{F}(x))$ de sorte que :

$$\mathrm{G}(b) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\,\mathrm{F}(b)) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

G est une fonction à valeurs réelles. On a également :

$$\mathrm{G}(b) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\,\mathrm{F}(b)) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}f(t))\,\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow \qquad G(b) \leq \int_a^b \left|\mathrm{Re}(e^{-i\theta}f(t))\right| \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta}f(t)\right| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \left|f(t)\right| \, \mathrm{d}t$ d'où le résultat annoncé.

IV : Calcul de primitives

1- Tableau de primitives

On dispose des primitives suivantes. Pour le vérifier, il suffit de dériver les fonctions de la colonne de droite

f	$\int f(t)\,\mathrm{d}t$ à une constante près
x^r pour $r \neq 1$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\ln(\lvert x \rvert)$	$x\ln(\lvert x \rvert) - x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan(\dfrac{x}{a})$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
pour $a>0$, $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin(\dfrac{x}{a})$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+h}}$	$\ln(\lvert x + \sqrt{x^2+h} \rvert)$
$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\dfrac{1}{2}\ln(\left\lvert \dfrac{x-1}{x+1} \right\rvert)$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln(\left\lvert \dfrac{x-a}{x+a} \right\rvert)$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\dfrac{1}{\tan(x)}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$
$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln(\left\lvert \tan(\dfrac{x}{2}) \right\rvert) = \ln(\left\lvert \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \right\rvert)$
$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$\ln(\left\lvert \tan(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}) \right\rvert) = \ln(\left\lvert \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)} \right\rvert)$

Vérifions la dernière formule. La dérivée de $\ln(\left\lvert \tan(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}) \right\rvert)$ est :

$$\frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sin(2\times(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}))} = \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(x)}$$

On a également :

$$\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) = \frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})} = \frac{(1+\tan(\frac{x}{2}))^2}{1-\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{(\cos(\frac{x}{2})+\sin(\frac{x}{2}))^2}{\cos(x)} = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$$

2- Fractions rationnelles

Les fractions rationnelles de polynômes jouent un rôle essentiel, dans le sens où elles font partie d'une catégorie de fonctions dont on peut calculer des primitives. Il faut savoir en effet que toute fonction élémentaire (obtenue à partir de sommes, produits, quotients, logarithmes, exponentielles, extractions de racines) n'admet pas forcément une primitive sous forme de fonction élémentaire. On peut prouver par exemple que, si f et u sont des fractions rationnelles et si $\int f(t)e^{u(t)}\,dt$ est une fonction élémentaire, elle est nécessairement elle-même de la forme $g(t)e^{u(t)}$ avec g fraction rationnelle. De plus, si f et u sont des polynômes, il en est de même de g. Il est donc illusoire de chercher une primitive de la forme $\int \exp(t^2)\,dt$ sous forme de fonction élémentaire : sa primitive devrait être de la forme $g(t)\exp(t^2)$, avec g polynôme, donc $g'(t) + 2tg(t) = 1$ ce qui est impossible (le membre de droite est de degré nul alors que le membre de gauche serait de degré strictement positif). On montre qu'il en est de même de $\int \frac{e^x}{x}\,dx$. Les primitives de ces deux fonctions resteront donc sous forme d'intégrales.

Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes $\frac{A(x)}{B(x)}$. On factorise B sur le corps $\mathbf{R}$, et on décompose $\frac{A}{B}$ sous la forme d'une somme de termes de la forme suivante (décomposition en éléments simples) :

- un polynôme E, qui n'est autre que le quotient dans la division euclidienne de A par B. E s'appelle partie entière de $\frac{A}{B}$. La partie entière E, polynomiale, s'intègre sans difficulté.
- des termes $\frac{\lambda}{(x-a)^k}$, $1 \le k \le n$ si $(x-a)^n$ est facteur de B. $\frac{1}{x-a}$ s'intègre en $\ln|x-a|$ et $\frac{1}{(x-a)^k}$ s'intègre en $-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$ pour $k \ge 2$.
- des termes $\frac{\lambda x+\mu}{(x^2+ax+b)^k}$, $1 \le k \le n$ si $(x^2+ax+b)^n$ est facteur de B. En effectuant le changement de variable $x + \frac{a}{2} \to x$ et en posant $\alpha^2 = b - \frac{a^2}{4}$ on se ramène à un dénominateur de la forme $(x^2+\alpha^2)^k$. $\frac{x}{x^2+\alpha^2}$ s'intègre en $\frac{1}{2}\ln(x^2+\alpha^2)$. $\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n}$ s'intègre en $\frac{\text{Cte}}{(x^2+\alpha^2)^{n-1}}$ (on trouve la

valeur de Cte en dérivant cette dernière expression). $\dfrac{1}{x^2 + \alpha^2}$ s'intègre en $\dfrac{1}{\alpha}$ arctan$(\dfrac{x}{\alpha})$. $\dfrac{1}{(x^2 + \alpha^2)^n}$ s'intègre en faisant le changement de variable $x = \alpha \tan(\theta)$.

EXEMPLE 1 :

❑ Considérons $\displaystyle\int \sqrt{1 + t^2}\, dt$ (pour une primitive en général, on ne précisera pas de bornes, celles-ci étant sous-entendu. Cela a le mérite d'alléger les notations)

Posons $t = \mathrm{sh}(u)$, ou de manière équivalente $u = \mathrm{argsh}(t) = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$. On a alors :

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \int \mathrm{ch}^2(u)\, du = \int \frac{1 + \mathrm{ch}(2u)}{2}\, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sh}(u)\,\mathrm{ch}(u) + \mathrm{Cte}$$

$$= \frac{\ln(t + \sqrt{1 + t^2})}{2} + \frac{t\sqrt{1 + t^2}}{2} + \mathrm{Cte}$$

compte tenu du fait que $\mathrm{ch}(u) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(u)} = \sqrt{1 + t^2}$.

En particulier, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}{2}$ vu plus haut.

Autre méthode. Posons $t = \tan(\theta)$, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$. On obtient :

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \int \frac{1}{\cos^3(\theta)}\, d\theta$$

Posons $u = \sin(\theta)$. (La raison pour laquelle on choisit spécifiquement ce changement de variable sera expliqué plus bas). On obtient :

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \int \frac{1}{(1 - u^2)^2}\, du$$

Il suffit ☹ de décomposer $\dfrac{1}{(1 - u^2)^2}$ en éléments simples. On trouve :

$$\frac{1}{(1 - u^2)^2} = \frac{1}{(1 - u)^2(1 + u)^2} = \frac{a}{1 - u} + \frac{b}{(1 - u)^2} + \frac{c}{1 + u} + \frac{d}{(1 + u)^2}$$

avec $a = c$ et $b = d$ car la fonction est paire. On obtient $b = \dfrac{1}{4}$ en multipliant par $(1 - u)^2$ puis en posant $u = 1$. On obtient $a = \dfrac{1}{4}$ en posant ensuite $u = 0$.

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{(1 - u^2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{(1 - u)^2} + \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{(1 + u)^2}\right)$$

Donc :

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1 + u}{1 - u} + \frac{1}{1 - u} - \frac{1}{1 + u} \right) + \mathrm{Cte} \text{ or } u = \sin(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{\sqrt{1 + t^2} + t}{\sqrt{1 + t^2} - t} + 2t\sqrt{1 + t^2} \right) + \mathrm{Cte}.$$

Remarquer que $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}-t} = \sqrt{1+t^2} + t$

$$\Rightarrow \qquad \int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \text{Cte}$$

valeur trouvée précédemment.

EXEMPLE 2 :

❑ Considérons $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

Posons $u = t + \frac{1}{2}$. D'où :

$$\int \frac{1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(u^2+3/4)^2}\,\mathrm{d}u$$

Posons maintenant $u = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\theta) \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2(\theta))\,\mathrm{d}\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\sqrt{3}}{9}\int 1+\cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\right) + \text{Cte} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{u}{1+4u^2/3}\right) + \text{Cte} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2t+1}{3(t^2+t+1)} + \text{Cte}\end{aligned}$$

EXEMPLE 3 :

❑ Considérons $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Si on cherche à écrire $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$, on trouve $a = 1$ (multiplier par x puis faire $x = 0$) et $bx + c = -x - 1$ (multiplier par $x^2 + x + 1$ et faire $x = j$ racine cubique de l'unité).

