ESPACES VECTORIELS

PLAN

I : Opérations sur les vecteurs
- 1) Définition et exemples
- 2) Sous-espaces vectoriels
- 3) Sous-espace vectoriel engendré par une partie
- 4) Dépendance et indépendance linéaire.
- 5) Bases
- 6) Relation de liaison

II : Espace de dimension finie
- 1) Théorème fondamental
- 2) Théorème de la dimension des bases
- 3) Théorème de la base incomplète
- 4) Dimension d'un sous-espace vectoriel
- 5) Rang d'un système de vecteurs

III : Somme de sous-espaces vectoriels
- 1) Somme de deux sous-espaces vectoriels
- 2) Somme directe de deux sous-espaces vectoriels
- 3) Supplémentaires
- 4) Cas de la dimension finie
- 5) Somme de plusieurs sous-espaces

Exercices
- 1) Enoncés
- 2) Solutions

I : Opérations sur les vecteurs

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et est appelé corps des réels ou corps des complexes. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**. Nous les noterons généralement par des lettres grecques.

1- Définition et exemples

La notion d'espace vectoriel a pour but de généraliser les ensembles suivants :

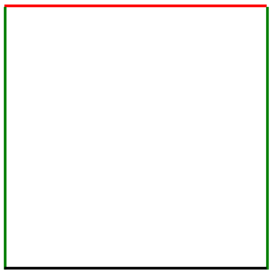
$\mathbb{C}$ considéré comme plan vectoriel des complexes sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ espace de dimension 2 et 3 sur le corps des réels, et plus généralement $\mathbb{K}^n$, espace de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, constitué de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{K}$.

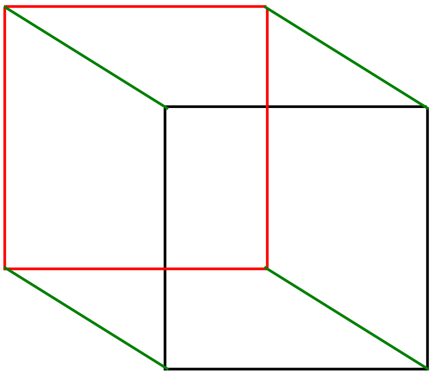
En ce qui concerne les dimensions supérieures à 3, on pourra réfléchir à la notion d'hypercube de dimension 4, d'autant plus facilement qu'on réalisera que les cubes de dimension 3 sont représentés sans difficulté sur un tableau de dimension 2 :

Partant d'un point translaté d'une longueur donnée, on obtient un segment.

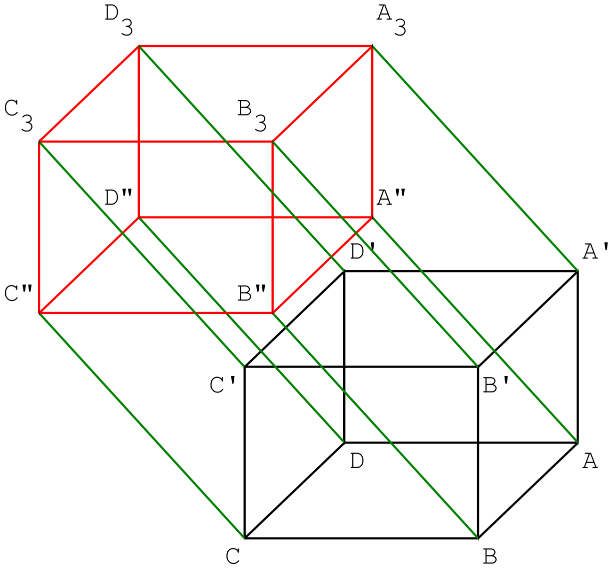
Ce segment, translaté dans une direction orthogonale de la même longueur, donne un carré.



Ce carré, translaté dans une troisième direction, orthogonale aux deux précédentes, donne un cube.



Ce cube, translaté dans une quatrième direction, orthogonale aux trois précédentes, donne un hypercube.



Les objections relatives au fait que cette quatrième dimension n'existe pas ne sont pas recevables. En effet, aucune objection n'est faite en général lors de la construction du cube sur la surface plane constituée d'une feuille de papier ni sur le fait que tous les angles de la figure ainsi tracée sont droits. L'argument consistant à dire que, certes, le cube est représenté sur une surface plane, mais qu'il existe une troisième dimension extérieure à cette surface, est un argument recevable, mais autorise également la généralisation suivante : l'hypercube est également représenté sur une surface plane. Il peut être également représenté en perspective dans notre espace de dimension 3 (La Grande Arche de la Défense par exemple). Mais ces représentations ne sont que des projections en dimension 2 ou 3 d'un objet quadridimensionnel.

Les structures multidimensionnelles abondent dans le monde mathématique mais également dans le monde réel. Il a existé il y a quelques années un ordinateur parallèle constitué de 65536 processeurs. Ces processeurs étaient reliés entre eux par un cablage correspondant aux arêtes d'un hypercube de dimension 16 (ci-dessus, l'hypercube en dimension 4 donne le plan de cablage d'un ordinateur parallèle à 16 processeurs). Un hypercube de dimension n est l'ensemble des points de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_i = 0$ ou 1. Il y a donc 2^n points. Le nombre a_n d'arêtes vérifie la relation de récurrence :

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$$

à savoir a_{n-1} arêtes du cube initial de dimension $n - 1$, plus les a_{n-1} arêtes du même cube translaté, plus les 2^{n-1} arêtes reliant les sommets correspondant des deux cubes. Par récurrence, on a $a_n = 2^{n-1} n$. Pour notre ordinateur parallèle, il y avait donc 524 288 liaisons entre processeurs.
Le nombre f_n de faces de dimension 2 vérifie la relation :

$$f_n = 2f_{n-1} + a_{n-1} = 2f_{n-1} + (n-1)2^{n-2}$$

à savoir f_{n-1} faces du cube initial de dimension $n - 1$, plus f_{n-1} faces du même cube translaté, plus les faces latérales correspondant aux nouvelles arêtes et qui relient une arête quelconque du premier cube à l'arête correspondante du deuxième cube. Par récurrence, $f_n = n(n-1)2^{n-3}$.
Le nombre d'hyperfaces de dimension $n - 1$ est égal à $2n$. En effet, il y a n directions d'arêtes et chaque direction est perpendiculaire à 2 hyperfaces opposées.

D'autres exemples courants d'espaces vectoriels sont :

les suites : $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ espace vectoriel des suites réelles, sur le corps des réels, ou plus généralement $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ espace des suites à valeurs dans $\mathbf{C}$, sur le corps $\mathbf{C}$.

les fonctions : $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, sur le corps des réels.

les champs scalaires ou vectoriels. Un champ scalaire est défini par la donnée d'une nombre en chaque point (x,y,z) de l'espace, par exemple le champ de température ou le champ de pression. Ce n'est autre qu'une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$. Un champ vectoriel est défini par la donnée d'un vecteur en chaque point de l'espace, par exemple les champs électriques ou magnétiques, le champ des vitesses du vent... Ce n'est autre qu'une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$. L'ensemble des ces fonctions forme un espace vectoriel appelé espace des champs scalaires ou espaces des champs vectoriels. Dans le cas d'un champ magnétique et électrique, il est commode de les unifier en un champ électro-magnétique, fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^6$ qui, à tout point de l'espace de dimension 3, associe le couple du champ électrique et du champ magnétique en ce point.

Voici la définition générale d'un espace vectoriel. Un **espace vectoriel** (E, +, .) est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés **vecteurs** (généralement notés par des lettres latines). Il est lié à un corps de nombres $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et est muni des opérations suivantes :

- une somme + permettant d'ajouter deux vecteurs, et donnant à E une structure de groupe commutatif, à savoir :

$\forall (x, y) \in E \times E,\ x + y = y + x$	(commutativité)
$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E,\ (x + y) + z = x + (y + z)$	(associativité)
$\exists\ 0_E,\ \forall x \in E,\ 0_E + x = x = x + 0_E$	(existence du **vecteur nul**, neutre pour l'addition)
$\forall x \in E,\ \exists y,\ x + y = y + x = 0_E$	(existence d'un symétrique y de x. On note $y = -x$)

On pourra vérifier en exercice à partir des axiomes ci-dessus que le neutre pour l'addition est unique, ainsi que le symétrique de tout élément.

- un produit . permettant de multiplier un vecteur par un scalaire et vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \forall y \in E$

(i) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$

(ii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$

(iii) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

(iv) $1.x = x$ où 1 est le scalaire neutre du produit de $\mathbb{K}$

Il est facile de vérifier que $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des suites ou l'ensemble des fonctions constituent un espace vectoriel. En fait, la définition ne sert que pour ces ensembles de base. D'autres critères sont ensuite utilisés pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, obtenu comme sous-espace vectoriel des espaces précédents.

