FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

PLAN

I : Limites
- 1) Vocabulaire
- 2) Définition des limites
- 3) Opérations sur les limites
- 4) Inégalités sur les limites
- 5) Lien avec les suites
- 6) Exemples et contre-exemples

II : Equivalence locale
- 1) Définitions
- 2) Exemples
- 3) Opérations
- 4) Fonction négligeable devant une fonction
- 5) Somme d'équivalents

III : Fonctions monotones
- 1) Définition
- 2) Opérations sur les fonctions monotones
- 3) Limite d'une fonction monotone

IV : Continuité
- 1) Définition
- 2) Image d'un intervalle
- 3) Image d'un segment
- 4) Continuité et monotonie

V : Equations fonctionnelles
- 1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- 2) $f(x + y) = f(x)f(y)$
- 3) $f(xy) = f(x) + f(y)$
- 4) $f(xy) = f(x)f(y)$

Annexe : fonction continue sur $\mathbb{Q}^c$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$

Exercices
- 1) Enoncés
- 2) Solutions

I : Limites

1- Vocabulaire

Dans ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs réelles) ou parfois à valeurs dans $\mathbb{C}$ (fonction d'une variable réelle à valeurs complexes)

Si f et g sont deux fonctions et λ un scalaire, $f + g$ est la fonction $x \to f(x) + g(x)$. λf est la fonction $x \to \lambda f(x)$. Ces deux opérations confère à l'ensemble des fonctions définies sur le même ensemble une structure d'espace vectoriel (voir L1/ESPVECT.PDF). La fonction fg est la fonction $x \to f(x)g(x)$. La fonction $f \circ g$ est la fonction $x \to f(g(x))$. La fonction $|f|$ est la fonction $x \to |f(x)|$.

Pour des fonctions à valeurs réelles, la fonction Sup(f,g) (ou Max(f,g)) est la fonction qui à x associe la plus grande valeur de $f(x)$ et $g(x)$. La fonction Inf(f,g) (ou Min(f,g)) est la fonction qui à x associe la plus petite valeur de $f(x)$ et $g(x)$.

Une fonction f à valeurs réelles est **majorée** si : $\exists$ M, $\forall x$, $f(x) \leq$ M

Une fonction f à valeurs réelles est **minorée** si : $\exists m$, $\forall x$, $f(x) \geq m$

Une fonction f à valeurs réelles est **bornée** si elle est majorée et minorée. On peut écrire aussi :

$$\exists \text{ M}, \forall x, |f(x)| \leq \text{M}$$

Cette dernière définition s'applique aux fonctions à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module.

Une fonction f à valeurs réelles admet un **maximum** si : $\exists x_0$, $\forall x$, $f(x) \leq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \underset{x \in \text{I}}{\text{Max}} f(x)$ si I est l'ensemble de définition de f, ou plus succinctement, $f(x_0) = \text{Max } f$.

Une fonction f à valeurs réelles admet un **minimum** si : $\exists x_0$, $\forall x$, $f(x) \geq f(x_0)$. On note $f(x_0) = \underset{x \in \text{I}}{\text{Min}} f(x)$ si I est l'ensemble de définition de f, ou plus succinctement, $f(x_0) = \text{Min } f$.

Une fonction f à valeurs réelles admet un **extremum** si elle admet un maximum ou un minimum.

Le maximum, minimum ou extremum est dit **local** en remplaçant précédemment $\forall x$ par :

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$$

Autrement dit, la propriété n'est vérifiée que sur un intervalle autour de x_0 et non sur l'ensemble de définition de f.

Une fonction à valeurs réelles peut être bornée sans admettre de maximum ou de minimum, mais seulement une borne supérieure ou inférieure (penser à e^{-x} sur $[0, +\infty[$ qui admet 1 comme maximum et 0 comme borne inférieure mais non comme minimum). Ces bornes sont notées respectivement $\underset{x \in \text{I}}{\text{Sup}} f(x)$, et $\underset{x \in \text{I}}{\text{Inf}} f(x)$ si on se place sur un intervalle I.

Une fonction f est **paire** si : $\forall x, f(-x) = f(x)$. Le graphe d'une telle fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. L'ensemble des fonctions paires est stable par les deux opérations d'addition des fonctions et de multiplication des scalaires ; il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions.
Une fonction f est **impaire** si : $\forall x, f(-x) = -f(x)$. Le graphe d'une telle fonction est symétrique par rapport à l'origine. L'ensemble des fonctions impaires forme également un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions.

Une fonction est **périodique** de période T ou T-périodique si : $\forall x, f(x + T) = f(x)$.

Une fonction est **lipschitzienne** de rapport k ou k-lipschitzienne si : $\forall x, \forall y, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.
(Lipschitz, mathématicien allemand, 1832-1903)

2- Définition des limites

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous allons définir $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = L$. Cette notion, malgré l'intuition qu'on peut en avoir, a été extrêmement longue à être clarifiée par les mathématiciens et n'a reçu ses fondements définitifs que vers 1850.

L et X_0 peuvent valoir, indépendamment l'un de l'autre, une valeur finie, $+\infty$, $-\infty$, ou ∞. Cela représente potentiellement 16 définitions. En fait, toutes reposent sur un schéma général que nous donnerons ultérieurement. Voici auparavant quelques exemples de définition de $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = L$:

- L = l réel et $X_0 = x_0$ réel.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- L = l réel et $X_0 = +\infty$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall x, x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- $L = -\infty$ et $X_0 = x_0$ réel.

$$\forall A, \exists \alpha, \forall x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$$

- $L = +\infty$ et $X_0 = \infty$

$$\forall A, \exists B, |x| > B \Rightarrow f(x) > A$$

Les premières définitions de ce type ont été données par Weierstrass (1815-1897).

SCHEMA DE LA DEFINITION GENERALE :
On dit que f tend vers L lorsque x tend vers X_0 *lorsque :*

$$\forall V \textit{ voisinage de } L, \exists W \textit{ voisinage de } X_0, \forall x, x \in W \Rightarrow f(x) \in V$$

Un voisinage désigne une partie contenant :
pour un réel l, un intervalle de la forme $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$
pour $+\infty$, un intervalle de la forme $]A, +\infty[$
pour $-\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty, A[$

pour ∞, le complémentaire d'un intervalle de centre 0, de rayon A.

Cette définition peut être adaptée à chaque cas particulier, en utilisant des voisinages adéquats. Elle s'applique également aux suites, fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, avec $X_0 = +\infty$. Si f n'est définie que sur une partie D_f, on suppose que tout voisinage de X_0 intersecte D_f.

La limite, si elle existe, est unique. Voici la démonstration dans le cas où x_0, L et L' sont finis. Supposons par l'absurde que L et L' sont deux limites différentes. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - L'|$. Il existe α et β positifs tels que :

$$\forall\, x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\forall\, x \in\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[,\ |f(x) - L'| < \varepsilon$$

Pour $x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\, \cap\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$, on a :

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < 2\varepsilon$$

et on obtient une contradiction.

Si la limite de f lorsque x tend vers x_0 réel est égale à $f(x_0)$, on dit que f est **continue** en x_0.

En remplaçant x par $x_0 + h$, on voit qu'il y a équivalence entre $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ et $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$.

Pour $X_0 = x_0$ réel, on parle de **limite à droite ou à gauche** :

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$ (limite à droite)

signifie : $\forall$ V voisinage de L, $\exists\, \alpha > 0$, $\forall\, x$, $x_0 < x < x_0 + \alpha \Rightarrow f(x) \in V$
Si $L = f(x_0)$, on dit que la fonction est **continue à droite**.

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$ (limite à gauche)

signifie : $\forall$ V voisinage de L, $\exists\, \alpha > 0$, $\forall\, x$, $x_0 - \alpha < x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V$
Si $L = f(x_0)$, on dit que la fonction est **continue à gauche**.

Plus généralement, on peut définir la limite de f lorsque x tend vers X_0, fini ou non, avec x élément d'une partie A par :

$$\forall \text{ V voisinage de L, il existe W voisinage de } X_0,\ \forall\, x,\ x \in W \cap A \Rightarrow f(x) \in V$$

On suppose pour cela que tout voisinage W de X_0 intersecte $A \cap D_f$.

Voici un dernier exemple :

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = L$

signifie : $\forall$ V voisinage de L, $\exists\, \alpha$, $\forall\, x$, $|x - x_0| < \alpha$ et $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$. On a pris $A = R - \{x_0\}$.

Il résulte des définitions que, si f admet une limite finie en X_0, f est bornée au voisinage de X_0.

En ce qui concerne les fonctions à valeurs complexes, et comme pour les suites, si on écrit $f = g + ih$ avec g et h les parties réelles et imaginaires de f, on a :

$$\lim_{x \to X_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to X_0} g(x) = \text{Re}(L) \text{ et } \lim_{x \to X_0} h(x) = \text{Im}(L)$$

3- Opérations sur les limites

Les théorèmes sur les limites sont en tous points identiques à ceux sur les suites :

<u>a) SOMME</u>

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions. Lorsque x tend vers X_0 :

(i) *Si f converge vers* L *et g vers* L', *alors f + g converge vers* L + L'.

(ii) *Si f est bornée au voisinage de* X_0 *et g tend vers* ∞, *alors f + g tend vers* ∞

(iii) *Si f est minorée au voisinage de* X_0 *et g tend vers* $+\infty$, *alors f + g tend vers* $+\infty$

(iv) *Si f est majorée au voisinage de* X_0 *et g tend vers* $-\infty$, *alors f + g tend vers* $-\infty$

<u>Démonstration</u> :

Les démonstrations sont données dans le cas où x_0 est fini, mais s'adaptent facilement dans le cas où X_0 est infini :

❑ (i) : $\forall \varepsilon > 0, |f(x) + g(x) - (L + L')| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L'|$

Or, $\exists \alpha > 0, \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x) - L| < \varepsilon$

et $\exists \beta > 0, \forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x) - L'| < \varepsilon$

Posons $\eta = \text{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) + g(x) - (L + L')| < 2\varepsilon$$

Pour majorer par ε, il aurait suffit de partir de $\frac{\varepsilon}{2}$ dans les définitions des limites de f et g. On a donc bien montré que $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + L'$.

En particulier, si C est une constante, $\lim_{x \to x_0} (f(x) + C) = (\lim_{x \to x_0} f(x)) + C$

❑ (ii) : $\forall A, |f(x) + g(x)| \geq |g(x)| - |f(x)|$

Or, $\exists M$ et $\exists \alpha > 0, \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)| \leq M$

et $\exists \beta > 0, \forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(x)| > A + M$

Posons $\eta = \text{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) + g(x)| > A.$$

ce qui prouve que $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

❑ Les démonstrations pour (iii) et (iv) sont analogues à celles de (ii)

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des fonctions tend vers $+\infty$, et l'autre vers $-\infty$.

b) PRODUIT

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions. Lorsque x tend vers X_0 :

(i) *Si f converge vers* L *réel et g vers* L' *réel, alors fg converge vers* LL'.