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{Cte}\end{aligned}$$

3- Fractions rationnelles en sin(*x*) et cos(*x*)

Dans le cas d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int f(\sin(x), \cos(x))\,\mathrm{d}x$ où f est une fraction rationnelle en $\sin(x)$ et $\cos(x)$, on tente un changement de variable $u = \sin(x)$ ou $u = \cos(x)$ ou $u = \tan(x)$ ou $u = \tan(\frac{x}{2})$.

a) $u = \sin(x)$

On remarque que $u = \sin(x) = \sin(\pi - x)$. On fera donc ce changement de variable lorsque :

$$\int f(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int f(\sin(\pi - x), \cos(\pi - x))\, d(\pi - x) = -\int f(\sin(x), -\cos(x))\, dx$$

EXEMPLES :

❑ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3(x)}\, dx$ vu plus haut se calcule en effectuant le changement de variable $u = \sin(x)$.

❑ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)}\, dx = \int \frac{1}{1-u^2}\, du$ avec $u = \sin(x)$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + \text{Cte} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right| + \text{Cte} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos(x+\pi/2)}{1+\cos(x+\pi/2)} \right| + \text{Cte}$$

$$= \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \text{Cte}$$

b) $u = \cos(x)$

On remarque que $u = \cos(x) = \cos(-x)$. On fera donc le changement de variable lorsque :

$$\int f(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int f(\sin(-x), \cos(-x))\, d(-x) = -\int f(-\sin(x), \cos(x))\, dx$$

EXEMPLE :

❑ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(t)}\, dt = \int \frac{\sin(t)}{\sin^2(t)}\, dt = -\int \frac{1}{1-u^2}\, du$ avec $u = \cos(t)$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + \text{Cte} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)} \right| + \text{Cte} = \ln \left| \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right| + \text{Cte}$$

Si on fait le changement de variable $t = x + \frac{\pi}{2}$, on retrouve $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + \text{Cte}$.

c) $u = \tan(x)$

On remarque que $u = \tan(x) = \tan(\pi + x)$. On effectuera donc le changement de variable lorsque :

$$\int f(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int f(\sin(\pi + x), \cos(\pi + x))\, d(\pi + x) = \int f(-\sin(x), -\cos(x))\, dx$$

EXEMPLES :

❑ Considérons $\displaystyle\int \frac{1}{2 - \cos^2(t)}\, dt$.

Posons $u = \tan(t)$, soit $du = (1 + u^2)\, dt$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{2-\cos^2(t)}\, dt = \int \frac{1}{1+2u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}u) + \text{Cte} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(t)) + \text{Cte}$$

On remarquera que la constante est en fait une constante par intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ et dépendant de k, de façon à pouvoir définir une primitive continue de la fonction initiale sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de $\frac{1}{2 - \cos^2(t)}$ est la fonction F définie par :

$$\forall\, t \in\,]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[,\ \mathrm{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(t)) + \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$$

Sa valeur en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ est $\mathrm{F}(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{2}}$, obtenue comme limite à gauche de F en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, ou à droite en $\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$.

En particulier :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2 - \cos^2(t)}\, \mathrm{d}t = \mathrm{F}(\pi) - \mathrm{F}(0) \qquad \text{avec } \mathrm{F}(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ et } \mathrm{F}(0) = 0$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

en non pas :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2 - \cos^2(t)}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(t))\right]_0^{\pi} = 0$$

ce qui est absurde, puisque l'intégrale d'une fonction continue strictement positive ne peut être nulle.

❑ La même difficulté se pose dans l'exemple suivant[1] :

Vérifier que la fonction $\frac{1}{3} \arctan(\frac{3x(1 - x^2)}{x^4 - 4x^2 + 1})$ est une primitive de $\frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$ et trouver où est l'erreur de raisonnement dans le calcul suivant :

$$\int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3} \arctan(\frac{3x(1 - x^2)}{x^4 - 4x^2 + 1})\right]_0^1 = 0$$

Expliquer pourquoi la véritable valeur de l'intégrale est $\frac{\pi}{3}$.

<u>d) $u = \tan(x/2)$</u>

Dans tous les autres cas, ce changement de variables donne une fraction rationnelle en u. En effet, $\sin(x) = \frac{2u}{1 + u^2}$, $\cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $\tan(x) = \frac{2u}{1 + u^2}$, $\mathrm{d}x = 2 \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2}$. Il faut cependant s'y résoudre en dernier recours, car en général, les degrés des polynômes intervenant dans la fraction rationnelle sont doublés, ce qui complique les calculs. Parfois, il est cependant bien commode :

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\, \mathrm{d}u = \ln|u| + \mathrm{Cte} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \mathrm{Cte}$$

plus facilement qu'au a).

[1] E. Barbeau, FFF#278, The integral of a positive function equals 0, 39:3, College Math. J. (2008), 227-228.

Le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$ quand x varie entre 0 et π fait varier u entre 0 et $+\infty$. On est donc amené à rencontrer des intégrales du type $\int_0^{+\infty} f(u)\,du$, qui ne sont autres que $\lim\limits_{U\to+\infty} \int_0^U f(u)\,du$. Ce type d'intégrale s'appelle **intégrale généralisée**. Elles sont plus particulièrement étudiées dans le chapitre L2/SERIES.PDF.

EXEMPLE :

❑ Calculer $\int_0^{\pi} \frac{1}{a + b\cos(x)}\,dx$ avec $a > b > 0$.

Effectuons le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$. On obtient :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a + b\cos(x)}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{a + b + (a-b)u^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,u\right)\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

4- Fractions rationnelles en sh(x), ch(x) et e^x

Il suffit de faire la changement de variable $u = e^x$.

EXEMPLES :

❑ $\int \frac{1}{\text{sh}(x)}\,dx = \int \frac{2}{u^2 - 1}\,du = \ln\left(\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) + \text{Cte} = \ln\left(\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right|\right) + \text{Cte} = \ln\left(\left|\text{th}(\frac{x}{2})\right|\right) + \text{Cte}$

expression qu'il convient de rapprocher de $\ln\left(\left|\tan(\frac{x}{2})\right|\right)$, primitive de $\frac{1}{\sin(x)}$.

❑ $\int \frac{1}{\text{ch}(x)}\,dx = \int \frac{2}{u^2 + 1}\,du = 2\arctan(u) + \text{Cte} = 2\arctan(e^x) + \text{Cte}$

Cette expression semble, quant à elle, fort éloignée de la primitive de $\frac{1}{\cos(x)}$ donnée par $\ln\left(\left|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right|\right)$. Cependant, pour x élément de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, cette dernière fonction peut s'écrire :

$$\ln\left(\frac{1 + \tan(x/2)}{1 - \tan(x/2)}\right) = 2\,\text{argth}(\tan(\frac{x}{2}))$$

où argth, réciproque de la fonction th, est la fonction $x \to \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (voir le chapitre L1/FONCTUSU.PDF).

Ce rapprochement nous conduit à considérer l'expression $2\arctan(\text{th}(\frac{x}{2}))$. Si on la dérive, on trouve effectivement $\frac{1}{\text{ch}(x)}$, rendant les deux situations symétriques.

On peut également vérifier que :

$$2\arctan(\mathrm{th}(\frac{x}{2})) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2} = \arcsin(\mathrm{th}(x))$$

par exemple en constatant que les trois fonctions prennent la même valeur en $x = 0$ et ont même dérivée. Cela nous conduit à considérer la fonction $x \to \mathrm{argsh}(\tan(x))$, où argsh est la fonction $x \to \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, réciproque de la fonction sh. On pourra vérifier que cette fonction a pour dérivée $\frac{1}{\cos(x)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

5- Fonctions de la forme $\mathbf{P}(x)e^{\alpha x}$

P désigne un polynôme et α un nombre réel ou même complexe, ce qui permet de traiter le cas des cos et sin.

Lorsque deg(P) est faible (inférieur ou égal à 2), on peut intégrer par parties. Cependant, le nombre d'intégration par parties à effectuer est égal au degré de P.

EXEMPLE :

❑ $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + \text{Cte}$

On remarque que la primitive est de la forme $Q(x)e^{\alpha x}$ + Cte avec deg(Q) = deg(P). Ce résultat est général. On trouve Q en dérivant, ce qui donne :

$$\alpha Q + Q' = P$$

L'existence de Q est assurée, car il n'est pas difficile de vérifier que l'équation ci-dessus donne un système triangulaire dont les inconnues sont les coefficients de Q.