En ce qui concerne la règle (iv), il faut bien prendre conscience qu'elle ne va pas de soi. 1 est le neutre du produit de $\mathbb{K}$, il n'y a aucune raison pour qu'il adopte une attitude comparable en ce qui concerne le produit d'un vecteur par 1. C'est le seul résultat d'un produit par un scalaire qui est fixé par les axiomes.

EXEMPLES :

❑ Munissons $\mathbb{R}^2$ des lois suivantes :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$\lambda.(x, y) = (\lambda x, 0)$

alors les propriétés (i), (ii) et (iii) sont vérifiées mais pas la propriété (iv). Avec ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ n'est pas un espace vectoriel. Les propriétés (vii) et (viii) définies ci-après sont également en défaut dans cette structure.

❑ L'ensemble des fonctions périodiques n'est pas un espace vectoriel. En effet, soit la fonction f définie par : $\forall x,\ f(x) = \cos(x) + \cos(\pi x)$. f est la somme de deux fonctions périodiques mais f n'est pas périodique. Pour le voir, considérons l'équation suivante :

$f(x) = 2$

$\Leftrightarrow\quad \cos(x) = \cos(\pi x) = 1$

$\Leftrightarrow\quad \exists\ k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\pi$ et $\exists\ k' \in \mathbb{Z},\ \pi x = 2k'\pi$

$\Rightarrow \qquad x = 0$ ou $\pi = \dfrac{k'}{k} \in \mathbb{Q}$

Mais π est irrationnel. Donc la seule solution de l'équation est 0. Etant unique, cela exclut que f puisse être périodique.

Il résulte des axiomes que :

(v) $\forall\, x \in E,\ 0\,.\,x = 0_E$

où 0 est le scalaire neutre de $(\mathbb{K},+)$ et (0_E) le neutre de $(E,+)$. De même :

(vi) $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\,.\,0_E = 0_E$

(vii) $-1\,.\,x = -x$ où -1 est le symétrique de 1 dans $(\mathbb{K},+)$ et $-x$ le symétrique de x dans $(E,+)$.

(viii) $\lambda\,.\,x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

<u>Démonstration</u> :

❑ (v) $1\,.\,x = x = (1 + 0)\,.\,x = 1\,.\,x + 0\,.\,x = x + 0\,.\,x$ donc $x = x + 0\,.\,x$ donc $0.x = 0_E$

❑ (vi) $\lambda\,.\,0_E = \lambda\,.\,(0\,.\,x) = (\lambda 0)\,.\,x = 0\,.\,x = 0_E$

❑ (vii) $0_E = 0\,.\,x = (1 + (-1))\,.\,x = x + (-1)\,.\,x$ donc $(-1)\,.\,x = -x$

❑ (viii) Si $\lambda\,.\,x = 0_E$ et si $\lambda \neq 0$, alors $\dfrac{1}{\lambda}.(\lambda\,.\,x) = \dfrac{1}{\lambda}.0_E = 0_E$ donc $(\dfrac{1}{\lambda}\lambda)\,.\,x = 0_E$ donc $1\,.\,x = 0_E$ donc $x = 0_E$.

Dans la suite du chapitre, le point indiquant le produit entre le scalaire et le vecteur est généralement omis.

Une fois définis des espaces vectoriels, il est possible d'en définir d'autres. Par exemple, si E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors $E \times F$, ensemble des couples (x, y), $x \in E$, $y \in F$, en est un aussi, avec les lois naturelles :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

Plus généralement, si $F_1, \ldots, F_p$ sont des espaces vectoriels, on note $\prod_{i=1}^{p} F_i$ l'ensemble des $(x_1, \ldots, x_p)$, où, pour tout i, $x_i \in F_i$. Cet ensemble forme un espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations :

$(x_1, \ldots, x_p) + (y_1, \ldots, y_p) = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$

$\lambda(x_1, \ldots, x_p) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p)$

Si E est un espace vectoriel et X un ensemble quelconque, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E est un espace vectoriel, avec les lois :

$f + g : x \to f(x) + g(x)$

$\lambda f \quad : x \to \lambda f(x)$

2- Sous-espaces vectoriels

Une façon plus rapide de montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel est de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Soit E un espace vectoriel et F une partie de E. F est un **sous-espace vectoriel** de E si F muni des restrictions des lois de E est un espace vectoriel. Il suffit pour cela que F soit non vide et vérifie :

$\forall x \in \mathrm{F}, \forall y \in \mathrm{F}, x + y \in \mathrm{F}$
$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in \mathrm{F}, \lambda x \in \mathrm{F}$

Il est par exemple inutile de vérifier que $x \in \mathrm{F} \Rightarrow -x \in \mathrm{F}$. Cela découle de la deuxième propriété avec $\lambda = -1$. De même, on aura $0_\mathrm{E} = x + (-x) \in \mathrm{F}$.

EXEMPLES :

❑ Il y a bien sûr les droites vectorielles, incluses dans les plans vectoriels, inclus dans les espaces vectoriels de dimension supérieure. Mais il y a aussi l'espace vectoriel des fonctions polynomiales, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions continues, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

❑ Soit E_1 l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui s'annulent en un nombre fini de points. E_1 n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas la fonction identiquement nulle.
Soit E_2 l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ f s'annulant en un nombre infini de points. E_2 n'est pas un espace vectoriel. En effet, $\sin^2$ et $\cos^2$ sont élément de E_2 mais pas leur somme, constante égale à 1.
Soit E_3 l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ s'annulant partout sauf en un nombre fini de points. C'est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. En effet, pour toute fonction f; notons $\mathrm{N}(f)$ l'ensemble des points où elle ne s'annule pas. Les éléments f de E_3 sont caractérisés par le fait que $\mathrm{N}(f)$ est fini. Soit $f \in \mathrm{E}_3$ et $\lambda \neq 0$. Alors $\mathrm{N}(\lambda f) = \mathrm{N}(f)$ donc λf appartient à E_3. Si $\lambda = 0$, $\mathrm{N}(\lambda f) = \varnothing$ qui est fini, donc $\lambda f \in \mathrm{E}_3$. Si f et g appartiennent à E_3, alors $\mathrm{N}(f + g) \subset \mathrm{N}(f) \cup \mathrm{N}(g)$ ensemble fini, donc $f + g \in \mathrm{E}_3$.

PROPOSITION

Soit E *un espace vectoriel. Une intersection de sous-espaces vectoriels de* E *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration :

❑ Soit $(\mathrm{F}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Soit G l'intersection des F_i. G est non vide car tous les F_i contiennent 0_E donc G aussi. Puis :

$\forall x, \forall y \quad x \in \mathrm{G}$ et $y \in \mathrm{G} \Rightarrow \forall i, x \in \mathrm{F}_i$ et $y \in \mathrm{F}_i \Rightarrow \forall i, x + y \in \mathrm{F}_i \Rightarrow x + y \in \mathrm{G}$
$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad x \in \mathrm{G} \Rightarrow \forall i, x \in \mathrm{F}_i \Rightarrow \forall i, \lambda x \in \mathrm{F}_i \Rightarrow \lambda x \in \mathrm{G}$

EXEMPLE :

❑ On note $\mathrm{C}^n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions n fois dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors l'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel noté $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R})$, espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$. $\mathrm{C}^0(\mathbf{R})$ est différent de $\mathrm{C}^1(\mathbf{R})$ (prendre $|x|$). $\mathrm{C}^1(\mathbf{R})$ est différent de $\mathrm{C}^2(\mathbf{R})$ (prendre $x^2.\mathrm{sg}(x)$, où $\mathrm{sg}(x)$ désigne la fonction signe, valant 1 pour $x > 0$, 0 pour $x = 0$ et -1 pour $x < 0$).

3- Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Une troisième façon de définir un espace vectoriel est de le définir comme sous-espace vectoriel engendré par une partie. Soit M une partie d'un espace vectoriel E. Considérons F l'ensemble des **combinaisons linéaires** de la forme $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$, avec $\lambda_i \in \mathbf{K}$ et les x_i éléments de M. Alors :

i) F est un sous-espace vectoriel de E, car la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de M est une combinaison linéaire d'éléments de M.

ii) Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant M, alors F est inclus dans G, puisque toute combinaison linéaire d'élements de M appartient à G. F est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant M.

On dit que F est **engendré** par M ou que M est un **système générateur** de F ou une **partie génératrice** de F. On note alors F = Vect(M).

EXEMPLES :

❑ $\mathbf{K}^n$ est engendré par les n-uplets $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$.