(ii) *Si f est bornée et g converge vers* 0, *alors fg tend vers* 0

(iii) *Si* $|f|$ *est minoré par un réel strictement positif et si g tend vers* ∞ , *alors fg tend vers* ∞.

Démonstration :

❑ (i) : $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LL'| &= |f(x)(g(x) - L') + (f(x) - L)L'| \\ &\leq |f(x)|\,|g(x) - L'| + |f(x) - L|\,|L'| \\ &\leq M|g(x) - L'| + |f(x) - L|\,|L'|\end{aligned}$$

où M est un majorant de la fonction f bornée dans un voisinage de x_0.

Or, $\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |g(x) - L'| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

$\exists\, \beta > 0,\ \forall\, x \in\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[,\ |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2|L'|}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall\, x \in\,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)g(x) - LL'| < \varepsilon.$$

On a donc bien prouvé que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = LL'$.

En particulier, $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

❑ (ii) : Soit M un majorant de $|f|$ sur un voisinage $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0. On a :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$$

Or, $\exists\, \beta > 0,\ \forall\, x \in\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[,\ |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall\, x \in\,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)g(x)| < \varepsilon.$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

❑ (iii) : Soit $m > 0$ minorant $|f|$ sur un voisinage $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0. On a :

$$\forall\, A > 0,\ \forall\, x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |f(x)g(x)| > |g(x)|m$$

Or, $\exists\, \beta > 0,\ \forall\, x \in\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[,\ |g(x)| > \dfrac{A}{m}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall\, x \in\,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x)g(x)| > A$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \infty$.

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des fonctions tend vers ∞, et l'autre vers 0.

On peut très bien avoir un produit fg qui tend vers l'infini sans qu'aucune des deux fonctions f ou g ne tende vers l'infini. Considérer par exemple $f(x) = x(\sin(x) + 1 + \frac{1}{x^2})$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sin(x) + 1 + \frac{1}{x^2}}$. Ni f ni g ne tendent vers l'infini quand x tend vers l'infini (pour le voir, considérer $f(2n\pi - \frac{\pi}{2})$ et $g(n\pi)$) mais le produit $f(x)g(x) = x$ tend vers l'infini.

c) INVERSE

PROPOSITION

Soit f une fonction. Lorsque x tend vers X_0 :

(i) *Si f converge vers* L *non nul, alors* $\frac{1}{f}$ *converge vers* $\frac{1}{\mathrm{L}}$.

(ii) *Si f tend vers* 0, *alors* $\frac{1}{f}$ *tend vers* ∞.

(iii) *Si f tend vers* ∞, *alors* $\frac{1}{f}$ *tend vers* 0.

Démonstration :

❑ (i) : Soit $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\mathrm{L}}\right| = \frac{|f(x) - \mathrm{L}|}{|f(x)|\,|\mathrm{L}|}$$

Or $\exists\, \alpha > 0, \forall x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x) - \mathrm{L}| < \dfrac{|\mathrm{L}|}{2}$ et donc $|f(x)| > \dfrac{|\mathrm{L}|}{2}$

Donc, $\forall x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{L}}\right| < \mathrm{C}|f(x) - \mathrm{L}|$, avec $\mathrm{C} = \dfrac{2}{|\mathrm{L}|^2}$

De plus : $\exists\, \beta > 0, \forall x \in\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |f(x) - \mathrm{L}| < \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{C}}$

Posons $\eta = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$. On a alors :

$$\forall x \in\,]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\mathrm{L}}\right| < \varepsilon$$

❑ (ii) : $\forall \mathrm{A} > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall x \in\,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x)| < \dfrac{1}{\mathrm{A}}$

donc $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > \mathrm{A}$

❑ La démonstration de (iii) est analogue à celle de (ii)

d) QUOTIENT

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions. Lorsque x tend vers X_0 :

(i) *Si f converge vers* L *et g vers* L' *non nul, alors* $\frac{f}{g}$ *converge vers* $\frac{L}{L'}$.

(ii) *Si f est bornée au voisinage de* X_0 *et g converge vers* ∞, *alors* $\frac{f}{g}$ *tend vers* 0

(iii) *Si* $|f|$ *est minoré par un réel strictement positif au voisinage de* X_0, *et si g tend vers* 0, *alors* $\frac{f}{g}$ *tend vers* ∞ .

Démonstration :

❑ Il suffit d'utiliser les résultats démontrés pour le produit et l'inverse, en considérant $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

On obtient une forme indéterminée lorsque les deux fonctions tendent vers ∞, ou vers 0.

e) COMPOSITION

PROPOSITION

Soient f et g telles que f tende vers Y_0 *lorsque x tend vers* X_0, *et que g tende vers* L *lorsque x tend vers* Y_0. *Alors* $g \circ f$ *tend vers* L *lorsque x tend vers* X_0.

Démonstration dans le cas où Y_0, L, X_0 sont finis, les autres cas étant des adaptations de celui-ci :

❑ Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\, \alpha > 0, \forall\, y \in\,]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[, |g(y) - L| < \varepsilon$

et $\exists\, \beta > 0, \forall\, x \in\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |f(x) - y_0| < \alpha$

donc, $\forall\, x \in\,]x_0 - \beta, x_0 + \beta[, |g(f(x)) - L| < \varepsilon$

Il résulte des propositions précédentes qu'on ne peut conclure directement dans les cas suivants :

$\lim f.g$ avec $\lim f = 0$ et $\lim g = \infty$	"$0.\infty$"
$\lim \frac{f}{g}$ avec $\lim f = 0$ et $\lim g = 0$	"$\frac{0}{0}$"
$\lim \frac{f}{g}$ avec $\lim f = \infty$ et $\lim g = \infty$	"$\frac{\infty}{\infty}$"
$\lim f^g = \lim e^{g.\ln(f)}$ avec $\lim f = 0$ et $\lim g = 0$	"0^0"
$\lim f^g = \lim e^{g.\ln(f}$)avec $\lim f = \infty$ et $\lim g = 0$	"∞^0"
$\lim f^g = \lim e^{g.\ln(f)}$ avec $\lim f = 1$ et $\lim g = \infty$	"1^∞"

Les trois dernières formes indéterminées ci-dessus concernent l'exponentielle. Un exemple classique de forme indéterminée exponentielle est le suivant :

$$(1 + \frac{1}{x})^x = \exp(x\ln(1 + \frac{1}{x})) \to \exp(1) \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty$$

4- Inégalités sur les limites

Les théorèmes sur les inégalités sont en tout point identiques à ceux sur les suites.

PROPOSITION

Soit f une fonction qui converge vers L *lorsque x tend vers* X_0. *Alors* :

(i) $L > a \Rightarrow \exists W$ *voisinage de* X_0, $\forall x \in W$, $f(x) > a$
(ii) $\exists W$ *voisinage de* X_0, $\forall x \in W$, $f(x) \geq a \Rightarrow L \geq a$

On a des résultats analogues avec < et ≤.

Les démonstrations sont données en utilisant la notion générale de voisinage.
Démonstration :
❑ (i) : résulte de la définition de la convergence en prenant $\varepsilon = L - a$ si L est fini, ou bien $A = a$ si $L = +\infty$. Dans le premier cas, il existe un voisinage W tel que, $\forall x \in W$, $|f(x) - L| < \varepsilon = L - a$, donc $f(x) > a$. Dans le second, il existe un voisinage W tel que, $\forall x \in W$, $f(x) > A = a$.

❑ (ii) : Par l'absurde, si on avait $L < a$, alors il existerait U voisinage de X_0 tel que, pour tout x élément de U, $f(x) < a$ d'après le i) avec < au lieu de >. Alors, pour x élément de $U \cap W$, on devrait avoir simultanément $f(x) \geq a$ et $f(x) < a$, ce qui est impossible.
Ce résultat s'appelle **passage à la limite** dans une inégalité. On remarquera qu'il se pratique avec des inégalités larges.

PROPOSITION
(i) *Si f converge vers* α, *g vers* β, *lorsque x tend vers* X_0, *alors :*
$\alpha < \beta \Rightarrow \exists W$ *voisinage de* X_0, $\forall x \in W$, $f(x) < g(x)$
(ii) *Si f converge vers* α, *g vers* β, *alors :*
$\exists W$ *voisinage de* X_0, $\forall x \in W$, $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \alpha \leq \beta$
(iii) *Si f et h convergent vers* L, *et si :*
$\exists W$ *voisinage de* X_0, $\forall x \in W$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
alors g converge vers L.

Démonstration :
❑ (i) et (ii) se montrent en appliquant la proposition précédente à la fonction $f - g$.

❑ (iii) : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U$ voisinage de X_0, $\forall x \in U$, $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.
$\exists V$ voisinage de X_0, $\forall x \in V$, $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$.
Donc, $\forall x \in U \cap V \cap W$, $L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$.
Donc $\lim\limits_{x \to X_0} g(x) = L$.

5- Lien avec les suites

PROPOSITION
Il y a équivalence entre :
(i) *f tend vers* L *lorsque x tend vers* X_0.
(ii) *Pour toute suite* (a_n) *tendant vers* X_0, $(f(a_n))$ *tend vers* L.

Le (ii) s'appelle **caractérisation séquentielle de la limite**.

Dans le cas des fonctions continues, cette équivalence s'exprime de la façon suivante. Il y a équivalence entre :
(i) f est continue en x_0.
(ii) Pour toute suite (a_n) tendant vers x_0, $(f(a_n))$ tend vers $f(x_0)$.

Démonstration :

❑ (i) ⇒ (ii) découle du théorème de composition des limites portant sur les fonctions suivantes :

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$n \to a_n \to f(a_n)$$

❑ Inversement, (ii) ⇒ (i). Par l'absurde, si f ne tend pas vers L, alors :

$$\exists \text{ V voisinage de L}, \forall \text{ W voisinage de } X_0, \exists x \in W, f(x) \notin V \ (*)$$

Définissons en particulier une suite de voisinages (W_n) dont l'intersection se réduit à X_0. Considérons d'abord le cas où X_0 est réel. Prenons $W_n =]X_0 - \frac{1}{n}, X_0 + \frac{1}{n}[$. Il résulte de (*) que, pour tout n, il existe a_n élément de W_n tel que $f(a_n)$ n'appartienne pas à V. Or :

$$a_n \in W_n \Rightarrow X_0 - \frac{1}{n} < a_n < X_0 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = X_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L \text{ par hypothèse}$$

ce qui est contradictoire avec le fait que le voisinage V de L ne contient aucun $f(a_n)$.