EXEMPLE :

❑ $\displaystyle\int x^2e^x\cos(2x)\,dx = \mathrm{Re}\int x^2e^{(1+2i)x}\,dx$

La primitive $\displaystyle\int x^2e^{(1+2i)x}\,dx$ est de la forme $(ax^2 + bx + c)e^{(1+2i)x}$ + Cte. D'où, en dérivant :

$$\left[\begin{array}{l}(1 + 2i)a = 1\\ 2a + (1 + 2i)b = 0\\ b + (1 + 2i)c = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = \dfrac{1}{1 + 2i} = \dfrac{1 - 2i}{5}\\ b = -\dfrac{2}{(1 + 2i)^2} = \dfrac{2}{3 - 4i} = \dfrac{6 + 8i}{25}\\ c = \dfrac{2}{(1 + 2i)^3} = -\dfrac{2}{11 + 2i} = \dfrac{-22 + 4i}{125}\end{array}\right.$$

Il suffit maintenant de prendre la partie réelle de la primitive. On obtient :

$$(\frac{x^2}{5} + \frac{6x}{25} - \frac{22}{125})\,e^x\cos(2x) + (\frac{2x^2}{5} - \frac{8x}{25} - \frac{4}{125})\,e^x\sin(2x)$$

6- Racines de trinômes ou de fonctions homographiques

$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ se calcule de la façon suivante : on réduit le trinôme en $a(x+\dfrac{b}{2a})^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$.

Plusieurs cas se présentent alors :

❑ $a = \alpha^2$ et $c - \dfrac{b^2}{4a} = \beta^2$. On obtient une expression du type $\sqrt{\alpha^2X^2+\beta^2}$.

Poser $X = \dfrac{\beta}{\alpha}\tan(\theta)$ ou $\dfrac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{sh}(t)$ pour profiter du fait que $1+\tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ ou $1+\mathrm{sh}^2(t) = \mathrm{ch}^2(t)$

❑ $a = \alpha^2$ et $\dfrac{c-b^2}{4a} = -\beta^2$. On obtient une expression du type $\sqrt{\alpha^2X^2-\beta^2}$.

Poser $X = \dfrac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{ch}(t)$ (ou $-\dfrac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{ch}(t)$ suivant le signe de X) ou $X = \dfrac{\beta}{\alpha}\,\dfrac{1}{\cos(\theta)}$, pour profiter du fait que $\mathrm{ch}^2(t) - 1 = \mathrm{sh}^2(t)$ ou $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)} - 1 = \tan^2(\theta)$

❑ $a = -\alpha^2$ et $c - \dfrac{b^2}{4a} = \beta^2$. On obtient une expression du type $\sqrt{\beta^2-\alpha^2X^2}$.

Poser $X = \dfrac{\beta}{\alpha}\sin(\theta)$ ou $\dfrac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{th}(t)$ pour profiter du fait que $1-\sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$ ou $1-\mathrm{th}^2(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$.

L'un des exercices de L1/FONCTUSU.PDF explique l'analogie de comportement rencontrée ici au sein des couples $(\tan(\theta), \mathrm{sh}(t))$, $(\dfrac{1}{\cos(\theta)}, \mathrm{ch}(t))$ et $(\sin(\theta), \mathrm{th}(t))$.

EXEMPLE :

❑ $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

Posons $x = \varepsilon\,\mathrm{ch}(t)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant le signe de x. On obtient :

$$\varepsilon\int \mathrm{sh}^2(t)\,dt = \varepsilon\int \frac{\mathrm{ch}(2t)-1}{2}\,dt = \varepsilon\,(\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t) - \frac{t}{2}) + \mathrm{Cte}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \mathrm{Cte}$$

$\int f\,(x, \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}})\,dx$ se calcule en posant $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = u$

En particulier, $\int f(x,\sqrt{ax+b})\,dx$ se calcule en posant $u = \sqrt{ax+b}$.

Annexe I : Calcul approché d'intégrales

La méthode générale de calcul approché d'intégrale consiste à approximer $\int_a^b f(t)\,dt$ par une somme finie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$, où les λ_i et les x_i sont bien choisis. Le plus souvent, on applique la méthode non sur $[a, b]$, mais sur une subdivision de $[a, b]$, afin d'obtenir une précision plus grande. Les calculatrices et logiciels fournissant des valeurs approchées d'intégrales utilisent l'une de ces méthodes.

1- Méthode des rectangles

Elle consiste à prendre comme valeur approchée de l'intégrale le produit de la valeur de f en un point de cet intervalle par la longueur de l'intervalle, par exemple $(b - a)f(a)$ (**méthode des rectangles à gauche**) ou $(b - a)f(b)$ (**méthode des rectangles à droite**). Ces deux méthodes sont très imprécises et ne sont exactes que pour les fonctions constantes. On obtient une meilleure précision en choisissant la **méthode du point milieu**, à savoir $(b - a)f(\frac{a+b}{2})$. Cette méthode est en effet exacte pour f de degré 1.

La méthode des rectangles à gauche, appliquée sur une subdivision de $[a, b]$ conduit aux sommes de Riemann :

$$\mathrm{R}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\,\frac{b-a}{n})$$

Nous avons vu, dans le paragraphe sur les sommes de Riemann, que, dans le cas des fonctions C^1, l'erreur commise était majorée par $\frac{\mathrm{M}(b-a)^2}{2n}$, où $\mathrm{M} = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

On peut prendre la méthode des rectangles à droite (l'erreur commise est analogue) :

$$\mathrm{R}_n' = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\,\frac{b-a}{n})$$

Dans le cas d'une fonction monotone, R_n et R_n' encadrent l'intégrale de f.

Quant à la méthode du point milieu, elle donne :

$$\mathrm{R}_n'' = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\,(a + (k + \frac{1}{2})\,\frac{b-a}{n})$$

Cherchons l'erreur commise de la méthode du point milieu pour une fonction de classe C^2. Soit M un majorant de $|f''|$. Dans le cas $n = 1$, on approxime l'intégrale par $(b - a)f(\frac{a+b}{2})$, qui est aussi l'intégrale de toute fonction affine passant par le point milieu, et en particulier de la fonction affine g dont le graphe est la tangente au graphe de f au point $\frac{a+b}{2}$. Majorons $f(t) - g(t)$. Appliquons l'inégalité de Taylor–Lagrange en $\frac{a+b}{2} = x_0$ sur f. On a :

$$\left| f(t) - f(x_0) - (t - x_0)f'(x_0) \right| \leq \frac{M(t - x_0)^2}{2}$$

or $f(x_0) + (t - x_0)f'(x_0)$ n'est autre que $g(t)$. L'erreur commise sur l'intégrale est donc majorée par :

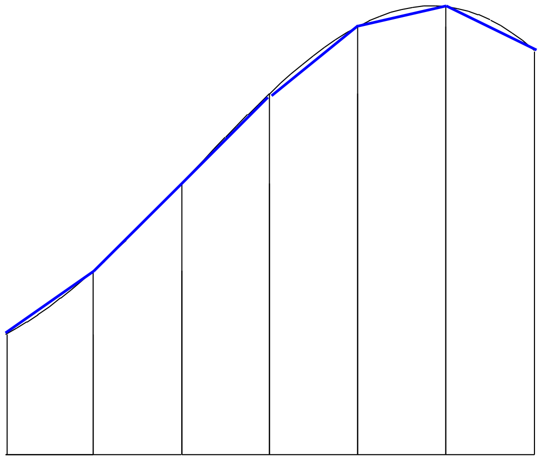
$$\int_a^b \frac{M(t - x_0)^2}{2} \,dt = \frac{M}{6} \left[(t - x_0)^3\right]_a^b = \frac{M(b - a)^3}{24}$$

Dans le cas d'une subdivision en n intervalles, l'erreur sur chaque intervalle de longueur $\frac{b - a}{n}$ est majorée par $\frac{M(b - a)^3}{24n^3}$, de sorte que l'erreur totale est majorée par $\frac{M(b - a)^3}{24n^2}$, bien meilleure que les méthodes des rectangles à gauche ou à droite.

2- Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approximer f par une fonction affine passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. L'intégrale s'approxime par l'aire d'un trapèze de bases $f(a)$ et $f(b)$, et de hauteur $b - a$. On obtient donc : $(b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$. Si on opère sur une subdivision régulière de $[a, b]$, on obtient :

$$T_n = \frac{b - a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b - a}{n}) \right)$$



Une excellent travail d'algorithmique consiste à programmer cette somme sur votre calculatrice. On peut remarquer que $T_n = \frac{R_n + R_n'}{2}$, où R_n et R_n' sont les sommes de Riemann à gauche et à droite. Cette méthode est exacte pour f de degré 1. Estimons l'erreur de la méthode pour f de classe C^2. Appelons M un majorant de $|f''|$. Pour $n = 1$, on approxime l'intégrale par $(b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$ qui représente l'intégrale de la fonction affine Φ qui coïncide avec f en a et b. Montrons que pour une telle fonction, on a :

$$\left| f(t) - \Phi(t) \right| \leq \frac{1}{2}(t - a)(b - t)M$$

ou encore

$$-\frac{1}{2}(t-a)(b-t)\mathrm{M} + \Phi(t) \leq f(t) \leq \frac{1}{2}(t-a)(b-t)\mathrm{M} + \Phi(t)$$

Etudions la fonction $h : t \to f(t) - \frac{1}{2}(t-a)(b-t)\mathrm{M} - \Phi(t)$. Sa dérivée seconde h'' est positive ou nulle, donc h' est croissante. Si h' est positive ou nulle, h est croissante. Comme h s'annule en a et en b, h est identiquement nulle et l'inégalité de droite est prouvée. Il en est de même si h' est négative ou nulle. Reste le cas où h' change de signe. Comme h' est croissante, h' est d'abord négative, puis positive. Donc h décroît, puis croît. Comme h s'annule en a et en b, h est négative ou nulle, ce qui prouve l'inégalité de droite. On procède de même pour montrer celle de gauche.

L'erreur commise est donc majorée par :

$$\int_a^b \frac{1}{2}(t-a)(b-t)\mathrm{M}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{M}\left[-\frac{t^3}{3} + \frac{(a+b)t^2}{2} - abt\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(-\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3} + \frac{(a+b)^2(b-a)}{2} - ab(b-a)\right)$$

$$= \frac{\mathrm{M}(b-a)}{12}(-2b^2 - 2ab - 2a^2 + 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 6ab) = \frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12}$$

Dans le cas d'une subdivision de n intervalles, l'erreur sur chaque intervalle de longueur n est $\frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^3}$ et l'erreur totale est majorée par $\frac{\mathrm{M}(b-a)^3}{12n^2}$, double de la méthode du point milieu.

3- Méthode de Simpson

On peut encore accélérer la vitesse de convergence. Nous admettrons que l'erreur dans la méthode des trapèzes, qui est en $\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$ pour une fonction C^2 est de la forme $\frac{\mathrm{A}}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$, de sorte que :

$$\mathrm{T}_n = \int_{\mathrm{I}} f + \frac{\mathrm{A}}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$$

Appliquons la même méthode des trapézes, mais en doublant le nombre de subdivision ($2n$ au lieu de n). On obtient :

$$\mathrm{T}_{2n} = \int_{\mathrm{I}} f + \frac{\mathrm{A}}{4n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$$

On voit qu'en calculant $\frac{4\mathrm{T}_{2n} - \mathrm{T}_n}{3}$, on élimine le terme en $\frac{\mathrm{A}}{n^2}$, de sorte que :

$$\mathrm{S}_n = \frac{4\mathrm{T}_{2n} - \mathrm{T}_n}{3} = \int_{\mathrm{I}} f + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$$

qui converge plus rapidement. On obtient la méthode de Simpson. Le procédé d'accélération utilisé s'appelle accélération de Richardson-Romberg. Il peut être itéré.

On a :

$$\mathrm{T}_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + 2k\frac{b-a}{2n})\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{1 \le k < 2n, k \text{ pair}} f(a + k \frac{b-a}{2n}) \right)$$

et $\quad 4T_{2n} = \dfrac{b-a}{n} \left(f(a) + f(b) + 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} f(a + k \frac{b-a}{2n}) \right)$

$$= \frac{b-a}{n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{1 \le k < 2n, k \text{ pair}} f(a + k \frac{b-a}{2n}) + 2 \sum_{1 \le k < 2n, k \text{ impair}} f(a + k \frac{b-a}{2n}) \right)$$

donc

$$S_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)+f(b)}{6} + \frac{1}{3} \sum_{1 \le k < 2n, k \text{ pair}} f(a + k \frac{b-a}{2n}) + \frac{2}{3} \sum_{1 \le k < 2n, k \text{ impair}} f(a + k \frac{b-a}{2n}) \right)$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6} f(a + k \frac{b-a}{n}) + \frac{2}{3} f(a + (k + \frac{1}{2}) \frac{b-a}{n}) + \frac{1}{6} f(a + (k+1) \frac{b-a}{n}) \right)$$

ce qui ressemble à une méthode du point milieu où $\frac{1}{6}$ du poids est attribué au point gauche, $\frac{1}{6}$ au point droit, les $\frac{2}{3}$ restants étant affectés au point milieu, ou encore ce qui est la somme de $\frac{2}{3}$ de la méthode du point milieu avec $\frac{1}{3}$ de la méthode des trapèzes.

EXEMPLE :

❑ Un logiciel donne comme valeur numérique approchée de $\int_0^1 \exp(x^2)\, dx$ la quantité 1,46265175.

Comparons cette valeur avec celles obtenues par les sommes de Riemann, la méthode des trapèzes, la méthode de Simpson, suivant le nombre de subdivision n :

n	2	4	8	16	32	64
Riemann	1.14201271	1.27589363	1.36231966	1.41072400	1.43624595	1.44933827
Trapèzes	1.57158317	1.49067886	1.46971228	1.46442031	1.46309410	1.46276235
Simpson	1.46371076	1.46272341	1.46265632	1.46265203	1.46265176	1.46265175

On constate donc que, pour $n = 64$, la méthode de Riemann ne donne que deux décimales exactes, la méthode des trapèzes en donne quatre, et la méthode de Simpson en donne neuf.

4- Méthodes de Newton-Cotes

Dans la méthode dite de rang l, on subdivise $[a, b]$ en $l + 1$ points équidistants (y compris a et b). Les coefficients λ_i sont choisis de façon que la formule soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à l. (On peut d'ailleurs montrer que, si l est pair, la formule est encore exacte pour les polynômes de degré $l + 1$, d'où une préférence pour les méthode de rang pair). On approxime f par le polynôme de degré inférieur ou égal à l qui coïncide avec f en les $l + 1$ points choisis. (Voir les *polynômes interpolateurs de Lagrange* dans le chapitre L1/POLYNOME.PDF).

EXEMPLES :

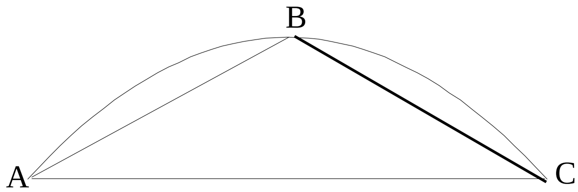
Les valeurs des λ_i sont données pour l'intervalle $[a, b] = [0, 1]$, auquel on peut se ramener par changement de variable.

❑ $l = 1$. On approxime f par une fonction affine. Il s'agit de la méthode des trapèzes. $\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1}{2}$.

❑ $l = 2$. On approxime f par une parabole, qui coïncide avec f en a, en b, et en $\frac{a+b}{2}$. $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{1}{6}$, $\lambda_1 = \frac{2}{3}$. Il s'agit de la méthode de Simpson. A noter que la formule :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

exacte pour une fonction polynomiale f de degré 2, est équivalente au fait que l'aire du segment de parabole est égale à $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC, propriété de la parabole déjà connue d'Archimède.



La formule de Simpson est en fait exacte pour les polynômes de degré 3.

Pour une subdivision de $[a, b]$ en n intervalles de même longueur, on retrouve la formule :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{6}f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{2}{3}f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) + \frac{1}{6}f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

On peut montrer que l'erreur est majorée, pour f de classe C^4, par $\frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$, où M est un majorant de $|f^{(4)}|$.

❑ $l = 4$. Il s'agit de la méthode de Boole-Villarceau. On approxime f par un polynôme de degré 4.

$\lambda_0 = \lambda_4 = \frac{7}{90}$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{16}{45}$, $\lambda_2 = \frac{2}{15}$

❑ $l = 6$. Il s'agit de la méthode de Weddle-Hardy. On approxime f par un polynôme de degré 6.