❑ Dans $C^0(\mathbf{R})$, et soit n un entier. Les fonctions 1, x, x^2, ..., x^n engendrent le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

❑ Dans $C^0(\mathbf{R})$, l'ensemble $\{x^n, n \in \mathbf{N}\}$ engendre le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré quelconque.

❑ Si M = $\emptyset$, le sous-espace vectoriel engendré est {0}, obtenu par une somme nulle car vide.

4- Dépendance et indépendance linéaire

a) Considérons dans $\mathbf{R}^3$ les deux parties suivantes :

$$M : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = V$$

et $$N : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = X, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = Y, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = Z$$

Ces deux parties engendrent le même sous-espace vectoriel, car :

$$X = V - U \quad Y = V + U \quad Z = -V + 2U$$

ce qui prouve que le sous-espace vectoriel engendré par N est inclus dans celui engendré par M. Et :

$$U = \frac{1}{2}(Y - X) \qquad V = 2X + Z$$

ce qui prouve que le sous-espace vectoriel engendré par M est inclus dans celui engendré par N.

Les vecteurs de ce sous-espace vectoriel F peuvent s'écrire $\lambda U + \mu V$ (i) ou $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ (ii).

Considérons un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. A quelle condition appartient–il à F ?

Avec la combinaison linéaire (i), un vecteur appartient à F si et seulement si :

$$\exists\, \lambda, \exists\, \mu\,, \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 3\mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \exists\, \mu, \begin{cases} \mu \ = \dfrac{y}{3} \\ \lambda = z + \dfrac{y}{3} \\ x = z + y \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée à l'existence est $x = z + y$, équation du plan vectoriel F. On remarquera par ailleurs que pour tout vecteur de F, les coefficients λ et μ sont uniques.

Avec la combinaison linéaire (ii), un vecteur appartient à F si et seulement si :

$$\exists\, \alpha, \exists\, \beta, \exists\, \gamma, \begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = 3\alpha + 3\beta - 3\gamma \\ z = -2\alpha + 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \exists\, \beta,\ \exists\, \gamma, \begin{cases} \alpha = x - 3\beta \\ \gamma = -\dfrac{y}{3} + x - 2\beta \\ z = x - y \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante est la même. Cependant, les coefficients α, β, γ ne sont pas uniques. Il en existe une infinité. Cela est lié au fait que, dans le deuxième cas, F est défini par trois vecteurs alors que deux suffiraient. Cela introduit un coefficient supplémentaire arbitraire.

Dans le cas (i), les vecteurs U et V sont dits **linéairement indépendants**. On dit aussi que (U,V) forme un **système libre**. Dans le cas (ii), les vecteurs X, Y et Z sont dits **linéairement dépendants**. On dit aussi que (X,Y,Z) forme un **système lié**. Cette deuxième terminologie provient du fait qu'il existe une **relation de liaison** entre X, Y et Z :

$$3X - Y + 2Z = 0$$

b) PROPOSITION-DEFINITION

Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *un système de n vecteurs d'un espace vectoriel* E. *Il y a équivalence entre :*

(i) *Toute combinaison linéaire de* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *s'écrit de manière unique sous la forme* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$.

(ii) $\forall\, (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0_E \Rightarrow\ \forall\, i, \lambda_i = 0$.

Un tel système est dit libre.

Un système qui n'est pas libre est dit lié. Il existe alors $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *non tous nuls tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0_E$

On prendra garde à différencier *non tous nuls* et *tous non nuls*.

Non tous nuls signifie : $\exists\, i, \lambda_i \neq 0$

Tous non nuls signifie : $\forall\, i, \lambda_i \neq 0$

Un système constitué d'une infinité de vecteurs est dit libre si toute partie finie de ce système est elle-même libre.

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii) : résulte de l'unicité de la décomposition de $0_E = 0v_1 + ... + 0v_n$.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (i) : se montre en supposant qu'il existe deux décompositions possibles d'un vecteur w. On a alors :

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, v_i$$

donc $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)v_i = 0_E$

donc $\forall\, i,\ \lambda_i - \mu_i = 0$ d'après l'hypothèse ii)

donc $\forall\, i,\ \lambda_i = \mu_i$

ce qui prouve bien l'unicité de la décomposition.

c) PROPRIETES

Soient A *et* B *deux systèmes de vecteurs :*

(i) $0_E \in A \Rightarrow A$ *lié.*

(ii) A *lié et* $A \subset B \Rightarrow B$ *lié.*

(iii) $v \neq 0_E \Rightarrow (v)$ *libre.*

(iv) A *libre et* $B \subset A \Rightarrow B$ *libre.*

(v) A *lié* $\Rightarrow$ *il existe un des vecteurs de* A *combinaison linéaire des autres.*

Démontration :

❑ (i) : La combinaison $1.0_E = 0_E$ de vecteurs de A est nulle et possède un coefficient non nul.

❑ (ii) : Prendre pour relation de liaison dans B la même que celle que l'on a dans A.

❑ (iii) : Si $\lambda v = 0_E$ avec $v \neq 0_E$, alors $\lambda = 0$ donc le système constitué du seul vecteur (v) est libre.

❑ (iv) est la contraposée du (ii).

❑ (v) : Si A est lié, il existe une combinaison linéaire de vecteurs de A vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0_E$ avec l'un des λ_i au moins non nul. On a alors $v_i = -\dfrac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j\, v_j$.

EXEMPLES :

❑ Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Montrons que (X, Y) forme un système lié si et seulement si : $\forall\, i,\ \forall\, j,\ x_iy_j - x_jy_i = 0$

$\Rightarrow$: (X, Y) étant lié, on a par exemple $X = \lambda Y$. Alors $x_i = \lambda y_i$ et $x_i\, y_j - x_j\, y_i = \lambda\, x_i\, x_j - \lambda\, x_j\, x_i = 0$.

$\Leftarrow$: si X ou Y sont nuls, alors le système est lié. Sinon, il existe i tel que $y_i \neq 0$. Comme $x_i y_j - x_j y_i = 0$ pour tout j, on a, pour tout j, $x_j = \dfrac{x_i}{y_i} y_j$ et il suffit de prendre $\lambda = \dfrac{x_i}{y_i}$ pour que $X = \lambda Y$.

❑ $\mathbb{R}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Montrons que, dans ce contexte, 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont linéairement indépendants.
Soient a, b, c tels que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$. Alors, $a + b\sqrt{2} = -c\sqrt{3}$ donc en élevant au carré :

$$2ab\sqrt{2} = 3c^2 - a^2 - b^2$$

Mais $\sqrt{2}$ est irrationnel (voir le chapitre L1/REELS.PDF). Donc nécessairement $ab = 0 = 3c^2 - a^2 - b^2$, sinon on aurait $\sqrt{2} = \dfrac{3c^2 - a^2 - b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$.
donc $a = 0 = 3c^2 - b^2$ ou $b = 0 = 3c^2 - a^2$. Si, dans le premier cas, $(b, c) \neq (0, 0)$, on aurait $\sqrt{3} = \pm \dfrac{b}{c}$, rationnel. Or $\sqrt{3}$ est aussi un irrationnel, donc $b = c = 0$. Le deuxième cas est identique. On a donc montré que $a = b = c = 0$, et le système $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre sur $\mathbb{Q}$.

5- Bases

Un système de vecteurs libre et générateur s'appelle une base. Tout vecteur de E s'écrit alors de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. Les scalaires de cette combinaison sont les **composantes** du vecteur. Le nombre de vecteurs d'une base, s'il est fini, s'appelle la dimension de E, notée dim(E). On montre dans le II) que toutes les bases de E ont même nombre de vecteurs.

EXEMPLES :

❑ Une base de $\mathbb{K}^n$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$, dite base canonique. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

❑ Une base de l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n est donnée par les fonctions qui à x associent 1, x, x^2, ..., x^n. Une base de l'espace des fonctions polynômes de degré quelconque est donnée par les fonctions $x \to x^n$, n décrivant $\mathbb{N}$.