Si X_0 n'est pas réel, la démonstration est analogue en prenant :

Si $X_0 = +\infty$, $W_n =]n, +\infty[$
Si $X_0 = -\infty$, $W_n =]-\infty, -n[$
Si $X_0 = \infty$, $W_n =]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[$

Cette proposition est souvent utilisée par la négative. S'il existe deux suites (a_n) et (b_n) convergeant vers X_0 telle que $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ tendent vers des limites différentes (ou même n'admettent pas de limite), alors f ne peut admettre de limite.

EXEMPLE :

❑ $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0, puisque :

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \Rightarrow f(x_n) = 0$$
$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \Rightarrow f(y_n) = 1$$

6- Exemples et contre–exemples

a) $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0. (cf ci-dessus)

b) $x\sin(\frac{1}{x})$ admet une limite nulle en 0, puisque :

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ et que } \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

c) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ (**fonction de Dirichlet,** 1829).

f n'admet de limite en aucun point. En effet, $\mathbb{Q}$ et son complémentaire $\mathbb{Q}^c$ étant denses dans $\mathbb{R}$, pour tout x, il existe une suite (a_n) de rationnels qui converge vers x, et une suite (b_n) d'irrationnels qui converge vers x. On a alors :

$f(a_n) = 1$
$f(b_n) = 0$

Donc f ne peut admettre de limite en x.

II : Equivalence locale

1- Définition

DEFINITION

On dit que deux fonctions f et g sont **équivalentes** *au voisinage de* X_0 *(fini ou non) s'il existe* V *voisinage de* X_0 *et* ε *fonction définie de* V *dans* $\mathbb{R}$*, et tendant vers* 0 *quand* x *tend vers* X_0*, tels que :*

$$\forall x \in V,\ f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$$

On note : $f \sim g$ au voisinage de X_0. Deux fonctions équivalentes ont même signe au voisinage de X_0.

Si la fonction g ne s'annule pas, c'est équivalent à :

$$\lim_{x \to X_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On vérifiera aisément que $\sim$ est une relation d'équivalence. En particulier :

$f \sim g$ et $g \sim h \Rightarrow f \sim h$

permettant d'effectuer des calculs en chaîne.

2- Exemples

PROPOSITION

(i) *Soit* x_0 *réel. Si* f *admet une limite non nulle* L *quand* x *tend vers* x_0*, alors* $f \sim L$

(ii) *Soit* x_0 *réel,* f *dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0) \neq 0$*. Alors* $f(x) - f(x_0)$ *est équivalent à* $(x - x_0)f'(x_0)$ *au voisinage de* 0*.*

Démonstration :

❑ On a (i) car $\dfrac{f}{L}$ tend vers 1 quand x tend vers x_0.

❑ (ii) résulte de la définition de la dérivabilité de f en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

donc $\quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0)\left(1 + \dfrac{\varepsilon(x)}{f'(x_0)}\right)$ avec $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\varepsilon(x)}{f'(x_0)} = 0.$

Pour les calculs d'équivalent, en général, on se ramène en 0 par changement de variables. En utilisant les deux propriétés précédentes ou par calcul direct de la limite du quotient, on obtient, quand x tend vers 0 :

$\sin(x) \sim x$

$\cos(x) \sim 1$

$\tan(x) \sim x$

$1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$ (utiliser $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\dfrac{x}{2})$)

$e^x \sim 1$

$e^x - 1 \sim x$

$\ln(1 + x) \sim x$

$(1 + x)^\alpha \sim 1$

$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$a_p x^p + ... + a_n x^n \sim a_p x^p$ (avec $p < ... < n$, $a_p \neq 0$)

Au voisinage de ∞

$a_p x^p + ... + a_n x^n \sim a_n x^n$ (avec $p < ... < n$, $a_n \neq 0$)

Une fonction f équivalente à la fonction identiquement nulle 0 au voisinage de x_0 est de la forme $0(1 + \varepsilon) = 0$, autrement dit elle est identiquement nulle dans un intervalle ouvert contenant x_0. Il en résulte qu'on ne trouve **JAMAIS** 0 comme équivalent d'une fonction, à moins d'être parti de la fonction identiquement nulle (mais dans ce cas pourquoi chercher un équivalent de cette fonction ??)

3- Opérations

Il résulte aisément de la définition de l'équivalence que celle-ci est compatible avec le produit des fonctions, le quotient, l'inverse, l'élévation à une puissance quelconque. On a donc :

$$\left[\begin{array}{l} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{g} \text{ (pour des fonctions ne s'annulant pas)} \\ f_1 f_2 \sim g_1 g_2 \\ \dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2} \\ f_1^{a} \sim g_1^{a} \end{array}\right.$$

Par contre, l'exemple suivant **<u>prouve l'incompatibilité avec la somme</u>**.

$\ln(1 + x) \sim x$ au voisinage de 0

$-\sin(x) \sim -x$

Mais $\ln(1 + x) - \sin(x)$ n'est pas équivalent à 0, puisqu'elle n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0.

Il n'y a pas non plus de compatibilité par composition des fonctions. Ainsi, quand x tend vers 0 :

$e^x \sim \cos(x) \sim 1$ au voisinage de 0,

<u>mais</u> $\ln(e^x) = x$

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1) \sim \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$
$$\ln(1) = 0$$
et les trois images de e^x, $\cos(x)$ et 1 par le logarithme ne sont pas équivalentes.

Il n'y a pas non plus de compatibilité avec le passage à la réciproque pour des fonctions bijectives. Par exemple, $\ln(2x) = \ln(x) + \ln(2) \sim \ln(x)$ quand x tend vers l'infini et tendent vers l'infini, **mais** les réciproques des deux fonctions sont $\frac{e^x}{2}$ et e^x, qui ne sont pas équivalentes en l'infini.

4- Fonction négligeable devant une fonction

DEFINITION

(i) *f est* **négligeable** *devant g au voisinage de* X_0 *s'il existe un voisinage* V *de* X_0 *et une fonction* ε *qui tend vers* 0 *lorsque x tend vers* X_0 *tels que :*

$$\forall x \in V,\ f(x) = g(x)\,\varepsilon(x)$$

(ii) *f est* **dominée** *par g au voisinage de* X_0 *s'il existe une constante* C *et un voisinage* V *de* X_0 *tels que :*

$$\forall x \in V,\ |f(x)| \leq C\,|g(x)|$$

Si la fonction g ne s'annule pas, i) est équivalent à :

$$\lim_{x \to X_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note $f = o(g)$ au voisinage de X_0 pour f négligeable devant g, et $f = O(g)$ pour f dominée par g. Si f est négligeable devant g, f est évidemment dominée par g.

EXEMPLES :

- Au voisinage de $+\infty$: $(\ln(x))^r = o(x^s)$ et $x^s = o(e^{tx})$ avec r, s, t positifs quelconques.
- Au voisinage de 0 : $(\ln(x))^r = o(\frac{1}{x^s})$ avec r et s positifs quelconques.
- Au voisinage de $-\infty$: $e^{sx} = o(\frac{1}{|x|^r})$ avec r et s positifs quelconques.

Toutes ces formules se déduisent des comparaisons entre logarithmes, puissances et exponentielles, et se basent sur des formules telles que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, et qu'on trouvera dans le chapitre L1/FONCTUSU.PDF.

5- Somme d'équivalents

Nous sommes maintenant en mesure de donner une règle permettant d'additionner des équivalents. On considère deux fonctions f et g et une fonction de référence h (en général on prendra $h(x) = x$ ou une puissance de x).

PROPOSITION

Au voisinage de X_0 :

(i) *Si* $f \sim h$ et $g = o(h)$ *alors* $f + g \sim h$

(ii) *Si* $f \sim \lambda h$ *et* $g \sim \mu h$, *et si* $\lambda + \mu \neq 0$, *alors* $f + g \sim (\lambda + \mu)h$

(iii) *Si* $f \sim \lambda h$ *et* $g \sim \mu h$, *et si* $\lambda + \mu = 0$, *alors* $f + g = o(h)$

Démonstration :

❑ (i) : il existe deux fonctions α et β de limite nulle en X_0 telles que :

$$\begin{cases} f(x) = h(x)(1 + \alpha(x)) \\ g(x) = h(x)\beta(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) + g(x) = h(x)(1 + \alpha(x) + \beta(x)) \sim h(x)$$

❑ (ii) : il existe deux fonctions α et β de limite nulle en X_0 telles que :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda h(x)(1 + \alpha(x)) \\ g(x) = \mu h(x)(1 + \beta(x)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) + g(x) = h(x)(\lambda + \lambda\alpha(x) + \mu + \mu\beta(x)) = (\lambda + \mu)h(x)(1 + \frac{\lambda\alpha(x) + \mu\beta(x)}{\lambda + \mu}) \sim (\lambda + \mu)h(x)$$

❑ (iii) : Dans le cas où $\lambda + \mu = 0$, le même calcul que précédemment conduit à :

$$f(x) + g(x) = h(x)(\lambda + \lambda\alpha(x) + \mu + \mu\beta(x)) = h(x)(\lambda\alpha(x) + \mu\beta(x)) = o(h)$$

EXEMPLE :

❑ Soit $f(x) = 1 + \sin^2(x) - \cos(x) + 3x^3$. On a, au voisinage de 0 :

$$1 = 1$$

$$\sin^2(x) \sim x^2 = o(1)$$

$$-\cos(x) \sim -1$$

$$3x^3 = o(1)$$

On a donc $1 + \sin^2(x) \sim 1$, $-\cos(x) + 3x^3 \sim -1$ et donc $f(x) = o(1)$, i.e. $\lim\limits_{x \to 0} f = 0$ ce qui était évident sans calcul d'équivalents. Par contre, si on écrit :

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\sin^2(x) \sim x^2$$

$$3x^3 = o(x^2)$$

On peut conclure que :

$$f(x) \sim \frac{3x^2}{2}$$

On en déduit la limite non évidente : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + \sin^2(x) - \cos(x) + 3x^3}{x^2} = \frac{3}{2}$.

III : Fonctions monotones

1- Définition

DEFINITION

une fonction f est **croissante** (*respectivement* **décroissante**, **strictement croissante**, **strictement décroissante**) *sur un intervalle* I *d'intérieur non vide si :*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \forall y \in \mathrm{I}, x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$$

(*respectivement* $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$; $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)

f est **monotone** *sur* I *si elle est croissante sur* I, *ou décroissante sur* I.

2- Opérations sur les fonctions monotones

On vérifiera aisément que :

❑ la somme de fonctions croissantes (respectivement décroissantes) est croissante (respectivement décroissante).

❑ l'inverse d'une fonction monotone de signe constant est monotone de monotonie opposée.

❑ le produit de fonctions croissantes (respectivement décroissante) ***positives*** est croissante (respectivement décroissante).