$\lambda_0 = \lambda_6 = \frac{41}{840}$, $\lambda_1 = \lambda_5 = \frac{9}{35}$, $\lambda_2 = \lambda_4 = \frac{9}{280}$, $\lambda_3 = \frac{34}{105}$

Pour $l \geq 8$ apparaît des coefficients λ_i négatifs, ce qui les rend plus sensibles aux erreurs d'arrondis. Elles ne sont donc pas utilisées.

5- Méthodes de Gauss

w étant une fonction donnée, on considère :

$$\int_a^b f(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

qu'on cherche à approximer par $\sum_i \lambda_i f(x_i)$, mais ici, les points ne sont pas équirépartis. S'il y a $l + 1$ points à choisir, il existe un choix unique tel que la méthode soit exacte pour f polynomiale de degré $2l + 1$. Pour le même nombre de points, la méthode est donc plus précise que celle de Newton-Cotes. On montre que les x_i sont les racines du $(l + 1)$-ème polynôme orthogonal pour le produit scalaire défini par :

$$<f,g> = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

Voir l'annexe I du chapitre L2/POLORTHO.PDF pour voir comment on calcule les x_i et les λ_i.

EXEMPLES :

❑ **Méthode de Gauss-Legendre** :

On prend ici $w = 1$ sur $[-1, 1]$. Les polynômes dont les x_i sont racines sont les polynômes de Legendre. Voici un tableau donnant le polynôme de Legendre, ses racines x_i, les coefficients λ_i correspondants[2].

l	polynôme	x_i	λ_i
0	x	0	2
1	$x^2 - \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1, 1
2	$x^3 - \frac{3}{5}x$	$0, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$
3	$x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$	$\pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$

❑ **Méthode de Gauss-Tchebychev** :

On prend ici $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ sur $[-1, 1]$. Les polynômes dont les x_i sont racines sont les **polynômes de Tchebychev** (voir L2/POLORTHO.PDF). On montre que les x_i et λ_i valent :

$$x_i = \cos\left(\frac{2i + 1}{2l + 2}\pi\right) \qquad \lambda_i = \frac{\pi}{l + 1} \qquad 0 \le i \le l$$

6- Divers

Voici enfin une dernière formule, sur $[-1,1]$ qu'on pourra comparer numériquement aux formules précédentes.

$$\frac{46}{75} f(0) + \frac{26 - 6\sqrt{5}}{75}\,(f(x_1) + f(-x_1)) + \frac{26 + 6\sqrt{5}}{75}\,(f(x_2) + f(-x_2))$$

avec $x_1 = \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ et $x_2 = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}}$

[2] On trouve une telle table dans : Jean-Pierre Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, PUF, (1991), p.77.

Annexe II : les intégrales de Riemann, de Kurzweil-Henstock et de Lebesgue

Nous avons introduit l'intégrale de Riemann d'une fonction continues par morceaux par encadrement par des fonctions en escalier. On peut donner une définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction sans faire appel à la continuité par morceaux. La voici :

Une **subdivision marquée** D *d'un intervalle* $[a, b]$ *est la donnée d'une subdivision* $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ *et pour chaque* $[x_{i-1}, x_i]$, *d'une valeur* t_i *dans cet intervalle. A cette subdivision et à une fonction* f, *on associe la somme de Riemann* $S_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. *La quantité* $\text{Max}\,\{x_i - x_{i-1}\}$ *est appelée le pas de la subdivision. Une fonction* f *bornée sur un segment* $[a, b]$ *est dite intégrable au sens de Riemann ou* R-*intégrable, d'intégrale* I, *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que, pour toute subdivision marquée* D *de pas inférieur à* δ, *on a :*

$$\left| S_D - I \right| < \varepsilon$$

Dans les sommes de Riemann $S_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ définies ci-dessus, on majore les $x_i - x_{i-1}$ par une constante δ. L'idée de Kurzweil et Henstock est de remplacer cette constante par une fonction strictement positive δ, calculée au point t_i. Une subdivision marquée est plus fine que δ si, pour tout i, $x_i - x_{i-1} < \delta(t_i)$. Un lemme, appelé **lemme de Cousin**, montre que, pour toute fonction δ, il existe des subdivisions marquées plus fines que δ. L'intégrale de Kurzweil et Henstock est définie comme suit :

Une fonction f *bornée ou non sur un segment* $[a, b]$ *est dite intégrable au sens de Kurzweil et Henstock ou* KH-*intégrable, d'intégrale* I, *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction strictement positive* δ, *telle que, pour toute subdivision marquées* D *plus fine que* δ, *on a :*

$$\left| S_D - I \right| < \varepsilon$$

On constate que la différence de définition par rapport à l'intégrale de Riemann est minime. Dans l'intégrale de Riemann, δ est un nombre, alors que dans la KH-intégrale, c'est une fonction. Cependant, la KH-intégrale est beaucoup plus puissante.

- Toute fonction R-intégrale est KH-intégrable avec la même intégrale. Mais la réciproque est fausse. La fonction de Dirichlet, valant 0 sur les irrationnels et 1 sur les rationnels, est KH-intégrale mais pas R-intégrable.
- f et $|f|$ sont KH-intégrables si et seulement si f est Lebesgue-intégrable. Nous n'avons pas donné de définition de l'intégrale de Lebesgue, mais cette propriété montre que la dite définition pourrait être ignorée au profit de la KH-intégrale.
- Si F est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors F' est KH-intégrable mais pas nécessairement R-intégrable et $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$. Réciproquement, si f est KH-intégrable, on peut définir $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. F est alors dérivable en tout point où f est continue, et $F'(t) = f(t)$

en un tel point. On n'a pas besoin de supposer F' continue sur tout l'intervalle dans la KH-intégrale.

- Il n'est pas nécessaire de définir de KH-intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{c \to a} \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction définie sur un intervalle $]a, b]$. Si f est KH-intégrable sur $[a, b]$, alors elle l'est sur tout $[c, b]$ avec $c > a$ et les deux membres sont égaux (comme pour l'intégrale de Riemann : c'est la continuité de l'intégrale comme fonction d'une de ses bornes). Mais inversement, si f est KH-intégrable sur tout $[c, b]$ avec $c > a$ et si le membre de droite existe, alors f est KH-intégrable sur $[a, b]$ et les deux membres sont égaux. Pour l'intégrale de Riemann, le membre de droite sert à définir le membre de gauche dans les cas dits impropres ou généralisés (voir L2/SERIES.PDF).

Nous nous bornerons à considérer comme exemple la fonction de Dirichlet sur [0, 1], valant 0 sur les irrationnels et 1 sur les rationnels. Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Rieman, car, pour tout subdivision marquée D, on peut choisir les t_i rationnels, conduisant à une valeur $S_D = 1$ ou bien les choisir irrationnels, conduisant à une valeur $S_D = 0$. Il est alors impossible de trouver une valeur I vérifiant la définition de l'intégrale de Riemann avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple.

La fonction de Dirichlet est pourtant définie au sens de Kurzweil et Henstock, et vaut 0. Pour cela, nous avons besoin d'admettre que les rationnels peuvent être dénombrés et numérotés sous la forme $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ Soit $\varepsilon > 0$. On définit $\delta(q_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}$ et pour x irrationnel, $\delta(x) = 1$. Soit une subdivision D définie par $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ marquée par des points t_i éléments de $[x_{i-1}, x_i]$ plus fine que δ. Dans la somme de Riemann associée $S_D = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, seuls les t_i rationnels ont une contribution puisque les t_i irrationnels vérifient $f(t_i) = 0$. D'où $S_D = \sum (x_i - x_{i-1})$, la somme étant prise sur les indices i tels que t_i soient rationnels. Mais alors on a :

$$x_i - x_{i-1} < \delta(t_i) = \frac{\varepsilon}{2^n} \text{ pour le } n \text{ tel que } t_i = q_n.$$

Il en résulte que $0 \leq S_D = \sum x_i - x_{i-1} < \sum \frac{\varepsilon}{2^n}$, la dernière somme étant prise sur les indices n tels que q_n soit égal à l'un des t_i. On peut majorer cette somme par $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. On a ainsi prouvé que :

$$\left| S_D - 0 \right| < \varepsilon$$

et que la KH-intégrale de f est nulle.