❑ Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_n)$, alors $E \times F$ est de dimension finie admet pour base $(e_1, 0_F), \dots, (e_p, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_n)$.
En effet, tout couple (x, y) de $E \times F$ avec $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\,(e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j\,(0_E,\ f_j)$$

On a donc $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$, formule qu'on retrouve implicitement dans :

$$n + p = \dim(\mathbb{R}^{n+p}) = \dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) = \dim(\mathbb{R}^n) + \dim(\mathbb{R}^p)$$

❑ Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$. On distingue E_1 l'espace E sur le corps $\mathbb{C}$ de E_2 l'espace E sur le corps $\mathbb{R}$. Alors :

a) Un système libre dans E_1 est libre dans E_2. En effet, si l'implication $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \forall\, i, \lambda_i = 0$ est vraie pour tout λ_i complexe, elle sera a fortiori vraie pour tout λ_i réel.

b) Un système générateur de E_2 est un système générateur de E_1. En effet, si l'implication $\forall\, v, \exists\, \lambda_1, ..., \lambda_n, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ est vraie avec des λ_i réels, elle est a fortiori vraie avec les mêmes λ_i considérés comme éléments de $\mathbb{C}$.

c) $\dim(E_2) = 2\dim(E_1)$. En effet, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E sur $\mathbb{C}$ et $(1, i)$ la base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, où i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Alors on vérifiera que $(e_1, ie_1, ..., e_n, ie_n)$ est une base de E sur $\mathbb{R}$.

6- Relation de liaison

La méthode ci-dessous permet de rechercher une relation de liaison. On suppose les W_i donnés par leurs coefficients dans une base.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On fait des combinaisons entre chaque W_i, $i \geq 2$, et W_1 de façon à disposer des zéros en première ligne (Si W_1 possédait un zéro en première ligne, le permuter avec un vecteur ayant un premier coefficient non nul. Si tous les vecteurs possèdent une première composante nulle, passer à la deuxième ligne)

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_1 & W_4-2W_1 & W_5-W_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

On fait de même des combinaisons linéaires entre le deuxième vecteur $W_2 - W_1$ et chacun de ceux qui suivent de façon à disposer des zéros en deuxième ligne.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+3W_2-5W_1 & W_5+2W_2-3W_1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \end{array}$$

On itère.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+2W_3+W_2-5W_1 & 4W_5+3W_3+5W_2-12W_1 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-14\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-40\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+2W_3+W_2-5W_1 & 28W_5-20W_4-19W_3+15W_2+16W_1 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-14\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}$$

La relation de liaison est $28W_5 - 20W_4 - 19W_3 + 15W_2 + 16W_1 = 0$.

Nous verrons plus loin que, si à la fin du processus, on n'obtient pas le vecteur nul, c'est que les vecteurs forment un système libre.

II : Espace de dimension finie

Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il est engendré par une partie finie. Le but de ce paragraphe est de montrer que toutes les bases de cet espace vectoriel sont constituées du même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appellera **dimension de l'espace**.

1- Théorème fondamental

THEOREME

Soit E un espace vectoriel engendré par le système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ et soit $(w_1, w_2, ..., w_p)$ un système quelconque. Si ce système est libre, alors p est inférieur ou égal à n.

Autre formulation en prenant la contraposée :

si p est strictement supérieur à n, alors $(w_1, w_2, ..., w_p)$ est un système lié.

Démonstration :

On montre par récurrence sur n la deuxième formulation. Soit $p > n$.

❑ Cette propriété est vraie pour $n = 1$, car si (w_1, w_2) sont deux vecteurs d'un espace vectoriel engendré par (v_1), il existe α et β tels que :

$$w_1 = \alpha v_1 \quad \text{et} \quad w_2 = \beta v_1$$

Si les deux coefficients sont nuls, alors le système est lié. Sinon, on a :

$$\beta w_1 - \alpha w_2 = 0$$

et le système est également lié.

❑ On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ et on la montre au rang n. Soit $(w_1, ..., w_p)$ un système d'un espace vectoriel engendré par $(v_1, ..., v_n)$, avec $p > n$. Ecrivons les vecteurs w_i par leur colonne de composantes selon $(v_1, ..., v_n)$ (Ces composantes peuvent ne pas être uniques si $(v_1, ..., v_n)$ est lié).

$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \dots & w_p \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \dots \\ a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si tous les a_{1i} sont nuls, alors les w_i appartiennent en fait au sous-espace vectoriel engendré par $(v_2, ..., v_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, les w_i forment bien un système lié.

Sinon, l'un des a_{1i} est non nul, par exemple a_{11}. On annule alors la première composante des autres vecteurs :

$$\begin{array}{cccc} w_1 & a_{11}w_2 - a_{12}w_1 & \dots & a_{11}w_p - a_{1p}w_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Les $p - 1$ derniers vecteurs sont combinaisons des $n - 1$ vecteurs $(v_2, ..., v_n)$. Or $p - 1 > n - 1$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique : ils sont liés. Il existe donc des coefficients λ_i non tous nuls tels que :

$$\lambda_2(a_{11}w_2 - a_{12}w_1) + ... + \lambda_p(a_{11}w_p - a_{1p}w_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda_2 a_{12} + ... + \lambda_p a_{1p})w_1 + \lambda_2 a_{11}w_2 + ... + \lambda_p a_{11}w_p = 0$$

On obtient une combinaison linéaire nulle des w_i. Pour voir que le système des (w_i) est lié, il suffit de s'assurer que l'un des coefficients est non nul. Or le coefficient de w_i, $2 \le i \le p$, vaut $\lambda_i a_{11}$, et l'on sait que l'un des λ_i est non nul et que a_{11} est non nul.

2- Théorème de la dimension des bases

THEOREME

Soit E *un espace vectoriel engendré par une partie finie. Alors* E *admet une base, et toutes les bases de* E *ont même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la* **dimension** *de* E.

<u>Démonstration</u> :

❑ Existence d'une base : Si $(v_1, ..., v_n)$ engendre E et si ce système est libre, il forme une base. S'il est lié, l'un des vecteurs, par exemple v_n est combinaison linéaire des autres. Il n'est pas difficile de voir que $(v_1, ..., v_{n-1})$ reste un système générateur de E. On itère le procédé en supprimant un vecteur combinaison des autres jusqu'à obtenir un système générateur libre. Cette méthode est constructive.

❑ Dimension des bases : Soient $(v_1, ..., v_n)$ et $(w_1, ..., w_p)$ deux bases. Alors, d'après le 1) :

- ❑ $(v_1, ..., v_n)$ est générateur et $(w_1, ..., w_p)$ est libre donc $p \le n$.
- ❑ $(v_1, ..., v_n)$ est libre et $(w_1, ..., w_p)$ est générateur donc $n \le p$.

Donc $p = n$

CONSEQUENCES :

(i) $(w_1, ..., w_n)$ *libre* $\Rightarrow n \le dim(\text{E})$
(ii) $(w_1, ..., w_n)$ *générateur* $\Rightarrow n \ge dim(\text{E})$
(iii) $(w_1, ..., w_n)$ *base* $\Rightarrow n = dim(\text{E})$
(iv) $n > dim(\text{E}) \Rightarrow (w_1, ..., w_n)$ *lié*

(v) $(w_1, ..., w_n)$ *libre et* $n = dim(\mathrm{E}) \Rightarrow (w_1, ..., w_n)$ *base*
(vi) $(w_1, ..., w_n)$ *générateur et* $n = dim(\mathrm{E}) \Rightarrow (w_1, ..., w_n)$ *base*

Démonstration :
❑ (i) résulte du théorème fondamental.

❑ (ii) aussi.

❑ (iii) est la définition de dim(E)

❑ (iv) est la contraposée de i)

❑ (v) : Pour tout v de E, $(w_1, ..., w_n, v)$ est lié (d'après iv). Donc il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \alpha v = 0$. Or α doit nécessairement être non nul, sinon tous les α_i seraient nuls. Donc v est combinaison linéaire des w_i, qui forment donc un système générateur.

❑ (vi) : Si le système est lié, on pourrait supprimer un des vecteurs combinaison linéaire des autres tout en gardant un système générateur. Cela imposerait que dim(E) soit strictement inférieur à n.

Les points (iv) et (v) sont particulièrement utilisés.

3- Théorème de la base incomplète
Un autre moyen de former une base est le suivant :
THEOREME
Soit E *un espace vectoriel de base* $(v_1, ..., v_n)$, *et soit* $(w_1, ..., w_p)$ *un système libre. Alors il existe* $n - p$ *vecteurs parmi les* v_i *tel que le système constitué de ces* $n - p$ *vecteurs* v_i *et des* w_j *forme une base de* E.

Démonstration :
❑ Par un raisonnement analogue au vi) du paragraphe précédent, on voit que, si $p < n$, il existe l'un des v_i tel que $(w_1, ..., w_p, v_i)$ soit libre. (Si tous les systèmes sont liés, on montrerait comme dans la conséquence vi du paragraphe précédent que les v_i sont combinaison linéaire des w_j, et donc que les w_j sont générateurs). En notant $w_{p+1} = v_i$, on itère le procédé jusqu'à obtenir n vecteurs libres w_i. Ils forment alors une base. Cette méthode est constructive.