❑ la composée de deux fonctions de même monotonie est croissante ; la composée de deux fonctions de monotonie opposée est décroissante.

3- Limite d'une fonction monotone

On dispose pour les fonctions d'un résultat analogue à celui des suites :

PROPOSITION

Soit f monotone sur un intervalle I d'intérieur non vide.

(i) *Si* x_0 *est intérieur à* I, *alors f admet une limite à gauche strictement et une limite à droite strictement de* x_0.

(ii) *Si* X_0 *est une borne* (*finie ou non*) *de* I, *f admet une limite finie en* X_0 *si et seulement si f est bornée au voisinage de* X_0. *C'est le cas si f est définie en* X_0. *Sinon, f tend vers l'infini.*

Démonstration :

La démonstration est faite dans le cas où f est croissante.

❑ (i) : Soit x_0 intérieur à I. Montrons que f admet une limite à gauche de x_0. (La démonstration est analogue à droite). Pour tout $x < x_0$, on a $f(x) \leq f(x_0)$. Donc $\{f(x) \mid x < x_0\}$ est majoré. Soit M sa borne supérieure. On remarque que $M \leq f(x_0)$ car $f(x_0)$ est un majorant des $f(x)$ pour $x < x_0$, alors que M est le plus petit majorant. Montrons que M est égale à la limite de f à gauche de x_0. On a :

(a) $\forall\ x < y,\ f(x) \leq f(y)$

(b) $\forall\ x < x_0,\ f(x) \leq M$

(c) $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ x < x_0,\ f(x) > M - \varepsilon$.

Les deux derniers points sont des caractérisations de la borne supérieure (plus petit majorant).

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. D'après (c), il existe $x_1 < x_0$ tel que :

$M - \varepsilon < f(x_1)$.

Pour tout x élément de $]x_1, x_0[$, on a alors :

$$M - \varepsilon < f(x_1) \underset{(a)}{\leq} f(x) \underset{(b)}{\leq} M < M + \varepsilon$$

ce qui montre bien que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = M$.

On note parfois $f(x_0^-)$ la limite à gauche de x_0 et $f(x_0^+)$ la limite à droite.

Il résulte de ce qui précède que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

❑ (ii) : Si la borne X_0 est dans I, ou si f est bornée au voisinage de X_0, la démonstration est analogue avec $M = \text{Sup}\ \{f(x) \mid x < X_0\}$ (pour X_0 borne droite de I).

Si f n'est pas bornée, on a :

(i) $\forall\, x < y,\, f(x) \leq f(y)$

(ii) $\forall$ A, $\exists\, x < X_0\ f(x) > A$

Soit A quelconque. D'après (ii), il existe $x_1 < X_0$ tel que :

$f(x_1) > A$

Pour tout x élément de $]x_1, X_0[$, on a alors :

$$\underset{(ii)}{A < f(x_1)} \underset{(i)}{\leq} f(x)$$

ce qui montre que f tend vers $+\infty$ en X_0.

IV : Continuité

1- Définition

f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Un cas particulièrement simple est donné par les fonctions lipschitziennes. Si f est lipschitzienne de rapport k, alors :

$$\forall\, x, \left|f(x) - f(x_0)\right| \leq k \left|x - x_0\right|$$

On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ puisque le majorant $\left|x - x_0\right|$ tend vers 0.

EXEMPLES :

❑ La fonction $x \to \left|x\right|$ est continue car lispchitzienne de rapport 1. Cela résulte de l'inégalité triangulaire $\big|\left|x\right| - \left|y\right|\big| \leq \left|x - y\right|$.

❑ Soit $f(x) = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{array}\right.$, alors f est continue à gauche de 0, mais pas à droite, car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ alors que $f(0) = 0$.

Si f n'est pas définie en x_0 et si f tend vers l lorsque x tend vers x_0, alors on peut poser $f(x_0) = l$, **prolongeant** ainsi f **par continuité** en x_0.

Si I est un intervalle, on dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I. Si I contient l'une de ses bornes, la continuité se fait à droite ou à gauche.

On note $C^0(I)$ l'espace des fonctions continues sur I.

Il résulte des théorèmes d'opérations sur les limites que des sommes, produits, inverses, quotients, composées de fonctions continues en un point ou sur un intervalle sont continues en ce point ou sur cet intervalle. Si f est continue, $\left|f\right|$ aussi comme composée de la fonction f et de la valeur absolue, toutes deux continues. Si f et g sont continues, alors Sup(f, g) et Inf(f, g) aussi. Il suffit d'écrire que :

$$\text{Sup}(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{\left|f-g\right|}{2}$$

$$\text{Inf}(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{\left|f-g\right|}{2}$$

2- Image d'un intervalle

PROPOSITION

Soit I *un intervalle et f continue sur* I. *Alors* $f(\mathrm{I})$ *est un intervalle.*

$f(\mathrm{I})$ désigne l'ensemble des images des éléments de I par f.

Démonstration :

❑ La propriété à prouver est équivalente aux propriétés successives suivantes :

(i) $\forall y \in f(\mathrm{I}), \forall z \in f(\mathrm{I}), [y, z] \subset f(\mathrm{I})$

Ceci découle de la caractérisation des intervalles comme parties convexes de $\mathbf{R}$, vue dans le chapitre L1/SUITES.PDF.

(ii) $\forall a \in \mathrm{I}, \forall b \in \mathrm{I}, [f(a), f(b)] \subset f(\mathrm{I})$

Ceci est obtenu à partir de i) en posant $y = f(a)$ et $z = f(b)$.

(iii) $\forall a \in \mathrm{I}, \forall b \in \mathrm{I}, f(a) \le z \le f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], z = f(c)$

On a juste traduit dans ii) la phrase : $[f(a), f(b)] \subset f(\mathrm{I})$

(iv) $\forall a \in \mathrm{I}, \forall b \in \mathrm{I}, f(a) \le 0 \le f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b], f(c) = 0$

Découle immédiatement de (iii) avec $z = 0$. Inversement, (iii) s'en déduit en raisonnant sur $g = f - z$.

(v) $\forall a \in \mathrm{I}, \forall b \in \mathrm{I}, f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \exists c \in]a, b[, f(c) = 0$

En effet, si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$, il suffit dans iv) de prendre $c = 0$

Ce dernier énoncé (v) est connu sous le nom de théorème des valeurs intermédiaires. C'est donc ce dernier qu'il s'agit de démontrer :

THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Soit f continue sur $[a,b]$, *telle que* $f(a) < 0 < f(b)$. *Alors il existe c élément de* $]a,b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Ce théorème n'a eu de démonstration que fort tard. Il nécessite en effet une conception claire de la continuité, qui n'est apparue qu'au XIX$^{\text{ème}}$. En 1817, Bolzano (1781-1848) rejette les justifications usuelles basées sur des considérations liées à la géométrie, au mouvement, à l'espace, dans un domaine qu'il considère purement analytique. La première définition de la continuité, encore intuitive, a été publiée par Cauchy en 1821.

Démonstration 1 :

❑ Soit $\mathrm{A} = \{x \in [a, b] \mid f(x) \le 0\}$

A contient a, donc est non vide, et est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure c, $c \le b$. Montrons que c convient :

Si $f(c) < 0$, alors, f étant continue, f est strictement négative dans un voisinage $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ de c, donc $c + \varepsilon$ appartient à A, ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de A.

Si $f(c) > 0$, alors f est strictement positive dans un voisinage $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ de c. Cependant, c étant la borne supérieure de A, il devrait exister un élément x de A dans $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, donc tel que $f(x) \le 0$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, on a bien $f(c) = 0$

Démonstration 2 :

❑ Cette démonstration utilise le **principe de dichotomie**. On définit trois suites (a_n), (b_n) et (m_n) de la façon suivante. Soit $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Rappelons que l'on a supposé $f(a) < 0 < f(b)$. On définit par récurrence :

$$m_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

Si $f(m_n) > 0$ alors $\left[\begin{array}{l} a_n = a_{n-1} \\ b_n = m_n \end{array}\right.$,sinon $\left[\begin{array}{l} a_n = m_n \\ b_n = b_{n-1} \end{array}\right.$

Il est facile de vérifier que :

$\forall\ n,\ a_n < b_n$

$\forall\ n,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

$\forall\ n,\ f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$

(a_n) et (b_n) sont donc deux suites adjacentes (voir L1/SUITES.PDF), donc convergent vers un même réel c. f étant continue, on a, en passant à la limite :

$\forall\ n,\ f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(c) \leq 0$

$\forall\ n,\ f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) \geq 0$

Donc $f(c) = 0$.

La démonstration précédente donne une méthode de calcul d'une valeur approchée de c, une erreur e étant acceptée. On suppose $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, de signe contraire :

u ← a
v ← b
tant que v – u > e et f($\frac{u+v}{2}$) ≠ 0 faire
    si f($\frac{u+v}{2}$) * f(b) > 0 alors v ← $\frac{u+v}{2}$
        sinon u ← $\frac{u+v}{2}$
    finsi
finfaire
$\frac{u+v}{2}$

Cependant, dans la pratique, il peut se poser des problèmes délicats, négligés ci-dessus, provenant du fait que les valeurs numériques sont toujours approchées. Un test tel que $f(\frac{u+v}{2}) \neq 0$ n'a numériquement guère de sens. Pour des valeurs proches de 0, il se peut même que $f(\frac{u+v}{2})$ soit positif mais que la machine en donne une valeur approchée négative, invalidant totalement le résultat. La méthode peut alors donner une valeur de la racine fort éloignée de la racine réelle. Il n'existe pas de procédé permettant de corriger universellement ces défauts sans hypothèses supplémentaires sur f.

REMARQUES :

❑ Il peut y avoir plusieurs solutions possibles à l'équation $f(x) = 0$.

❑ L'image $f(\mathrm{I})$ d'un intervalle I n'est pas nécessairement de même nature que I.
Par exemple, prenons $f(x) = \sin(x)$. $\mathrm{I} =]-\pi, \pi[$ est ouvert, mais $f(\mathrm{I}) = [-1, 1]$ est fermé.
On prouvera cependant ci-dessous que l'image d'un segment (intervalle fermé borné) est un segment.

3- Image d'un segment

On appelle **segment** un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION

Soit f continue sur un segment $[a,b]$*. Alors* $f([a,b])$ *est un segment* $[c,d]$.

On sait déjà que $f([a,b])$ est un intervalle. Il suffit de montrer que f admet un maximum d et un minimum c.

Démonstration 1 :

Cette démonstration procède par dichotomie, et utilise la propriétés des segments emboîtés (voir L1/SUITES.PDF) .

Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Divisons le segment $[a_0, b_0]$ en deux $[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]$. Le nombre Sup $\{f(x), x \in [a_0, b_0]\}$ est égal au plus grand des deux nombres Sup $\{f(x), x \in [a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}]\}$ et Sup $\{f(x), x \in [\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0]\}$. Nous appelons $[a_1, b_1]$ celui des deux intervalles pour lequel f possède le même Sup que sur l'intervalle $[a_0, b_0]$ tout entier. On a donc :

$[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ (et donc $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$)

$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ (longueur du segment $[a_1, b_1]$)

Sup $\{f(x), x \in [a_1, b_1]\}$ = Sup $\{f(x), x \in [a, b]\}$

La construction de $[a_0, b_0]$ à $[a_1, b_1]$ peut évidemment être itérée, conduisant à une suite décroissante de segments $[a_n, b_n]$ telle que :

$a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$

$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$

Sup $\{f(x), x \in [a_n, b_n]\}$ = Sup $\{f(x), x \in [a, b]\}$

Les suites (a_n) et (b_n) forment deux suites adjacentes (voir L1/SUITES.PDF), qui convergent donc vers une limite commune c. Nous allons montrer que $f(c)$ est le maximum de la fonction f sur $[a, b]$. En effet, soit ε strictement positif. f étant continue, il existe α strictement positif tel que, pour x élément de $]c - \alpha, c + \alpha[$, on a :

$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$

Pour n assez grand, $[a_n, b_n]$ est inclus dans $]c - \alpha, c + \alpha[$. Les $f(x)$ pour x décrivant $[a_n, b_n]$ sont donc majorés par $f(c) + \varepsilon$. Il en résulte que :

Sup $\{f(x), x \in [a, b]\}$ = Sup $\{f(x), x \in [a_n, b_n]\} \leq f(c) + \varepsilon$

Par ailleurs, Sup $\{f(x), x \in [a, b]\}$ est plus grand que $f(c)$. Donc :

$\forall \varepsilon > 0, f(c) \leq$ Sup $\{f(x), x \in [a, b]\} \leq f(c) + \varepsilon$

L'inégalité ne peut avoir lieu pour tout ε positif que si Sup $\{f(x), x \in [a, b]\} = f(c)$ qui est bien le maximum de la fonction.

On procède de même pour le minimum.

Démonstration 2 :

Cette démonstration utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir L1/SUITES.PDF).

Soit d = Sup $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, éventuellement infini. Il existe une suite (x_n) de $[a, b]$ tel que $f(x_n)$ tend vers d (une des propriétés de la borne supérieure). En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass au segment $[a, b]$, on extrait de (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers l. Alors

$(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(l)$, mais continue également à converger vers d, donc $d = f(l)$, ce qui signifie que d est un maximum atteint au point l. On opère de même pour le minimum.

4- Continuité et monotonie

On rappelle qu'une fonction monotone admet une limite strictement à gauche et à droite en chaque point.

THEOREME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. *Il y a équivalence entre :*

(i) *f est strictement monotone sur* I.

(ii) *f est bijective de* I *sur* f(I).

Dans ce cas, f^{-1} *est continue et strictement monotone.* I *et* f(I) *sont de même nature.*

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii)

f est évidemment surjective sur f(I), i.e. tout élément de f(I) est l'image par f d'un élément de I. Par ailleurs, une fonction strictement monotone est injective. En effet, soit $x \neq y$. On a par exemple $x < y$. Donc $f(x) < f(y)$ si f est strictement croissante, et $f(x) > f(y)$ si f est strictement décroissante. Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$. Ainsi, tout élément de f(I) est l'image d'un et d'un seul élément de I. f est bijective.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i)

Par l'absurde, si f n'est pas strictement monotone, on a :

$\exists\, x < y$, $f(x) \leq f(y)$ (f n'est pas strictement décroissante)

$\exists\, x' < y'$, $f(x') \geq f(y')$ (f n'est pas strictement croissante).

On a en fait des inégalités strictes en raison de l'injectivité. Soit :

$g(t) = f(x + t(x' - x)) - f(y + t(y' - y))$.

Alors :

g est définie, continue sur $[0, 1]$

$g(0) = f(x) - f(y) < 0$

$g(1) = f(x') - f(y') > 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c élément de $]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$

$\Rightarrow \quad f(x + c(x' - x)) = f(y + c(y' - y))$

$\Rightarrow \quad x + c(x' - x) = y + c(y' - y)$ car f est injective.

$\Rightarrow \quad (x - y)(1 - c) = c(y' - x')$

Ceci est impossible car le premier membre est strictement négatif, alors que le second membre est strictement positif.

Montrons que f^{-1} est strictement monotone. Supposons par exemple f strictement croissante. Soit x et y élément de f(I) tels que $x < y$. Alors :

$\exists\, a \in$ I, $\exists\, b \in$ I, $x = f(a)$, $y = f(b)$, $f(a) < f(b)$

On a donc $a < b$ car $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

donc $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. La démonstration si f est strictement décroissante est analogue.

Montrons que f^{-1} est continue. Supposons f^{-1} croissante. La démonstration en cas de décroissance est analogue. Posons $g = f^{-1}$ pour alléger les notations. L'image de g est égale à I, qui est un intervalle. Par ailleurs, g étant monotone, cette fonction admet une limite à droite et à gauche en chaque point x_0. On a :

$g(x_0^-) \leq g(x_0) \leq g(x_0^+)$

Il suffit de montrer que les limites sont égales à $g(x_0)$. Faisons-le pour la limite à gauche, le cas de la limite à droite étant analogue. Si on avait $g(x_0^-) < g(x_0)$, alors il existerait t tel que :

$g(x_0^-) < t < g(x_0)$

Pour $x < x_0 < y$, on a $g(x) \leq g(x_0^-) < t < g(x_0) \leq g(y)$.
Ce qui prouve que t n'est l'image par g d'aucun réel. Ceci est en contradiction avec le fait que l'image de g est un intervalle.

On raisonne d'une façon analogue pour un point x_0 borne de l'intervalle de définition de g.

Pour f croissante, on a :

$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
$f(]a, b[) =]f(a^+), f(b^-)[$
$f([a, b[) = [f(a), f(b^-)[$
$f(]a, b]) =]f(a^+), f(b)]$

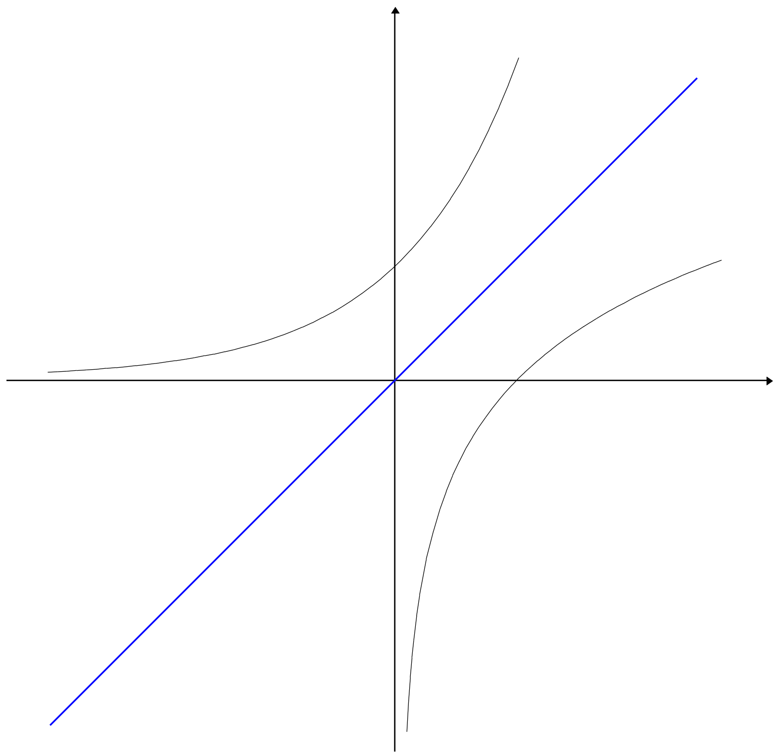
Pour f décroissante, on a :

$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$
$f(]a, b[) =]f(b^-), f(a^+)[$
$f(]a, b]) = [f(b), f(a^+)[$
$f([a, b]) =]f(b^-), f(a)]$

La représentation graphique de f^{-1} est le symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$. En effet :

(x, y) appartient au graphe de f^{-1}
$\Leftrightarrow$ $y = f^{-1}(x)$
$\Leftrightarrow$ $x = f(y)$
$\Leftrightarrow$ (y, x) appartient au graphe de f

Ainsi, on passe du graphe de f au graphe de f^{-1} en échangeant les rôles des deux coordonnées, ce qui revient à faire une symétrie par rapport à la première bissectrice. Ci-dessous, le graphe de l'exponentielle et du logarithme :



V : Equations fonctionnelles

Une **équation fonctionnelle** est une équation dont l'inconnue est une fonction. Dans tout ce paragraphe, les fonctions sont supposées continues sur $\mathbb{R}$, ou, à défaut sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^*$.

1- $f(x + y) = f(x) + f(y)$

PROPOSITION

Les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *sont les fonctions linéaires.*

Démonstration :

❑ Pour tout réel a, la fonction $f(x) = ax$ vérifie l'équation fonctionnelle.

Inversement, soit f une fonction continue vérifiant cette équation. Posons $a = f(1)$. On a :

(i) $f(0) = 0$. Il suffit de prendre $x = y = 0$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. Cela se prouve aisément par récurrence.

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. Pour $n > 0$, on a en effet :

$$0 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx) = nf(x) + f(-nx)$$

donc $f(-nx) = -nf(x)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = an$. Il suffit de prendre $x = 1$ dans iii)

(v) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{a}{n}$. Il suffit en effet de prendre $x = \frac{1}{n}$ dans iii). On a alors :

$$a = f(1) = f(\frac{n}{n}) = nf(\frac{1}{n})$$

(vi) $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$. En effet, si $x = \frac{n}{q}$, on a, d'après iii) et iv) :

$$f(x) = f(\frac{n}{q}) = nf(\frac{1}{q}) = \frac{an}{q} = ax$$

(vii) $\forall\ x \in \mathbf{R}$, $f(x) = ax$. Il suffit de prendre une suite de rationnels convergeant vers x, et d'utiliser la propriété vi) et la continuité de f pour effectuer un passage à la limite.

2- $f(x + y) = f(x)f(y)$

PROPOSITION

Les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$ sont :

la fonction identiquement nulle

les fonctions exponentielles a^x, $a > 0$.

<u>Démonstration</u> :

❑ Pour tout $a > 0$, $f(x) = a^x$ vérifie l'équation fonctionnelle.