L'intégrale de Lebesgue fait l'objet du chapitre L3/LEBESGUE.PDF. Elle fait appel à la notion de mesure d'un ensemble. On montre que la mesure $m(\text{Rat})$ de l'ensemble des rationnels de [0, 1] est nulle alors que celle $m(\text{Irrat})$ de l'ensemble des irrationnels vaut 1. La fonction de Dirichlet f prend la valeur $1 = f(\text{Rat})$ sur les rationnels et $0 = f(\text{Irrat})$ sur les irrationnels. On définit alors l'intégrale de Lebesgue de f par :

$$m(\text{Rat})\, f(\text{Rat}) + m(\text{Irrat})\, f(\text{Irrat}) = 0$$

Cela semble analogue à effectuer des sommes de Riemann, mais les parties intervenant dans cette somme ne sont pas des intervalles, ce qui fait toute la différence entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2(x)\,dx$

Exo.2) Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...2n}$

Exo.3) a) Calculer, en fonction de a, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{\sqrt{1-2a\cos(t)+a^2}}\,dt$.

b) Calculer, pour $|a| \neq 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2}\,dt$

c) Factoriser $X^{2n} - 1$ sur $\mathbb{C}$ puis $\mathbb{R}$. En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos(t)+a^2)\,dt$ en utilisant des sommes de Riemann, pour $a \neq \pm 1$.

Exo.4) Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$

Exo.5) On considère la fonction définie par : $\displaystyle F(x) = \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}\,dt$

a) Etudier F. Donner son ensemble de définition, son sens de variation.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$

c) Prouver l'existence d'une limite en 0 et en 1.

d) Tracer le graphe de F

Exo.6) On définit $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,dt$

a) Calculer $l = \lim_{n\to\infty} I_n$

b) Donner un équivalent de $I_n - l$. (On pourra faire le changement de variables $u = t^n$).

Exo.7) Soit f continue sur [0,1]. Montrer que $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,dt = f(1)$. (On pourra se ramener au cas $f(1) = 0$).

Exo.8) Soit f continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que : $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

a) Montrer que $\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

b) En déduire $\int_0^\pi x\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$ et $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin(x)}\,dx$

Exo.9) a) Montrer que $\forall x \geq 1$, $\int_0^x \exp(t^2)\,dt \leq \frac{\exp(x^2)-1}{x}$.

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)\,dt$

Exo.10) Soit f et φ continues positives sur $[a, b]$, φ strictement positive. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)^n\,\varphi(x)\,dx\right)^{1/n}$.

Exo.11) Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$ et $J_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. Montrer que les deux suites (I_n) et (J_n) sont égales.

Exo.12) Montrer que, pour tout n entier strictement positif, $(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) \geq 1$.

Exo.13) Soit f de classe C^1, de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que, pour tout x, $|f'(x)| \leq M$ et que $f(a) = f(b) = 0$.

a) Montrer que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

b) Peut-on améliorer cette inégalité ?

Exo.14) Soit f continue sur $[a, b]$, telle que $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

b) En déduire $\displaystyle\int_0^\pi x\,\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

Exo.15) Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que f est dérivable en tout point de $[a, b]$ de dérivée $f\,'$ si et seulement si :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \forall\,x \in [a, b],\ \exists\,\alpha > 0,\ \forall\,h \in\,]-\alpha, \alpha[,\ \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f\,'(x)\right| < \varepsilon$$

b) Vérifier que f est C^1 sur $[a, b]$ de dérivée $f\,'$ si et seulement si :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\alpha > 0,\ \forall\,x \in [a, b],\ \forall\,h \in\,]-\alpha, \alpha[,\ \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f\,'(x)\right| < \varepsilon$$

Exo.16) Soit f de classe C^1 strictement monotone sur un segment $[a, b]$. Calculer :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Donner également une justification graphique du résultat.

Exo.17) Soit f lipschitzienne sur $[0, \pi]$. Exprimer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(\theta)\,|\sin(n\theta)|\,\mathrm{d}\theta$ en fonction de $\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

2- Solutions

Sol.1) a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{3(1+x)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3(1+x)} - \frac{x-1/2}{3((x-1/2)^2+3/4)} + \frac{1}{2((x-1/2)^2+3/4)}\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\big[\ln(1+x)\big]_0^1 - \frac{1}{6}\big[\ln(x^2-x+1)\big]_0^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\Big(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)\right]_0^1$$

$$= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Effectuer d'abord le changement de variable $x = \sin(\theta)$, puis $u = \tan(\frac{\theta}{2})$. On trouvera :

$$\int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{2+\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)(3+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} - \frac{2}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\,\big[\arctan(u)\big]_0^1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\arctan\Big(\frac{u}{\sqrt{3}}\Big)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}(1-\cos(2x))\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-x}\,dx - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{-x+2ix}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-x+2ix}}{2i-1}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{1-e^{-2\pi}}{1-2i}$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi}}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(1-e^{-2\pi}\right)$$

Sol.2) On utilise des sommes de Riemann, qui convergent vers une intégrale.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k^2}{n^2}+1} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\arctan(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}$

$$= \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos^2(t)}{4}\,dt \text{ en posant } x = \frac{1+\sin(t)}{2}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{8}\,dt = \frac{\pi}{8}$$

c) En prenant le ln, on obtient :

$$-\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

qui tend vers $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,dt = \left[t\ln(t)-t\right]_1^2 = 2\ln(2)-1$

donc la limite demandée vaut $\dfrac{4}{e}$

Sol.3) a) Pour $a = 0$, l'intégrale vaut $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(t)\,dt = 2$

Pour $a \neq 0$, $\displaystyle \mathrm{I}(x) = \frac{1}{a}\left[\sqrt{1-2a\cos(t)+a^2}\right]_0^{\pi} = \frac{|1+a| - |1-a|}{a}$

$$\text{donc} \quad \mathrm{I}(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{a} \text{ si } a \leq -1 \\ 2 \text{ si } -1 \leq a \leq 1 \\ \dfrac{2}{a} \text{ si } a \geq 1 \end{cases}$$

La fonction est continue en 0 et paire. On peut montrer directement ce dernier point sans calculer l'intégrale, en effectuant le changement de variable $t \to \pi - t$.

b) En posant $u = \tan(\frac{t}{2})$, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 - 2a\cos(t) + a^2} \, \mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2(1+a)^2 + (1-a)^2}$$

$$= 2 \frac{1}{|1 - a^2|} \left[\arctan(u \frac{|1+a|}{|1-a|}) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{|1 - a^2|}$$

Dans le chapitre L3/HOLOMRPH.PDF traitant des fonctions holomorphes ou analytiques, on donne la valeur de cette intégrale pour tout a complexe de module différent de 1 sans avoir besoin de calculer de primitive de $t \to \dfrac{1}{1 - 2a\cos(t) + a^2}$, en utilisant la méthode dite des résidus.

c) $\mathrm{X}^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (\mathrm{X} - e^{2ik\pi/2n}) = \prod_{k=0}^{2n-1} (\mathrm{X} - e^{ik\pi/n}) = (\mathrm{X}^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X} - e^{ik\pi/n})(\mathrm{X} - e^{-ik\pi/n})$

$$= (\mathrm{X}^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X}^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n}) \mathrm{X} + 1)$$

donc $\dfrac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (a^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n})\, a + 1)$

donc $\dfrac{1}{n} \ln \dfrac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n})\, a + 1)$

Le membre de droite converge vers $\int_0^1 \ln(a^2 - 2\cos(\pi t)a + 1) \, \mathrm{d}t$, alors que le membre de gauche tend vers $2 \ln|a|$ si $|a| > 1$ et 0 si $|a| < 1$. Il en résulte, après un changement de variables, que :

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2\cos(t)a + 1) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 \text{ si } |a| < 1 \\ 2\pi \ln|a| \text{ si } |a| > 1 \end{cases}$$

Ce résultat sera démontré d'une autre façon dans le chapitre relatif aux intégrales dépendant d'un paramètre L2/SUITESF.PDF.

Sol.4) Pour $x > 0$ par exemple, $\dfrac{e^x}{t} \leq \dfrac{e^t}{t} \leq \dfrac{e^{2x}}{t}$ donc l'intégrale est comprise entre $e^x\ln(2)$ et $e^{2x}\ln(2)$, donc la limite vaut $\ln(2)$. Procéder d'une façon analogue pour $x < 0$.

Il est inutile de chercher à calculer une primitive de $\frac{e^t}{t}$. Il n'existe pas d'expression de celle-ci sous forme de fonctions élémentaires.