EXEMPLE :
❑ Dans $\mathbf{R}^4$, on prend la base canonique $(V_1, ..., V_4)$ et le système libre suivant :

$$\begin{array}{cc} W_1 & W_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le compléter en une base de $\mathbf{R}^4$.
(W_1, W_2, V_1) est lié
(W_1, W_2, V_2) est lié

(W_1, W_2, V_3) est libre
(W_1, W_2, V_3, V_4) est libre. Ces quatre vecteurs forment une base.

4- Dimension d'un sous-espace vectoriel

PROPOSITION

Soit F *un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors* F *est de dimension finie et* $\dim(F) \leq \dim(E)$. *Si* $\dim(F) = \dim(E)$, *alors* $F = E$.

Démonstration :
❑ Parmi tous les systèmes libres de F, on en choisit un de cardinal maximal. Le nombre des vecteurs de ce système est nécessairement inférieur ou égal à dim(E) puisqu'il est libre dans E. Par ailleurs, étant libre et maximal dans F, il forme une base de F. En effet, tout rajout d'un vecteur v à ce système donne un système lié, et comme plus haut, on montre que v est combinaison linéaire des vecteurs du système.

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si dim(F) = dim(E), alors F = E, puisqu'une base de F étant un système libre, et possédant $n = \dim(E)$ vecteurs est aussi une base de E.

Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est une **droite vectorielle**. Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est un **plan vectoriel**. Un sous-espace vectoriel de dimension dim(E) – 1 est un **hyperplan vectoriel**. Si E = {0}, sa dimension est nulle.

La dimension et les notions de systèmes libres ou générateurs dépendent du corps sur lequel on travaille. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 1 quand le corps des scalaires est $\mathbb{C}$ lui-même, mais c'est un espace vectoriel de dimension 2 (le plan complexe de base 1 et i) lorsque le corps des scalaires est $\mathbb{R}$. Plus généralement, soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et F l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué du même ensemble de vecteurs. Alors $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2\dim_{\mathbb{C}}(E)$ car, si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors une base de F est $(e_1, ie_1, e_2, ie_2, ..., e_n, ie_n)$. On pourra également montrer qu'un système de vecteurs libre dans E reste libre dans F, et qu'un système générateur de F est générateur de E, mais que les réciproques peuvent être fausses.

5- Rang d'un système de vecteurs

On appelle **rang d'un système de vecteurs** la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système. C'est donc le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire du système. Un tel système libre maximal forme une base du sous-espace vectoriel qu'il engendre.

Le rang se calcule par la même méthode exposée dans le I-6). En effet, les opérations élémentaires effectuées sur les colonnes montrent qu'à chaque étape, le sous-espace vectoriel engendré n'est pas modifié. Une fois arrivé à un système de vecteurs dont les premiers sont échelonnés en colonne et les derniers nuls, le rang est égal au nombre de vecteurs non nuls, puisque les vecteurs non nuls échelonnés forment une famille libre, et donc une base du sous-espace vectoriel engendré. En particulier, si on n'obtient pas de vecteur nul à la fin du calcul, c'est que le système final est une base du sous-espace vectoriel engendré et il en est alors de même du système initial, qui est générateur avec un nombre de vecteurs égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré.

EXEMPLE :
❑ Si on reprend l'exemple traité dans le I-6) :

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix} \end{array}$$

on arrive au système échelonné suivant :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-14\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc le rang du système de vecteurs est 4.

❑ Extraire une famille libre maximale de : $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\-4\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\\-4\\7\end{pmatrix}$. Notons $(V_1, ..., V_5)$ les cinq vecteurs. On obtient successivement :

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3-V_1 & V_4+2V_1 & V_5+4V_1 \\ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\-1\\-2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\-2\\8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\10\\-6\\0\\19\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3-V_1+V_2 & V_4+2V_1-4V_2 & V_5+4V_1-10V_2 \\ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\3\\-14\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-30\\9\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3-V_1+V_2 & 7V_1-11V_2-3V_3+2V_4 & 6V_1-12V_2-2V_3+V_5 \\ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-34\\11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-34\\11\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3-V_1+V_2 & 7V_1-11V_2-3V_3+2V_4 & V_1+V_2-V_3+2V_4-V_5 \\ \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-34\\11\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}$$

La relation de liaison est $V_1 + V_2 - V_3 + 2V_4 - V_5 = 0$. Le sous-espace vectoriel est engendré par $(V_1, V_2, V_3 - V_1 + V_2, 7V_1 - 11V_2 - 3V_3 + 2V_4)$, mais aussi par (V_1, V_2, V_3, V_4). Le système est de rang 4.

On remarquera que la démarche est identique à la recherche du rang d'une matrice telle qu'elle est exposée dans le chapitre sur le calcul matriciel L1/MATRICE.PDF, sauf que le calcul se fait ici selon les colonnes, alors que pour les systèmes, il s'effectue selon les lignes. On montre dans le chapitre L1/LINEF.PDF sur les applications linéaires que le rang est le même, qu'il soit calculé selon les colonnes ou selon les lignes.

III : Somme de sous-espaces vectoriels

1- Somme de deux sous-espaces vectoriels

DEFINITION

Soit E *un espace vectoriel, de dimension finie ou non,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. On appelle* **somme** *de* F *et* G *l'ensemble défini par :*

$$F + G = \{z \mid \exists\, x \in F, \exists\, y \in G, z = x + y\}.$$

F + G est le sous-espace vectoriel engendré par la partie $F \cup G$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G. La somme ne doit pas être confondue avec la réunion. Dans le plan vectoriel, la réunion de deux droites distinctes est constituée des éléments qui appartiennent à l'une ou à l'autre des deux droites, alors que la somme est le plan tout entier.

2- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On s'intéresse à la question de savoir si z peut se décomposer de plusieurs façons sous la forme $x + y$, $x \in F$, $y \in G$.

PROPOSITION

Il y a équivalence entre :

(i) $x + y = 0_E$ *et* $x \in F$, $y \in G \Rightarrow x = y = 0_E$

(ii) *Tout* z *de* F + G *s'écrit de manière unique* $x + y$, $x \in F$, $y \in G$.

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que la somme est **directe**.

<u>Démonstration</u> :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii)

Si $z = x + y = x' + y'$ avec $x \in F$, $x' \in F$, $y \in G$, $y' \in G$, alors :

$x - x' + y - y' = 0_E$ avec $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$, donc $x - x' = y - y' = 0_E$ donc $x = x'$ et $y = y'$

❑ (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Si $z \in F \cap G$, z peut s'écrire $z = \underset{\in F}{z} + \underset{\in G}{0_E} = \underset{\in F}{0_E} + \underset{\in G}{z}$

La décomposition étant unique, $z = 0_E$.

❑ (iii) $\Rightarrow$ (i)

Si $x + y = 0_E$, alors $x = -y$ est élément de F et de G, donc est nul.

Si une somme est directe, on note $F \oplus G$ au lieu de F + G. La propriété (iii) est la plus couramment utilisée pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, et la propriété (ii) est la plus couramment utilisée lorsqu'on sait que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

EXEMPLES :

❑ Soient E de dimension 3, de base ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$), F le plan engendré par ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i}$), G le plan engendré par ($\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$). La somme n'est pas directe car :

$$-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \underbrace{-\boldsymbol{i}}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}_{\in \mathrm{G}} = \underbrace{-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\boldsymbol{k}}_{\in \mathrm{G}}$$

❑ Soit E de dimension 3, de base ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$), F le plan engendré par ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$), G la droite engendrée par $\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i}$. La somme est directe car :

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}(y + 2x - z)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}(y + z)(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}(y - z)(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i})$$

et il n'y a pas d'autre possibilité. En effet, la résolution du système :

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = a\boldsymbol{i} + b(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + c(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i})$$

conduit à la seule solution donnée ci-dessus.

3- Supplémentaires

On appelle **supplémentaire** de F un sous-espace vectoriel G tel que E = F ⊕ G. Cela signifie :

(i) Tout z de E est somme d'un élément de F et d'un élément de G.
(ii) Cette décomposition est unique.

ou encore que :

(i) E = F + G
(ii) F ∩ G = {0}

EXEMPLES :

❑ Soit E = $C^0(\mathbb{R})$, notons F l'ensemble des fonctions paires et G l'ensemble des fonctions impaires. Ces deux ensembles sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Toute fonction se décompose d'une façon unique en une partie paire et une partie impaire. En effet, on laisse au lecteur le soin de vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels.

F ∩ G = {0} car si une fonction f est à la fois paire et impaire, on a, pour tout x :

$$f(-x) = f(x) = -f(x)$$

donc, pour tout x, $f(x) = 0$

F + G = E car toute fonction f se décompose sous la forme :

$$\forall x,\ f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

avec $x \to \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ paire et $x \to \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ impaire.