Inversement, soit f une fonction continue vérifiant cette équation. Si f s'annule en un point x, alors f est identiquement nulle. En effet, pour tout t :

$$f(t) = f(t - x + x) = f(t - x)f(x) = 0$$

Nous supposerons donc que f ne s'annule en aucun x. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant, et comme $f(2) = f(1)^2 > 0$, on en déduit que f est strictement positive. Posons $g(x) = \ln(f(x))$. g est continue et vérifie : $g(x + y) = g(x) + g(y)$. D'après le V-1), il existe donc α tel que $g(x) = \alpha x$. Donc $f(x) = \exp(\alpha x) = a^x$ avec $a = \exp(\alpha)$.

3- $f(xy) = f(x) + f(y)$

PROPOSITION

Les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ sont :

Si f est définie sur $\mathbf{R}$, c'est la fonction identiquement nulle

Si f est définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ ou sur $\mathbf{R}^*$, alors $f(x) = a \ln(|x|)$, $a \in \mathbf{R}$

<u>Démonstration</u> :

❑ Pour tout réel a, $f(x) = a \ln(|x|)$ vérifie l'équation fonctionnelle.

Inversement, soit f une fonction continue vérifiant cette équation. Posons $g(x) = f(e^x)$. g est continue et vérifie $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Donc, d'après le V-1), il existe a tel que $g(x) = ax = f(e^x)$. Donc, pour $x > 0$, $f(x) = a \ln(x)$.

f ne peut être définie continue sur $\mathbf{R}$, sauf si $a = 0$.

Il se peut que f soit définie continue sur $\mathbf{R}^*$. Si $b = f(-1)$, on a alors $0 = f(1) = f((-1)^2) = 2f(-1)$ donc $f(-1) = 0$. Pour $x > 0$, on alors :

$$f(-x) = f(-1) + f(x) = f(x). \text{ Ainsi, } f(x) = f(|x|) = a\ln|x|$$

4- $f(xy) = f(x)f(y)$

PROPOSITION

Les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$ sont :

la fonction identiquement nulle

$f(x) = |x|^\mu$, $\mu \in \mathbf{R}$

$f(x) = sg(x)\,|x|^\mu$ *où* $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ (*fonction* **signe**)

Démonstration :

❑ Les trois types de fonctions données dans la proposition vérifient l'équation fonctionnelle. Inversement, soit f continue vérifiant cette équation. Posons $g(x) = f(e^x)$. On a alors $g(x + y) = g(x)g(y)$. Donc, d'après le V-2), $g = 0$ ou bien il existe $a > 0$ tel que $g(x) = a^x$.

i) Dans le premier cas, $f = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour $x = 0$, on a $f(0) = f(0)f(1) = 0$, et pour $x > 0$, $f(-x) = f(-1)f(x) = 0$. f est identiquement nulle.

ii) Dans le second cas, pour $x > 0$, $f(x) = g(\ln(x)) = a^{\ln(x)} = x^{\ln(a)} = x^\mu$ avec $\mu = \ln(a)$. Cette fonction ne peut être définie et continue en 0 que si $\mu \geq 0$. Si f est définie sur $\mathbb{R}^*$, alors :

$f(1) = 1 = f((-1)^2) = f(-1)^2$, donc $f(-1) = 1$ ou -1.

Si $f(-1) = 1$, alors, pour $x > 0$, $f(-x) = f(-1)f(x) = x^\mu$ et donc, pour tout x non nul, $f(x) = |x|^\mu$

Si $f(-1) = -1$, alors, pour $x > 0$, $f(-x) = -x^\mu$, et donc, pour tout x non nul, $f(x) = \mathrm{sg}(x)\,|x|^\mu$, fonction qui vérifie bien la relation.

Annexe : fonction continue sur $\mathbb{Q}^c$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$

Cette annexe a pour but de montrer que la notion de continuité en un point peut se révéler complexe. On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \text{ si } x = \dfrac{p}{q} \text{ rationnel non nul irréductible, } q > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

Alors f est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs. En effet :

❑ Soit x_0 rationnel. Alors $\mathbb{Q}^c$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite a_n d'irrationnels convergeant vers x_0. Mais $f(a_n) = 0$ donc la limite de cette suite est différente de $f(x_0)$ et f ne peut être continue en x_0.

❑ Soit x_0 irrationnel. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe q entier positif tel que $\dfrac{1}{q}$ soit inférieur à ε. Considérons les fractions de la forme $\dfrac{p}{q!}$ et prenons p l'entier tel que :

$$\frac{p}{q!} < x_0 < \frac{p+1}{q!}$$

(p est la partie entière de $x_0q!$)

Tout x élément de l'intervalle $\mathrm{I} = \left]\dfrac{p}{q!}, \dfrac{p+1}{q!}\right[$ vérifie :

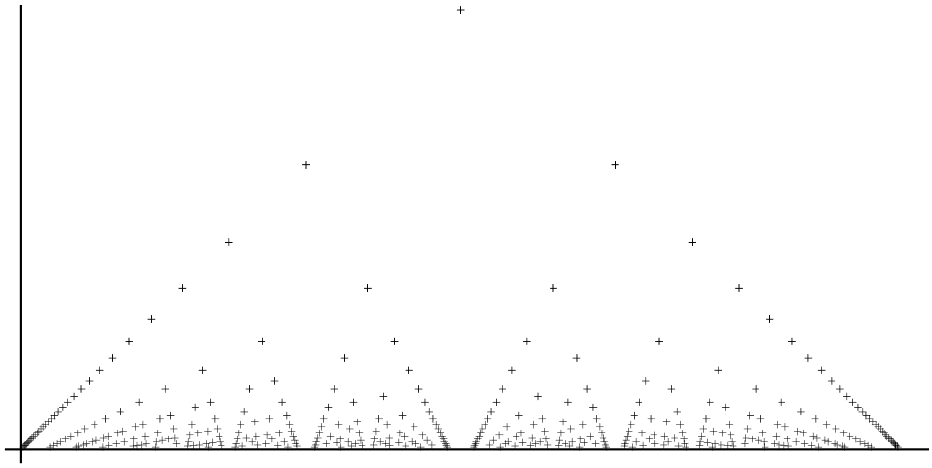
ou bien x est irrationnel et $f(x) = 0$

ou bien x est rationnel, mais son dénominateur est supérieur à q. En effet, si $x = \dfrac{a}{b}$ avec $\dfrac{p}{q!} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{p+1}{q!}$, on a, en multipliant par $q!$: $p < \dfrac{aq!}{b} < p + 1$ donc $\dfrac{aq!}{b}$ ne peut être entier donc b est supérieur à q sinon la fraction $\dfrac{aq!}{b}$ pourrait se simplifier par b. Donc :

$$0 < f(x) < \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

On a trouvé un voisinage de x_0 tel que, pour tout x de ce voisinage, $f(x)$ appartienne à $]f(x_0) - \varepsilon , f(x_0) + \varepsilon [$. La continuité est donc prouvée.

Voici le graphe de f :



Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x))^{1/x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[4]{16x^4+8x^3+1} - \sqrt[3]{8x^3+1}$

Exo.2) Donner un équivalent de $\exp(\sqrt{x^2+1}) - \exp(\sqrt{x^2-1})$ au voisinage de l'infini.

Exo.3) a) Soient a et b deux réels strictement positifs. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

b) Soit a un réel strictement positif. Calculer $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}$.

Exo.4) a) Soit f continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe c tel que $f(c) = c$.

b) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Montrer qu'il existe c tel que $f(c) = c$.

c) Donner un exemple de fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]$, telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq x$.

Exo.5) Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$ telle que : $\exists k \in \mathbf{R}^{+*}$ tel que $\forall x, f(x) = kf(x+1)$
Prouver qu'il existe g continue périodique de période 1 et α réel tels que : $\forall x, f(x) = e^{\alpha x}g(x)$

Exo.6) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$ possède une unique racine positive a_n. Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Exo.7) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout a réel, on pose $f_a(x) = f(a + x)$. On suppose qu'il existe a et b tels que f_a soit paire et f_b impaire. Montrer que f est périodique.

Exo.8) Soit f une fonction définie sur [0, 1] telle que :

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$\forall\, x \in [0, 1],\ \forall\, y \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

a) Montrer que : $\forall\, x \in [0, 1],\ |f(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

b) Montrer que : $\forall\, x \in [0, 1],\ \forall\, y \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}$

Exo.9) Trouver trois fonctions f, g et h telles que :

$f \geq 0$ sur [0, 1] et continue
$g \geq 0$ sur [0, 1] et continue
$h \geq 0$ sur [0, 1] et discontinue en une infinité de points

et $f = g \times h$.

Exo.10) a) Soit f continue sur [0,1] et n élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c élément de $[0,1 - \frac{1}{n}]$ tel que : $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$

b) Donner une valeur de $a \in\ ]0, 1[$ et une fonction continue f pour laquelle l'affirmation suivante est fausse :

$$\exists\, c \in [0, 1 - a] \text{ tel que } f(c) = f(c + a)$$

Exo.11) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, J et K deux segments tels que $K \subset f(J)$. Montrer qu'il existe un segment $J_0 \subset J$ tel que $K = f(J_0)$.

Exo.12) On définit la suite de fonctions (g_n) par :

$g_1 : x \to x^2 + x$
$g_n : x \to g_{n-1}(x)^2 + x$ pour tout $n > 1$.

a) Montrer que, pour tout n, g_n est un polynôme.
b) Montrer que g_n s'annule dans l'intervalle $]-2, -1]$
c) Montrer que g_n est strictement positive sur $]-\infty, -2]$
d) On note a_n la plus petite racine réelle du polynôme g_n. Montrer que la suite (a_n) converge.
e) Quelle est sa limite ?

Exo.13) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En 1821, Cauchy démontrait[1] que :

$$Si \lim_{x \to +\infty} f(x + 1) - f(x) = 0,\ alors \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Voici le raisonnement de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Pour h suffisamment grand, on aura pour tout n, $f(h + n) - f(h + n - 1)$ compris entre $-\varepsilon$ et ε, donc $f(h + n) - f(h)$ compris entre $-n\varepsilon$ et $n\varepsilon$ et donc $\dfrac{f(h + n) - f(h)}{n}$ compris entre $-\varepsilon$ et ε. Posons alors $x = h + n$. On en déduit que $\dfrac{f(x) - f(h)}{x - h} = \alpha$ avec α

[1] Augustin-Louis Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, *Analyse algébrique*, Editions Jacques Gabay (1989), Ière partie, ch. II, th.1, p.48.

compris entre $-\varepsilon$ et ε, d'où $f(x) = f(h) + \alpha(x - h)$ et donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(h)}{x} + \alpha(1 - \frac{h}{x})$, donc en faisant tendre x vers l'infini, h étant fixé, $\frac{f(x)}{x}$ a une limite comprise entre $-\varepsilon$ et ε. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers l'infini est nulle.

Qu'en pensez-vous ?