Sol.5) a) F est définie pour $x \in\ ]0, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[$. Si G est une primite de $\frac{1}{\ln(t)}$, on a $F(x) = G(x^2) - G(x)$, donc :

$$F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x)$$
$$= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)} > 0$$

b) Pour $x > 1$, $F(x) \geq \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

c) En 0, l'égalité des accroissements finis appliquée à l'expression $F(x) = G(x^2) - G(x)$ donne l'existence d'un élément c de $[x^2, x]$ tel que $F(x) = (x^2 - x)\, G'(x) = \frac{x^2 - x}{\ln(c)}$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

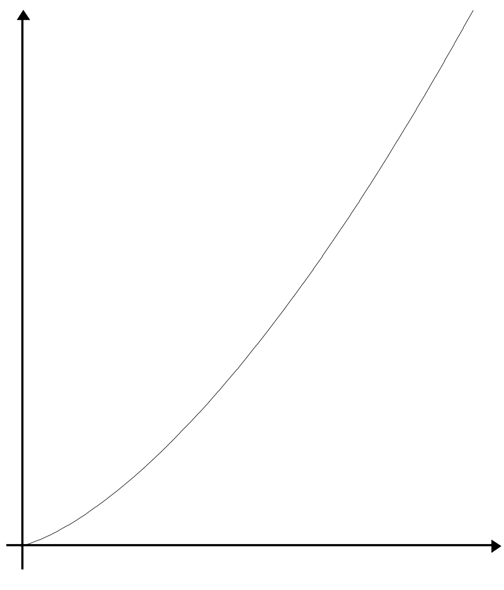
En 1, $\ln(t) \sim t - 1$. Ecrivons $\frac{1}{\ln(t)} = \frac{1}{t-1}\frac{t-1}{\ln(t)}$. On en déduit que :

$$m \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\, dt \leq F(x) \leq M \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\, dt$$

avec m et M respectivement le minimum et le maximum de $\frac{t-1}{\ln(t)}$ entre x et x^2. Comme $\lim\limits_{t\to 1} \frac{t-1}{\ln(t)} = 1$, on en déduit que m et M tendent aussi vers 1 et donc que :

$$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\, dt = \lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(2).$$

d)



Sol.6) a) Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$:

$$\left|\mathrm{I}_n - 1\right| = \left|\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 1\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

b) De plus :

$$\mathrm{I}_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\frac{1}{n}$$

et l'on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u} = \int_0^1 \frac{1-u^{1/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^1 1 - u^{1/n}\,\mathrm{d}u = 1 - \frac{1}{1/n+1} = \frac{1}{n+1} = o(1)$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u} \sim \int_0^1 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \ln(2)$

et $\displaystyle\mathrm{I}_n - 1 \sim -\frac{\ln(2)}{n}$

Sol.7) Si $f(1) = 0$, alors, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$, $\forall\ x \in\ ]1-\alpha, 1]$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Notons par ailleurs M un majorant de $|f|$ sur $[0, 1]$.

Alors $\displaystyle\left|n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t\right| \leq n\int_0^{1-\alpha} |f(t)|\,t^n\,\mathrm{d}t + n\int_{1-\alpha}^1 |f(t)|\,t^n\,\mathrm{d}t$

$$\leq \frac{n\mathrm{M}(1-\alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{n\varepsilon(1-(1-\alpha)^{n+1})}{n+1} \leq \mathrm{M}(1-\alpha)^{n+1} + \varepsilon$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}(1-\alpha)^{n+1} = 0$, $\exists\ \mathrm{N}$, $\forall\ n \geq \mathrm{N}$, $0 \leq \mathrm{M}(1-\alpha)^{n+1} \leq \varepsilon$

donc $\exists\ \mathrm{N}$, $\forall\ n \geq \mathrm{N}$, $\displaystyle\left|n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t\right| \leq 2\varepsilon$. On reconnaît la définition de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t = 0$.

Si $f(1) \neq 0$, posons $g(x) = f(x) - f(1)$. On a g continue et $g(1) = 0$, donc la partie précédente donne :

$$0 = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 g(t)t^n\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t - n\int_0^1 f(1)t^n\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t - \frac{nf(1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t - f(1)$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t = f(1)$

Sol.8) a) Effectuer le changement de variable $t = a + b - x$.

b) En appliquant le a), on trouve respectivement

$$\frac{\pi}{2}\left[-\arctan(\cos(x))\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{2}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } t = \tan(\frac{x}{2})$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^\infty = \pi$$

Sol.9) a) Soit $\varphi(x) = \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x} - \displaystyle\int_0^x \exp(t^2)\, dt$. On a :

$$\varphi(1) = e - 1 - \int_0^1 \exp(t^2)\, dt$$

$$\geq \; e - 1 - \int_0^1 \exp(t)\, dt \qquad \text{car } t^2 \leq t \text{ sur } [0, 1]$$

$$\geq 0$$

et $\quad \varphi'(x) = 2\exp(x^2) - \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x^2} - \exp(x^2) = \exp(x^2) - \dfrac{\exp(x^2) - 1}{x^2}$

$$= \frac{(x^2 - 1)\exp(x^2) + 1}{x^2} \geq 0$$

donc φ est croissante sur $[1, +\infty[$. Etant positive en 1, elle est positive sur $[1, +\infty[$.

b) D'après le a), on a $0 \leq \exp(-x^2) \displaystyle\int_0^x \exp(t^2)\, dt \leq \dfrac{1 - \exp(-x^2)}{x^2} \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Sol.10) Soit M le maximum de f. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α et β tels que $\forall$ $[\alpha, \beta]$, $f(x) \geq M - \varepsilon$ (continuité de f en le point où f atteint son maximum). On a alors :

$$(M - \varepsilon)^n \int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)^n\, \varphi(x)\, dx \leq M^n \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

Donc $\quad (M - \varepsilon) \left(\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx\right)^{1/n} \leq \left(\displaystyle\int_a^b f(x)^n\, \varphi(x)\, dx\right)^{1/n} \leq M \left(\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, dx\right)^{1/n}$

Les quantités $\left(\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(x)\, dx\right)^{1/n}$ et $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, dx\right)^{1/n}$ tendent vers 1 quand n tend vers l'infini, donc :

$$\exists\, N, \forall\, n \geq N, M - 2\varepsilon \leq \left(\int_a^b f(x)^n\, \varphi(x)\, dx\right)^{1/n} \leq M + 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)^n\, \varphi(x)\, dx\right)^{1/n} = M$

Sol.11) On a $I_0 = J_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + t}\, dt$.

Pour tout n, $I_{n+1} + I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1 + t}\, dt = \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n + 1}$

et $\quad J_{n+1} + J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1 - t)^n\, (1 - t + 1 + t)}{(1 + t)^{n+2}}\, dt = 2 \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{(1 + t)^{n+2}}\, dt$

$$= 2 \int_1^2 \frac{(2 - u)^n}{u^{n+2}}\, du \qquad \text{avec } u = 1 + t$$

$$= 2 \int_1^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k\, (-1)^{n-k}}{u^{k+2}}\, du = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k + 1}\, 2^{k+1}\, (-1)^{n-k}\, \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} 2^{k+1} (-1)^{n-k} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

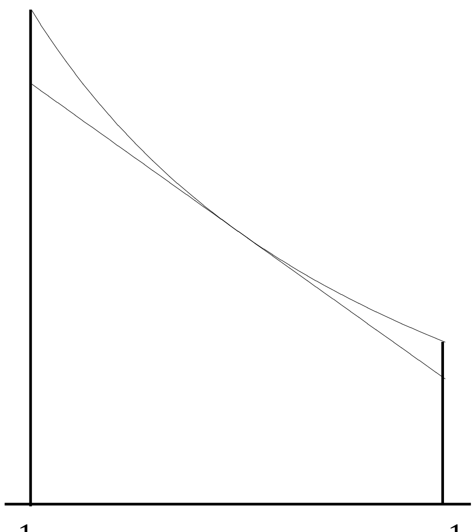
$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^{k} (-1)^{n-k+1} \left(1 - \frac{1}{2^{k}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k+1} (2^{k} - 1)$$

$$= \frac{1}{n+1} ((2-1)^{n+1} - (1-1)^{n+1}) = \frac{1}{n+1}$$

Donc $I_n + I_{n+1} = J_n + J_{n+1}$. Il n'est pas difficile alors de montrer par récurrence que $I_n = J_n$.