Ainsi, on a par exemple $e^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$, décomposition de exp en sa partie paire et sa partie impaire.

❑ Soit B un polynôme donné de degré m sur un corps $\mathbb{K}$ On pose F = {QB | Q ∈ $\mathbb{K}$[X]}. Alors F et $\mathbb{K}_{m-1}$[X] sont supplémentaires dans $\mathbb{K}$[X]. En effet, la décomposition unique de tout polynôme A sous la forme A = QB + R, QB ∈ F, R ∈ $\mathbb{K}_{m-1}$[X] n'est autre que l'expression de la division euclidienne de A par B, Q étant le quotient et R le reste.

Si E = F ⊕ G, on peut définir le **projecteur** p de E sur F parallèlement à G et la **symétrie** s par rapport à F parallèlement à G :

$$\begin{array}{ccc} \text{E} & \to & \text{E} \\ z = x + y & \to & p(z) = x \\ \in\text{F}\ \in\text{G} & & s(z) = x - y \end{array}$$

EXEMPLE :

❑ Reprenons l'exemple de E = $C^0(\mathbf{R})$, du sous-espace F des fonctions paires et du sous-espace G des fonctions impaires. On considère l'application S : E $\to$ E qui, à toute fonction f, associe la fonction S(f) définie par S(f)(x) = $f(-x)$. S est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des fonctions paires parallèlement au sous-espace vectoriel des fonctions impaires.

4- Cas de la dimension finie

PROPOSITION

Si E *est de dimension finie et si* F *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors il existe un supplémentaire* G *de* F*. Tous les supplémentaires ont pour dimension dim*(E) – *dim*(F)*.*

Démonstration :

❑ Si $(v_1,...,v_n)$ est une base de E et $(w_1,...,w_p)$ une base de F, le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la base de F par $n - p$ vecteurs pour former une base de E. Ces $n - p$ vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel G qui sera supplémentaire de F.

PROPOSITION (Formule de Grassmann)

Soit F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors* F + G *est de dimension finie et :*

$$\dim(\text{F} + \text{G}) = \dim(\text{F}) + \dim(\text{G}) - \dim(\text{F} \cap \text{G})$$

Démonstration :

On notera l'analogie avec la formule Card(A $\cup$ B) = Card(A) + Card(B) – Card(A $\cap$ B)

❑ On choisit une base $(u_1, ..., u_p)$ de F $\cap$ G, que l'on complète en une base $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ de F et $(u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r)$ de G. $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_r)$ est une base de F + G. En effet :

Ce système est générateur car tout vecteur de F + G est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, donc somme d'une combinaison linéaire de $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ et d'une combinaison linéaire de $(u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r)$ donc est une combinaison linéaire de $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_r)$.

Ce système est libre car si on a des coefficients α_i, β_j et γ_k tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j v_j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k = 0$$

alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j v_j = -\sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k$

or le membre de gauche est élément de F, celui de droite est élément de G, donc il s'agit d'un élément de F $\cap$ G. Il existe donc des scalaires δ_m tels que ce vecteur soit égal à $\displaystyle\sum_{m=1}^{p} \delta_m u_m$. On a donc :

$$-\sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k = \sum_{m=1}^{p} \delta_m u_m$$

donc $\sum_{k=1}^{r} \gamma_k\, w_k + \sum_{m=1}^{p} \delta_m\, u_m = 0$

Mais $(u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r)$ est une base de G donc est libre, donc tous les γ_k (et les δ_m) sont nuls.

Donc $-\sum_{k=1}^{r} \gamma_k\, w_k = 0$

donc $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, u_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, v_j = 0$

Mais $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ est une base de F donc est libre, donc tous les α_i et les β_j sont nuls.
On a bien montré que tous les coefficients de la combinaison linéaire initiale étaient nuls. On a donc :

$\dim(F \cap G) = p$
$\dim(F) = p + q$
$\dim(G) = p + r$
$\dim(F + G) = p + q + r$

d'où la formule $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

En particulier :

(i) $\dim (F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

(ii) Si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ alors F et G sont en somme directe. En effet, $\dim(F \cap G)$ est nul dans ce cas, donc $F \cap G = \{0\}$.

(iii) Si F et G sont en somme directe, une base de $F \oplus G$ s'obtient en réunissant une base de F et une base de G

(iv) Inversement, si on scinde une base de E en deux systèmes disjoints, ces deux systèmes engendrent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

5- Somme de plusieurs sous-espaces

DEFINITION

Soit E *un espace vectoriel, de dimension finie ou non,* $F_1, F_2, ..., F_p$ *p sous-espaces vectoriels de* E. *On appelle somme des* F_i *l'ensemble défini par :*

$$F_1 + F_2 + ... + F_p = \{z \mid \exists\, x_i \in F_i,\ z = x_1 + x_2 + ... + x_p\}.$$

$F_1 + F_2 + ... + F_p$ est le sous-espace vectoriel engendré par la réunion des F_i. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les F_i.

PROPOSITION

Avec les notations précédentes, les trois affirmations ci-dessous sont équivalentes.

(i) $x_1 + x_2 + ... + x_p = 0_E$ *et* $\forall\, i,\ x_i \in F_i \Rightarrow \forall\, i,\ x_i = 0_E$

(ii) *Tout z de* $F_1 + ... + F_p$ *s'écrit de manière unique* $x_1 + ... + x_p,\ x_i \in F_i$.

(iii) $\forall\, i,\ (F_1 + F_2 + ... + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$

Si elles sont vérifiées, on dit que la somme est **directe**.

Démonstration :

❑ (i) $\Rightarrow$ (ii)

Si $z = x_1 + ... + x_p = y_1 + ... + y_p$ avec $x_1 \in F_1, y_1 \in F_1, ..., x_p \in F_p, y_p \in F_p$

alors $(x_1 - y_1) + ... + (x_p - y_p) = 0$ avec $x_i - y_i \in F_i$ donc $x_i - y_i = 0$.

❑ (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Si $z \in (F_1 + F_2 + ... + F_{i-1}) \cap F_i$, alors il existe $x_1 \in F_1, ..., x_{i-1} \in F_{i-1}, y_i \in F_i$ tels que :

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 + ... + x_{i-1} = y_i \\ &= x_1 + x_2 + ... + x_{i-1} + 0 = 0 + 0 + ... + 0 + y_i \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition impose que $x_1 = ... = x_{i-1} = y_i = 0$, donc $z = 0$

❑ (iii) $\Rightarrow$ (i)
$x_1 + x_2 + ... + x_p = 0 \Rightarrow x_p = - x_1 - ... - x_{p-1}$ élément de $(F_1 + F_2 + ... + F_{p-1}) \cap F_p$. Donc $x_p = 0$. On procède de même par récurrence descendante pour les autres composantes.

La somme directe se note $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$. La somme des F_i est directe si et seulement si l'application Φ suivante est bijective :

$$\Phi : \quad \begin{aligned} &\prod_{i=1}^{p} F_i \to F_1 + ... + F_p \\ &(x_1, ..., x_p) \to x_1 + ... + x_p \end{aligned}$$

En effet, dire que Φ est bijective, c'est exactement dire que tout vecteur x de la somme se décompose de manière unique en $x_1 + ... + x_p$.

EXEMPLE :

❑ $\mathbf{R}^3$ est la somme directe des trois droites engendrées par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il est somme (mais pas directe) des plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Dans le cas de la dimension finie, on a :

(i) Une base de la somme directe s'obtient en réunissant les bases de tous les sous-espaces vectoriels F_i.

(ii) $\dim (F_1 \oplus ... \oplus F_p) = \dim(F_1) + ... + \dim(F_p)$. On peut d'ailleurs remarquer que le membre de droite est égal à $\dim(\prod_{i=1}^{p} F_i)$. En effet, si pour tout i, F_i admet pour base (e_{ij}), alors on vérifiera qu'une base de $\prod_{i=1}^{p} F_i$ est formée par les vecteurs $(0, 0, ..., e_{ij}, 0, ..., 0)$, e_{ij} étant situé en i-ème position.

(iii) Inversement, si on scinde une base de E en p systèmes disjoints, ces systèmes engendrent des sous-espaces vectoriels en somme directe.

(iv) En particulier, si $(v_1, ..., v_n)$ est une base, on a la somme directe : $\mathbf{K}v_1 \oplus ... \oplus \mathbf{K}v_n$ où l'on note $\mathbf{K}v$ le sous-espace vectoriel engendré par v.