2- Solutions

Sol.1) a) Au voisinage de 0, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ et $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{3}{2}$

b) $\ln((1 + \sin(x))^{1/x}) = \frac{\ln(1+\sin(x))}{x}$

Or, quand x tend vers 0, $\ln(1 + \sin(x)) \sim \sin(x) \sim x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{1/x} = e$.

Ci-dessus, on a utilisé le fait que $\ln(1 + u) \sim u$ quand u tend vers 0, avec $u = \sin(x)$. Par contre, il est incorrect, sans justification supplémentaire, d'écrire $\ln(1 + \sin(x)) \sim \ln(1 + x) \sim x$ même si le résultat final est le même, car pour ce faire, on a ajouté 1 aux deux membres de $\sin(x) \sim x$ mais cet ajout ne conduit qu'à $1 \sim 1$. De plus, on a effectué ensuite une composition d'équivalent par la fonction ln, mais les équivalents sont incompatibles avec la composition des fonctions. Il convient donc de se débarrasser en tout premier lieu du ln avant de poursuivre les calculs.

c) Quand x tend vers 0, $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1) \sim \cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x))^{1/x} = 1$.

d) Quand x tend vers ∞, on a $16x^4 + 8x^3 + 1 \sim 16x^4$ et $8x^3 + 1 \sim 8x^3$ donc :

$$\sqrt[4]{16x^4 + 8x^3 + 1} \sim \sqrt[3]{8x^3 + 1} \sim 2x$$

En utilisant $(1 + h)^\alpha - 1 \sim \alpha h$ quand h tend vers 0, considérons maintenant :

$$\sqrt[4]{16x^4 + 8x^3 + 1} - 2x = 2x\left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{16x^4}} - 1\right) \sim 2x \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{16x^4}\right) \sim \frac{1}{4}$$

et $$\sqrt[3]{8x^3 + 1} - 2x = 2x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8x^3}} - 1\right) \sim 2x \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{8x^3} \sim \frac{1}{12x^2} = o\left(\frac{1}{4}\right)$$

donc $\sqrt[4]{16x^4 + 8x^3 + 1} - \sqrt[3]{8x^3 + 1} \sim \frac{1}{4}$

Sol.2) La fonction étant paire, on peut supposer $x \geq 0$. On a :

$$\exp(\sqrt{x^2+1}) - \exp(x) = e^x\,(\exp(\sqrt{x^2+1} - x) - 1)$$

or $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$

donc $\exp(\sqrt{x^2+1} - x) - 1 \sim \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \sim \frac{1}{2x}$

donc $\exp(\sqrt{x^2+1}) - \exp(x) \sim \dfrac{e^x}{2x}$

On vérifiera de même que $\exp(\sqrt{x^2-1}) - \exp(x) \sim -\dfrac{e^x}{2x}$

Donc, par différence, les deux équivalents trouvés étant de même ordre :

$$\exp(\sqrt{x^2+1}) - \exp(\sqrt{x^2-1}) \sim \frac{e^x}{x}$$

Sol.3) a) On remarque que $\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. L'expression $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ donne une forme indéterminée du type 1^∞. Son logarithme vaut :

$$n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right) = n\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)$$

$$\sim n\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right) \qquad \text{en utilisant } \ln(1+h) \sim h \text{ quand } h \text{ tend vers } 0$$

$$\sim n\,\frac{(\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)}{2}$$

$$\sim n\,\frac{(\exp(\ln(a)/n)-1)+(\exp(\ln(b)/n)-1)}{2}$$

or $\qquad \exp\left(\dfrac{\ln(a)}{n}\right) - 1 \sim \dfrac{\ln(a)}{n} \qquad$ en utilisant $e^h - 1 \sim h$ quand h tend vers 0.

De même $\exp\left(\dfrac{\ln(b)}{n}\right) - 1 \sim \dfrac{\ln(b)}{n}$. Les deux équivalents étant de même ordre, on peut les ajouter. Donc :

$$n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right) \sim \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$$

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right) = \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2} = \ln(\sqrt{ab})$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$

b) Numérateur et dénominateur s'annulent en $x = a$. Supposons $a \neq e$ et $\neq \dfrac{1}{e}$. La dérivée de $x \to x^a - a^x$ est $ax^{a-1} - \ln(a)a^x$ dont la valeur en $x = a$ est $a^a(1-\ln(a))$, non nulle. Donc :

$$x^a - a^x \sim (x-a)a^a(1-\ln(a))$$

De même, la dérivée de $x \to x^x - a^a$ est $(1+\ln(x))x^x$ dont la valeur en a est $a^a(1+\ln(a))$ non nulle, donc :

$$x^x - a^a \sim (x-a)a^a(1+\ln(a))$$

Donc $\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} \sim \dfrac{1-\ln(a)}{1+\ln(a)}$. C'est la limite cherchée.

Si $a = e$, la dérivée en $x = a$ de $x \to x^a - a^x$ est nulle donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a-a^x}{x-a} = 0$ donc $x^a - a^x = o(x-a)$.

Par contre, $x^x - a^a$ est du même ordre que $x - a$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a} = 0$.

Si $a = \frac{1}{e}$, c'est cette fois $x^x - a^a$ qui est négligeable devant $x - a$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a} = +\infty$.

Sol.4) a) La fonction $x \to f(x) - x$ vaut $f(0) \geq 0$ pour $x = 0$ et $f(1) - 1 \leq 0$ pour $x = 1$. On applique le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists\ c \in [0, 1]$, $f(c) - c = 0$.
b) Soit $A = \{x \in [0, 1], f(x) \geq x\}$. A est non vide (il contient 0) et majoré (par 1). Il admet donc une borne supérieure c.
Si $c = 0$, alors $\forall\ x > c = 0$, $x \notin A$ donc $f(x) < x$, mais f étant croissante à valeurs dans $[0, 1]$, on a aussi $0 \leq f(0) \leq f(x)$. Donc $\forall\ x > 0$, $0 \leq f(0) < x$, donc, en faisant tendre x vers 0, $f(0) = 0$.
Si $c = 1$, alors il existe une suite (a_n) dans A qui converge vers cette borne supérieure 1. On a alors : $\forall\ n$, $f(a_n) \geq a_n$. Mais f étant croissante à valeurs dans $[0, 1]$, on a aussi $1 \geq f(1) \geq f(a_n)$, donc $1 \geq f(1) \geq a_n$. En passant à la limite, on obtient $f(1) = 1$.
Si $0 < c < 1$, on adapte les deux raisonnements précédents. Il existe une suite (a_n) de A qui converge vers la borne supérieure c, et pour tout $x > c$, $x \notin A$, donc :

$\forall\ n$, $a_n \leq c$ et $f(a_n) \geq a_n$. Comme f est croissante, on a aussi $f(c) \geq f(a_n) \geq a_n$.
$\forall\ x > c$, $f(x) < x$. Comme f est croissante, on a aussi $f(c) \leq f(x) < x$

En faisant tendre n vers l'infini et x vers c, on obtient $f(c) \geq c$ et $f(c) \leq c$. Donc $f(c) = c$.
c) f ne doit être ni continue ni croissante. On peut prendre par exemple :

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{3} \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \text{ si } x > \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Sol.5) Considérons la fonction $g(x) = k^x f(x)$. g est continue et périodique de période 1. En effet :

$$g(x + 1) = k^{x+1} f(x + 1) = k^x f(x) = g(x)$$

On a alors $f(x) = e^{\alpha x} g(x)$ en prenant $\alpha = -\ln(k)$.

Sol.6) Pour $n = 1$, l'équation est $x = 1$.
Pour $n = 2$, l'équation est $x^2 = 1 + x$ dont l'unique racine positive est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
Pour $n \geq 3$, 1 n'est pas solution et l'équation équivaut à $x^n = \frac{1 - x^n}{1 - x} \Leftrightarrow x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$. On étudie la fonction $f : x \in [0, +\infty[\to x^{n+1} - 2x^n + 1$. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = (n + 1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}((n + 1)x - 2n)$$

qui est strictement négative sur $]0, \frac{2n}{n + 1}[$ et strictement positive sur $]\frac{2n}{n + 1}, +\infty[$. f est donc d'abord strictement décroissante, passe par un minimum en $\frac{2n}{n + 1} > 1$, puis strictement croissante. Comme $f(1) = 0$, on a nécessairement $f(\frac{2n}{n + 1}) < 0$ sans qu'il soit nécessaire de calculer explicitement cette valeur. On a le tableau de variation suivant :

x	0		1		$2n/(n+1)$		a_n		$+\infty$
f'	|	–	|	–	0	+	|	+	
f	|	↘	0	↘	< 0	↗	0	↗	$+\infty$

Compte tenu de la stricte monotonie de la fonction, il n'y a pas de racine sur $]0, \frac{2n}{n+1}[$ autre que 1, et il y a une racine unique a_n élément de $]\frac{2n}{n+1}, +\infty[$. Remarquons que $f(2) = 1$, donc $a_n < 2$. Ainsi, pour $n \geq 3$, $\frac{2n}{n+1} < a_n < 2$. En passant à la limite, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Sol.7) Pour tout x, $f(a + x) = f(a - x)$ et $f(b + x) = -f(b - x)$, ce qu'on peut écrire également, en renommant les variables : $f(x) = f(2a - x)$ et $f(x) = -f(2b - x)$. Donc :

$$f(x) = -f(2b - x) = -f(2a - 2b + x)$$

Si on applique cette même égalité à $2a - 2b + x$, on obtient :

$$f(2a - 2b + x) = -f(2a - 2b + (2a - 2b + x)) = -f(4a - 4b + x)$$

Finalement :

$$f(x) = f(4a - 4b + x)$$

et la fonction est périodique de période $4a - 4b$.

Sol.8) a) Pour $x \leq \frac{1}{2}$, $|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leq |x - 0| \leq \frac{1}{2}$

Pour $x \geq \frac{1}{2}$, $|f(x)| = |f(x) - f(1)| \leq |x - 1| = 1 - x \leq \frac{1}{2}$

b) Par symétrie, on peut supposer $y \leq x$.