Sol.12) L'inégalité est équivalente à $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}}$. Le membre de gauche est $\int_1^{1+1/n} \frac{1}{t}\,dt$ alors que le membre de droite est l'aire du trapèze de base $[1, 1 + \frac{1}{n}]$ et tangent en $1 + \frac{1}{2n}$ à la courbe $\frac{1}{x}$. La fonction $x \to \frac{1}{x}$ étant convexe, cette tangente est située sous la courbe de la fonction et l'aire du trapèze est inférieure à l'intégrale.



Le même raisonnement sur un intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$ conduit à $\ln\left(\frac{b}{a}\right) \geq \frac{2(b-a)}{a+b}$. Cette dernière inégalité peut aussi se montrer en étudiant directement la fonction $b \to \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{2(b-a)}{a+b}$.

Sol.13) a) Majorer $|f(x)|$ par $M(x-a)$ sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et par $M(b-x)$ sur $[\frac{a+b}{2}, b]$ au moyen de l'inégalité des accroissements finis.
On a alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^{(a+b)/2} M(x-a)\,dx + \int_{(a+b)/2}^b M(b-x)\,dx$$

$$\le \left[\frac{M(x-a)^2}{2}\right]_0^{(a+b)/2} + \left[-\frac{M(b-x)^2}{2}\right]_{(a+b)/2}^b = \frac{M(b-a)^2}{4}$$

b) On ne peut faire mieux. Pour $f(x) = \begin{cases} M(x-a) \text{ sur } [a, \frac{a+b}{2}] \\ M(b-x) \text{ sur } [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$, on obtient exactement $\frac{M(b-a)^2}{4}$ comme valeur de l'intégrale. Cette fonction n'est pas C^1, mais on peut l'approximer aussi près qu'on veut par une fonction C^1. Pour $\varepsilon > 0$, prendre la fonction $M(x-a)$ sur $[a, \frac{a+b}{2} - \varepsilon]$, $M(b-x)$ sur $[\frac{a+b}{2} + \varepsilon, b]$ avec un raccord C^1 sur $[\frac{a+b}{2} - \varepsilon, \frac{a+b}{2} + \varepsilon]$. Par exemple, si ce raccord est parabolique, on a :

$$f(x) = \begin{cases} M(x-a) \text{ sur } [a, \frac{a+b}{2} - \varepsilon] \\ M\left(\frac{b-a-\varepsilon}{2} - \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2\varepsilon}\right) \text{ sur } [\frac{a+b}{2} - \varepsilon, \frac{a+b}{2} + \varepsilon] \\ M(b-x) \text{ sur } [\frac{a+b}{2} + \varepsilon, b] \end{cases}$$

Les courageux pourront vérifier que l'écart entre $\frac{M(b-a)^2}{4}$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ est $\frac{M\varepsilon^2}{3}$ qu'on peut rendre aussi petit qu'on veut, de sorte qu'on ne peut remplacer $\frac{M(b-a)^2}{4}$ par une valeur inférieure.

Sol.14) a) La différence fait $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})\, f(x)\,dx$ et le changement de variable $x - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - y$ donne $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})\, f(x)\,dx = -\int_a^b (y - \frac{a+b}{2})\, f(y)\,dy$ donc l'intégrale est nulle.

b) $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ donne $\int_0^\pi x \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$

Pour $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,dt = \pi$$

Sol.15) a) C'est simplement la définition de $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ en tout x.

b) Supposons f C^1. Alors f' est continue sur le segment $[a, b]$, donc est uniformément continue, d'après le théorème de Heine. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x, \forall y, |y-x| < \alpha \Rightarrow |f'(y) - f'(x)| < \varepsilon$$

Pour tout $h \in \,]-\alpha, \alpha[$, le théorème des accroissements finis entraîne l'existence d'un y entre x et $x+h$ tel que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(y)$. On a alors $|y-x| \leq |h| < \alpha$, ce qui permet de conclure que :

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| = |f'(y) - f'(x)| < \varepsilon$$

Réciproquement, supposons la propriété vérifiée. Puisqu'elle entraîne trivialement a), cela signifie d'abord que f est dérivable de dérivée f', et il suffit de montrer que la propriété signifie que f' est continue. Soit donc $\varepsilon > 0$. On a, pour tout x et tout y de I et tout h non nul :

$$f'(x) - f'(y) = \left(f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) - \left(f'(y) - \frac{f(y+h)-f(y)}{h}\right) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$$

Si on prend h tel $|h| < \alpha$, on aura donc :

$$|f'(x) - f'(y)| \leq 2\varepsilon + \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(y+h)-f(y)}{h} \right|$$

Mais, pour un tel h, x étant donné, $\lim\limits_{y\to x} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - \dfrac{f(y+h)-f(y)}{h} = 0$, donc $\exists\, \beta > 0$ tel

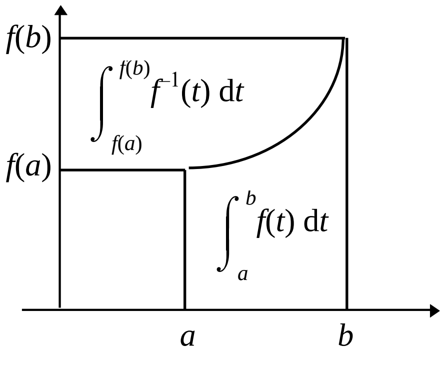
$$\forall\, y, |y-x| < \beta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(y+h)-f(y)}{h} \right| < \varepsilon$$

et donc $\forall\, y, |y-x| < \beta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| \leq 3\varepsilon$

ce qui est la définition de $\lim\limits_{y\to x} f'(y) = f'(x)$.

Sol.16) Si on pose $u = f^{-1}(t)$ ou $t = f(u)$ dans la deuxième intégrale, on obtient :

$$\int_a^b f(u) + uf'(u)\, du = \big[uf(u)\big]_a^b = bf(b) - af(a)$$



Sol.17) Pour $f = 1$, on a :

$$\int_0^\pi |\sin(n\theta)|\, d\theta = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(n\theta)|\, d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(\varphi)|\, d\varphi \qquad \text{où } \varphi = n\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times 2 = 2.$$

Il en résulte que la valeur moyenne de la fonction $\theta \to \left|\sin(n\theta)\right|$ tendait vers $\frac{2}{\pi}$.

Pour f K-lipschitzienne, on écrit que :

$$\int_0^\pi f(\theta) \left|\sin(n\theta)\right| \, d\theta = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(\theta) \left|\sin(n\theta)\right| \, d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n}) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \left|\sin(n\theta)\right| \, d\theta + R$$

$$\text{avec } R = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} (f(\theta) - f(\frac{k\pi}{n})) \left|\sin(n\theta)\right| \, d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n}) \frac{2}{n} + R$$

$\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n}) \frac{2}{n}$ est une somme de Riemann dont la limite est $2\int_0^1 f(\pi x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \, d\theta$.

Par ailleurs :

$$\left|R\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} K\,(\theta - \frac{k\pi}{n}) \, d\theta = \frac{K\pi^2}{2n} \text{ qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Donc la limite cherchée est $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \, d\theta$. On constate que cela revient à remplacer dans l'intégrale initiale $\left|\sin(n\theta)\right|$ par sa valeur moyenne.

En fait, l'hypothèse du caractère lipschitzien de f n'est pas nécessaire. La continuité suffit. Si f est continue sur $[0, \pi]$, f est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$. Pour n assez grand, on peut approximer f sur $[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}]$ par $f(\frac{k\pi}{n})$ à moins de ε près. On a alors :

$$\int_0^\pi f(\theta) \left|\sin(n\theta)\right| \, d\theta = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(\theta) \left|\sin(n\theta)\right| \, d\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n}) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \left|\sin(n\theta)\right| \, d\theta + R$$

avec le même R que ci-dessus. On a facilement $\left|R\right| < 2\varepsilon$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n}) \frac{2}{n} + R$$

Puisque $\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k\pi}{n}) \frac{2}{n}$ tend vers $2\int_0^1 f(\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\, d\theta$, pour n assez grand, la différence entre $\int_0^\pi f(\theta)\,|\sin(n\theta)|\, d\theta$ et $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\, d\theta$ peut être rendu plus petit que 3ε. On montre ainsi que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(\theta)\,|\sin(n\theta)|\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\, d\theta$$

◆