(v) Si les F_i sont des sous-espaces tels que $\dim(\sum F_i) = \sum \dim(F_i)$, alors les F_i sont en somme directe. En effet, le système de vecteurs obtenus en réunissant des bases de chaque F_i est un système générateur de $\sum F_i$ et il possède $\sum \dim(F_i)$ vecteurs. Si ce nombre est égal à $\dim(\sum F_i)$, cela signifie que le nombre de vecteurs du système générateur est égal à la dimension du sous-espace vectoriel qu'il engendre, donc que ce système en est une base. La décomposition d'un vecteur de $\sum F_i$ en somme de vecteurs de F_i sera donc unique.

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) a) Montrer que U = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et V = $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ que X = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Y = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ est-il dans ce sous-espace vectoriel ? A quelle condition le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient-il à ce sous-espace ?

b) Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbf{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quelles sont les composantes d'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette base ?

c) Montrer que le système suivant forme une base de $\mathbf{R}^4$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exo.2) a) Montrer que la famille de fonctions $(\cos(nx))_{n\in\mathbf{N}}$ est libre.

b) Montrer que la famille de fonctions $(e^{ax})_{a\in\mathbf{R}}$ est libre.

Exo.3) Quel est le rang du système de vecteurs suivant, en fonction de a ?

$$\begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exo.4) Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille libre. Les familles suivantes sont–elles libres ?

a) $(u_1 - u_2, u_2 - u_3, ..., u_{n-1} - u_n, u_n - u_1)$

b) $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, ..., u_{n-1} + u_n, u_n + u_1)$

Exo.5) a) Dans $\mathbb{R}^4$, on donne : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui engendrent le sous-espace vectoriel F, et $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui engendrent le sous-espace vectoriel G. Donner les dimensions de F, G, F + G, F $\cap$ G. Donner une base de chaque sous-espace vectoriel.

b) On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A quelle condition le vecteur $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ appartient-il à ce sous-espace vectoriel ?

Exo.6) Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E, tels que :

$$\begin{cases} G \subset H \\ F \cap G = F \cap H \\ F + G = F + H \end{cases}$$

Dans le cas où les espaces sont d'abord de dimensions finies, puis dans le cas général, montrer que G = H.

Exo.7) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a+2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Etudier F $\cap$ G suivant les valeurs de a.

Exo.8) Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E. Comparer :

a) $A \cap (B + C)$ et $(A \cap B) + (A \cap C)$

b) $(A \cap B) + C$ et $(A + C) \cap (B + C)$

Exo.9) Dire si les systèmes suivants sont libres ou liés :

a) dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Dans $C^0(\mathbb{R})$:

$f_1(x) = \cos(x)$
$f_2(x) = \cos(x)\cos(2x)$
$f_3(x) = \sin(x)\sin(2x)$

c) Dans $C^0(\mathbb{R})$, avec $a < b < c$:

$f_1(x) = |x - a|$

$f_2(x) = |x - b|$

$f_3(x) = |x - c|$

Généraliser à n fonctions $f_i(x) = |x - a_i|$, $1 \leq i \leq n$, $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

d) Dans $C^0(\mathbb{R})$:

$f_1(x) = x^2 - 3x + 4$
$f_2(x) = -x + 1$
$f_3(x) = 2x^2 - x - 1$
$f_4(x) = -x^2 + 2x + 3$

Exo.10) Dans $\mathbb{R}^4$, Soit F le sous-espace d'équation $x + 3y - z + 2t = 0$ et soit G la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que F et G sont supplémentaires.

b) Donner les coordonnées du projeté de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sur F parallèlement à G, et sur G parallèlement à F.

Exo.11) a) Soit E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels. Montrer que, si $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel, alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

b) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels. Montrer que $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ est un sous-espace vectoriel. Donner un exemple où la suite est strictement croissante.

Exo.12) Dans $\mathbb{R}^4$, soit F le sous-espace engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit G le sous-espace d'équations $\begin{cases} 2x - 11y - 13z - t = 0 \\ -x + 5y + 6z + t = 0 \end{cases}$

Soit H le sous-espace d'équations $\begin{cases} -x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ x - 5y - 3z - t = 0 \end{cases}$

a) Déterminer $F \cap G$.

b) Montrer que F et H sont supplémentaires.

c) Donner l'expression du projecteur sur F parallèlement à H.

Exo.13) a) Soit $\alpha_1, ..., \alpha_n$ n réels distincts. Soit E le sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $E = \{f \mid \forall\, i, f(\alpha_i) = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de E.

b) Même question en se plaçant dans l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exo.14) Cet exercice nécessite la connaissance de ce qu'est un endomorphisme et un projecteur. Voir le chapitre L1/LINEF.PDF.

Soit E un espace vectoriel et $p_1, ..., p_n$ des endomorphismes de E vérifiant :

$\forall\ i,\ p_i^2 = p_i,$

$\forall\ i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E.$

Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F_i de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ et que, pour tout i, p_i soit le projecteur de E sur F_i, parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} F_j$.

2- Solutions

Sol.1) a) U = X + 2Y et V = 2X – Y donc Vect(U, V) $\subset$ Vect(X, Y). Par ailleurs, (U, V) est libre de même que (X, Y), donc Vect(U, V) et Vect(X, Y) sont des plans vectoriels. L'un étant inclus dans l'autre, ils sont égaux.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(X, Y) \Leftrightarrow \exists\ (\alpha, \beta),\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha X + \beta Y \Leftrightarrow \exists\ (\alpha, \beta),\ \left[\begin{array}{l} \alpha = x \\ \beta = y \\ z = x + y \end{array}\right. \Leftrightarrow z = x + y$$

b) Etant au nombre de trois dans un espace vectoriel de dimension 3, il suffit de montrer que les trois vecteurs forment un système libre. Pour cela, on peut chercher le rang des trois vecteurs en procédant comme au I-6), ou bien résoudre le système $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ et prouver que la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ou enfin, si on connaît les déterminants (voir L1/DETERMN.PDF), calculer le déterminant des trois vecteurs et constater qu'il est non nul. On cherche ensuite à exprimer $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette base, c'est-à-dire à déterminer α, β et γ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La résolution du système conduit à :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z - x - y) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Etant au nombre de quatre dans un espace vectoriel de dimension 4, il suffit de montrer que les quatre vecteurs forment un système libre. Comme dans le c), on peut chercher le rang des quatre vecteurs, ou bien résoudre le système :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

et prouver que la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, ou enfin, calculer le déterminant des quatre vecteurs.

Sol.2) a) Par l'absurde, supposons que la famille soit liée. Prenons n le plus petit possible pour lequel il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ non tous nuls tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \lambda_1\cos(x) + \lambda_2\cos(2x) + ... + \lambda_n\cos(nx) = 0$$

Du fait de la minimalité de n, on a donc $\lambda_n \neq 0$. Dérivons $2k$ fois, k étant un entier quelconque :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \lambda_1\cos(x) + \lambda_2\, 2^{2k} \cos(2x) + ... + \lambda_n\, n^{2k} \cos(nx) = 0$$

Evaluons en 0 :

$$\lambda_1 + \lambda_2\, 2^{2k} + ... + \lambda_n\, n^{2k} = 0$$

Divisons par n^{2k} :

$$\frac{\lambda_1}{n^{2k}} + \lambda_2 \left(\frac{2}{n}\right)^{2k} + ... + \lambda_{n-1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2k} + \lambda_n = 0$$

Faisons tendre k vers l'infini. On obtient $\lambda_n = 0$ d'où une contradiction.
Donc la famille est libre.
b) Par l'absurde, prenons comme ci-dessus famille supposée liée de taille minimale $\exp(a_1x)$, ..., $\exp(a_nx)$, avec $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ non tous nuls (et en particulier $\lambda_n \neq 0$ du fait de la taille minimale de la famille liée) tels que :

$$\forall x, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \exp(a_kx) = 0$$

Multiplions par $\exp(-a_nx)$.

$$\forall x, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \exp((a_k - a_n)x) = 0$$

Faisons tendre x vers $+\infty$. Tous les $\exp((a_k - a_n)x)$, $k < n$, tendent vers 0. Il reste le seul terme d'indice n, ce qui donne $\lambda_n = 0$. D'où une contradiction.

Sol.3) On a :

$$\begin{array}{cccc} V_4 & -V_3 & V_2-V_4 & V_1-V_4 \\ \begin{pmatrix}1\\3\\0\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\-3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\a\\-4\end{pmatrix} \end{array}$$

puis :

$$\begin{array}{cccc} V_4 & -V_3 & V_2-V_3-V_4 & V_1-V_4 \\ \begin{pmatrix}1\\3\\0\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\5\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\a\\-4\end{pmatrix} \end{array}$$

et enfin :

$$\begin{array}{cccc} V_4 & -V_3 & V_2-V_3-V_4 & 5V_1-5V_4-a(V_2-V_3-V_4) \\ \begin{pmatrix}1\\3\\0\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\5\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-20-a\end{pmatrix} \end{array}$$

Si $a \neq -20$, le rang du système est 4.
Si $a = -20$, le rang est 3 et le système est lié, la relation de liaison étant :

$$V_1 + 4V_2 - 4V_3 - 5V_4 = 0$$

Sol.4) a) Le système est lié, la somme de tous les vecteurs étant nulle.

b) Le système est lié si et seulement si n est pair. En effet, posons $v_i = u_i + u_{i+1}$ pour $i < n$ et $v_n = u_n + u_1$.