Si $x - y \leq \frac{1}{2}$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \leq \frac{1}{2}$

Si $x - y \geq \frac{1}{2}$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(0)| + |f(0) - f(y)| \leq 1 - x + y \leq \frac{1}{2}$

Sol.9) Par exemple :

$$g(x) = x \sin^2(\frac{1}{x}),$$

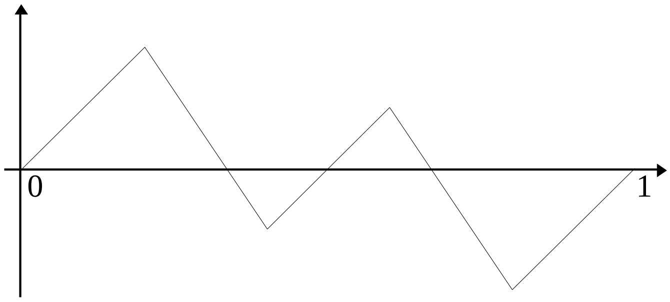
$h(x) = 1 + x\ \mathrm{sg}(\sin(\frac{1}{x}))$ où h est la fonction signe.

$$f(x) = x \sin^2(\frac{1}{x}) + x^2 \sin(\frac{1}{x}) \left|\sin(\frac{1}{x})\right|$$

Sol.10) a) La fonction $c \to f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ s'annule nécessairement, sinon elle est de signe constant et dans ce cas, $f(1) - f(0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n}))$ est non nulle.

b) Prendre $a = \frac{2}{5}$ par exemple et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1-3x}{2} \text{ si } \dfrac{1}{5} \leq x \leq \dfrac{2}{5} \\ x - \dfrac{1}{2} \text{ si } \dfrac{2}{5} \leq x \leq \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{2-3x}{2} \text{ si } \dfrac{3}{5} \leq x \leq \dfrac{4}{5} \\ x - 1 \text{ si } x \geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$



On vérifiera que f est bien continue, et que, pour tout x, $f(x + a) - f(x) = -\dfrac{1}{10} < 0$.

Sol.11) Soient c et d tels que $K = [c, d]$. Soient a et b éléments de J tels que $c = f(a)$ et $d = f(b)$. On suppose par exemple $a \leq b$, le raisonnement pour $a > b$ étant comparable. Soient :

$M = \text{Inf } \{x \in J, x \geq a \text{ et } f(x) = d\}$

$m = \text{Sup } \{y \in J \cap [a, M], f(y) = c\}$

Comme $\{x \in J, x \geq a \text{ et } f(x) = d\}$ est non vide (il contient b) et minoré par a, M existe et est élément de $[a, b]$. Comme $\{y \in J \cap [a, M], f(y) = c\}$ est non vide (il contient a) et est majoré par M, m existe et est élément de $[a, M]$. Montrons que $J_0 = [m, M]$ répond à la question.
On a $f(M) = d$ car M est la limite d'une suite (x_n) de $\{x \in J, x \geq a \text{ et } f(x) = d\}$. Pour tout n, on a $f(x_n) = d$, et en passant à la limite, f étant continue, $f(M) = d$. On montre de même que $f(m) = c$. On en déduit que $K = [c, d] = [f(m), f(M)] \subset f([m, M]) = f(J_0)$, l'inclusion reposant sur le théorème des valeurs intermédiaires, li'mage de l'intervalle $f([m, M])$ étant un intervalle possédant $f(m)$ et $f(M)$, donc contenant $[f(m), f(M)]$.
Réciproquement, soit $z \in f(J_0)$, et $x \in J_0$, $z = f(x)$. Montrons que $z \in K = [c, d]$. Par l'absurde, supposons que $z > d$. Comme $f(m) \leq d < z = f(x)$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit un élément $y \in [m, x[$ tel que $f(y) = d$. Mais alors $a \leq y < M$ contredisant la définition de M comme borne inférieure de $\{x \in J, x \geq a \text{ et } f(x) = d\}$. On a donc bien $z \leq d$. On montre de même que $z \geq c$.
Ainsi $K = f(J_0)$.

Sol.12) a) Par récurrence.
b) Montrer par récurrence que :

$\forall\, n, g_n(-2) = 2$

$\forall\, p$ impair, $g_p(-1) = 0$

$\forall\, p$ pair, $g_p(-1) = -1$.

Dans ce dernier cas, on applique le théorème des valeurs intermédiaires dans l'intervalle $[-2, -1]$.
c) Montrons par récurrence que $x \leq -2 \Rightarrow g_n(x) \geq -x > 0$. C'est vrai pour $n = 1$. Supposons que ce soit vrai au rang $n - 1$. On a alors

$g_{n-1}(x) \geq -x > 0$

donc $g_{n-1}(x)^2 \geq x^2$

donc $g_n(x) \geq x^2 + x = g_1(x) > 0$.

d) Il résulte de b) et c) que a_n appartient à $]-2, -1]$. Montrons que (a_n) décroît. Il suffit de montrer que g_n s'annule entre -2 et a_{n-1}, ou que $g_n(a_{n-1}) < 0$ car on aura alors $a_n \in [-2, a_{n-1}]$ et donc $a_n \leq a_{n-1}$. Or, puisque $g_{n-1}(a_{n-1}) = 0$, on a $g_n(a_{n-1}) = a_{n-1} < 0$.
(a_n) est décroissante minorée par -2 donc converge vers une limite l élément de $[-2, -1]$
e) Montrons que la limite l cherchée vaut -2. Raisonnons par l'absurde en supposant $l > -2$. On a donc $g_n > 0$ sur $[-2, l]$, puisque $-2 < l < a_n$, que $g(-2) > 0$ et que a_n est la première racine de g_n.
Nous allons maintenant majorer g_n par un polynôme du second degré sur un intervalle inclus dans $[-2, l]$, puis montrer que, pour n assez grand, ce polynôme, et donc g_n, y prend des valeurs négatives, ce qui donnera une contradiction.
Déterminons trois suites (b_n), (c_n) et (d_n) telles que :

$\forall\, n \geq 1, \forall\, h \in [0, d_n] \cap [0, l + 2]$, on ait :

$g_n(-2 + h) \leq 2 - c_n h + b_n h^2$

Pour $n = 1$, on a :

$g_1(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 2 + h = 2 - 3h + h^2$

donc l'égalité (et donc l'inégalité $\leq$ aussi) est vérifiée pour $b_1 = 1$, $c_1 = 3$ et $d_1 > 0$ quelconque.
Supposons les suites b, c, d définie jusqu'au rang n et la relation vérifiée au rang n. Alors, pour tout h dans $[0, d_n] \cap [0, l + 2]$, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(-2 + h) &= g_n(-2 + h)^2 - 2 + h \\ &\leq (2 - c_n h + b_n h^2)^2 - 2 + h \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\forall\, h \in [0, l + 2]$, $g_n(-2 + h) \geq 0$ et a fortiori pour $h \in [0, d_n] \cap [0, l + 2]$, ainsi que la majoration de g_n par le polynôme $2 - c_n h + b_n h^2$. Donc :

$g_{n+1}(-2 + h) \leq 2 - (4c_n - 1)h + (4b_n + c_n^2)h^2 - 2c_n b_n h^3 + b_n^2 h^4$

Prenons donc $c_{n+1} = 4c_n - 1$ et $b_{n+1} = 4b_n + c_n^2$. Le lecteur pourra vérifier qu'alors, les suites b et c définies par leur condition initiale et les deux relations de récurrences ont pour expression générale :

$$\forall\, n \geq 1,\ b_n = \frac{4^{2n} - 1}{27} + \frac{n4^n}{9} \text{ et } c_n = \frac{2 \times 4^n + 1}{3}$$

Pour montrer que $g_{n+1}(-2 + h) \leq 2 - c_{n+1}h + b_{n+1}h^2$, il suffit de déterminer $d_{n+1} > 0$ tel que $-2c_n b_n h^3 + b_n^2 h^4 \leq 0$ si $h \in [0, d_{n+1}]$. Or :

$$\begin{aligned} -2c_n b_n h^3 + b_n^2 h^4 \leq 0 &\Leftrightarrow -2c_n + b_n h \leq 0 \\ &\Leftrightarrow b_n h \leq 2c_n. \end{aligned}$$

Pour cela, il suffit que :

$b_n\, d_{n+1} \leq 2c_n$

et il suffit donc de prendre $d_{n+1} = \dfrac{2c_n}{b_n} \sim \dfrac{36}{4^n}$.

Ainsi, nous avons pu majorer g_n sur un voisinage à droite de -2. Calculons maintenant ce majorant pour $h = \dfrac{9}{4^n}$. Remarquons que h appartient à $[0, d_{n+1}] \cap [0, l + 2]$ pour n assez grand. On a alors :

$$2 - c_n h + b_n h^2 = 2 - c_n \frac{9}{4^n} + b_n \frac{9^2}{4^{2n}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $c_n \dfrac{9}{4^n}$ tend vers 6, et $b_n \dfrac{9^2}{4^{2n}}$ tend vers 3. $2 - c_n h + b_n h^2$ tend donc vers $2 - 6 + 3 = -1$, or ceci est impossible car g_n est positif. La contradiction obtenue permet de rejeter l'hypothèse $l > -2$. Conclusion : la limite cherchée est -2.

Sol.13) La conclusion est fausse, comme le montre l'exemple suivant. Prenons f périodique de période 1, nulle sur $]0, 1]$ sauf aux points $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, pour lesquels $f(\dfrac{1}{n}) = n$. On a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$ puisque f est 1-périodique. Mais pour $x_n = n + \dfrac{1}{n}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(n + \tfrac{1}{n}) = f(\tfrac{1}{n}) \quad \text{par périodicité de } f \\ &= n \end{aligned}$$

donc $\dfrac{f(x_n)}{x_n} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

Reprenons plus soigneusement l'argument de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$, il existe $A \geq 0$ tel que, pour tout $h \geq A$, $|f(h+1) - f(h)| < \varepsilon$, et a fortiori, pour tout entier n strictement positif, $|f(h+n) - f(h+n-1)| < \varepsilon$ (vrai car $h + n - 1 \geq h > A$). En sommant de 1 à n, on obtient bien $|f(h+n) - f(h)| < n\varepsilon$. Prenons maintenant $x > A$, posons n le plus grand entier tel que $x - n \geq A$. Posons $h = x - n \geq 0$. On a $x = h + n$ et comme $|f(h+n) - f(h)| < n\varepsilon$, on a $|f(x) - f(h)| < n\varepsilon$. Donc :

$$|f(x)| \leq |f(h)| + |f(x) - f(h)| < |f(h)| + n\varepsilon$$

donc $$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{f(h)}{x}\right| + \frac{n\varepsilon}{x} < \left|\frac{f(h)}{x}\right| + \varepsilon \qquad \text{car } n \leq x$$

Mais on ne peut rien conclure sur la limite de $\left|\dfrac{f(h)}{x}\right|$ car h dépend de x. Dans notre contre-exemple, on peut prendre $A = 0$, $x = x_n = n + \dfrac{1}{n}$, $h = \dfrac{1}{n}$, $\left|\dfrac{f(h)}{x}\right| = \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

C'est Giuseppe Peano[2] qui releva l'erreur de Cauchy en 1884. Il suffit de rajouter l'hypothèse f bornée pour pouvoir conclure. En effet, si M est un majorant de $|f|$, on a maintenant :

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{x}\right| &\leq \frac{M}{x} + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon \text{ pour tout } x \geq \mathrm{Max}(A, \frac{M}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

◆

---

[2] A. Genocchi, G. Peano, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, Fratelli Bocca, Roma, (1884), N67, p.XII, p.25.