Si n est pair, la relation de liaison est $v_1 - v_2 + v_3 - ... + v_{n-1} - v_n = 0$

Si n est impair et si on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (u_i + u_{i+1}) + \lambda_n (u_n + u_1) = 0$, donc :

$$(\lambda_1 + \lambda_n) u_1 + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i + \lambda_{i-1}) u_i = 0$$

La famille (u_i) étant libre, on obtient le système :

$\lambda_1 + \lambda_n = 0$

$\lambda_i + \lambda_{i-1} = 0$ pour $2 \leq i \leq n$

donc $\lambda_1 + \lambda_n + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i + \lambda_{i-1})(-1)^{i-1} = 0 = 2\lambda_n$ en tenant compte du fait que n est impair. En reportant en cascade dans le système, on obtient que tous les λ_i sont nuls.

Sol.5) a) $\dim(F) = 2$. Les trois vecteurs V_1, V_2, V_3 sont liés par la relation $2V_1 - V_2 - V_3 = 0$.

$\dim(G) = 2$

$\dim(F + G) = 3$. Les quatre vecteurs V_1, V_2, V_4, V_5 sont liés par $V_1 - V_2 + V_4 = 0$

donc $\dim(F \cap G) = 1$

Une base de F est donnée par (V_1, V_2), une base de G est (V_4, V_5), une base de F + G est (V_1, V_2, V_5)

$V_4 = V_2 - V_1$ est élément de $F \cap G$. Comme on sait que $F \cap G$ est une droite, (V_4) est une base de $F \cap G$.

b) On trouvera la condition $-5x + 7y - 5z + t = 0$, soit en calculant le rang du système formé par les quatre vecteurs, ce rang devant être inférieur ou égal à 3 si les quatre vecteurs sont liés, soit en résolvant le système $\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ d'inconnues α, β, γ et de paramètres x, y, z, t. Ce système possède quatre équations et trois inconnues et on vérifiera qu'il admet une solution si et seulement si la condition indiquée sur x, y, z, t est vérifiée. Si on connaît les déterminants, on peut aussi calculer le déterminant des quatre vecteurs.

Sol.6) en dimension finie, on a

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

$\dim(F + H) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F \cap H)$

Comme $\dim(F + G) = \dim(F + H)$ et que $\dim(F \cap G) = \dim(F \cap H)$, on a donc $\dim(G) = \dim(H)$, et comme $G \subset H$, $G = H$.

En dimension quelconque :

	$x \in H$	
$\Rightarrow$	$x \in F + H$	car $H \subset F + H$
$\Rightarrow$	$x \in F + G$	car $F + H = F + G$
$\Rightarrow$	$\exists\, y \in F, z \in G$ (et donc $z \in H$), $x = y + z$	remarquer que $x - z \in H$
$\Rightarrow$	$\exists\, z \in G, \exists\, y, y = x - z \in F \cap H$	

$\Rightarrow \quad \exists\, z \in \mathrm{G}, \exists\, y, y = x - z \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ car $\mathrm{F} \cap \mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$

$\Rightarrow \quad \exists\, z \in \mathrm{G}, \exists\, y, y = x - z \in \mathrm{G}$ car $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} \subset \mathrm{G}$

$\Rightarrow \quad x = y + z \in \mathrm{G}$

Sol.7) $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha \\ (2a+2)\beta \\ \alpha a \end{pmatrix}$

$\mathrm{X} \in \mathrm{G} \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \lambda + 2a\mu \\ 0 \\ \lambda a + \mu \\ a\mu \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{X} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \lambda, \mu, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha \\ (2a+2)\beta \\ \alpha a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2a\mu \\ 0 \\ \lambda a + \mu \\ a\mu \end{pmatrix}$

Le système obtenu équivaut à $\left[\begin{array}{l} \lambda + 2a\mu = 0 \\ \alpha = 0 \\ (2a+2)\beta = \lambda a + \mu \\ a\mu = 0 \end{array}\right.$

Si $a = 0$, il se réduit à $\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = \mu \end{array}\right.$ et $\mathrm{X} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est une droite.

Si $a \neq 0$, on obtient $\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \alpha = 0 \\ (2a+2)\beta = 0 \\ \mu = 0 \end{array}\right.$ donc $\mathrm{X} = 0$. $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$

Sol.8) a) Vérifier que $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \subset \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} + \mathrm{C})$.

b) Vérifier que $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{C} \subset (\mathrm{A} + \mathrm{C}) \cap (\mathrm{B} + \mathrm{C})$

Trois droites différentes dans le plan montrent que les inclusions sont en général strictes.

Sol.9) a) Le système est lié : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

b) Le système est lié : $\forall\, x$, $\cos(x) = \cos(2x - x) = \cos(x)\cos(2x) + \sin(x)\sin(2x)$

c) Le système est libre. Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sont tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| x - a_i \right| = 0$, alors, en faisant varier x successivement dans $]a_1, a_2[$, $]a_2, a_3[$, ..., $]a_{n-1}, a_n[$ et $]a_n, +\infty[$, on obtient des fonctions polynomiales du premier degré dont les coefficients sont nuls, ce qui donne le système (en ne prenant que les coefficients de x) :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - ... - \lambda_{n-1} - \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - ... - \lambda_{n-1} - \lambda_n = 0 \\ ... \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} - \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{n-1} + \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Si on ajoute la dernière ligne à la première, on obtient $\lambda_1 = 0$, puis, si on l'ajoute à la deuxième ligne, $\lambda_2 = 0$, etc.

d) Le système est lié. Il y a quatre vecteurs dans l'espace des polynômes de degré au plus 2, qui est de dimension 3.

Sol.10) a) Les vecteurs de F sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ (-x-3y+z)/2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

F est de dimension 3. C'est un hyperplan de $\mathbf{R}^4$. F est de dimension 1. Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit de vérifier que $F \cap G = \{0\}$ car ils seront en somme directe et leur somme sera de dimension 4, donc égale à $\mathbf{R}^4$. Or un vecteur de $F \cap G$ est de la forme $\lambda(3,0,1,2)$ et doit vérifier l'équation de G, ce qui donne $\lambda = 0$.

b) Pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbf{R}^4$, écrire que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $x' + 3y' - z' + 2t' = 0$.

Résoudre le système. On trouvera la décomposition :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} - t \\ y \\ -\frac{x}{6} - \frac{y}{2} + \frac{7z}{6} - \frac{t}{3} \\ -\frac{x}{3} - y + \frac{z}{3} + \frac{t}{3} \end{pmatrix} + \frac{x + 3y - z + 2t}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le projeté sur F est $\begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} - t \\ y \\ -\frac{x}{6} - \frac{y}{2} + \frac{7z}{6} - \frac{t}{3} \\ -\frac{x}{3} - y + \frac{z}{3} + \frac{t}{3} \end{pmatrix}$. Le projeté sur G est $\frac{x + 3y - z + 2t}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sol.11) a) Par l'absurde, si $E_1 \not\subset E_2$ et $E_2 \not\subset E_1$, alors $\exists\, x \in E_1$, $x \notin E_2$, et $\exists\, y \in E_2$, $y \notin E_1$. Mais x et y sont tous deux éléments de $E_1 \cup E_2$ qui est un sous-espace vectoriel, donc $x + y \in E_1 \cup E_2$. On a par exemple $x + y \in E_1$. Mais alors $y = (x + y) - x \in E_1$ et on obtient une contradiction.

b) Soient $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ et λ un scalaire. $\exists\, n$, $x \in E_n$ et $\exists\, m$, $y \in E_m$. $\lambda x \in E_n$ donc $\lambda x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$. Pour la somme, procédons comme suit. Notons p le maximum des deux nombres n et

m. Comme la suite des espaces vectoriels est croissante, on a $x \in E_p$ et $y \in E_p$, donc $x + y$ aussi, donc $x + y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$. On a bien montré que $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
Un exemple typique est donné par $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On a $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \mathbb{R}[X]$, espace vectoriel de tous les polynômes.

Sol.12) a) Un élément de $F \cap G$ est de la forme $\alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et vérifie les équations de G, ce qui conduit au système $\begin{cases} -23\alpha - 23\beta = 0 \\ 10\alpha + 10\beta = 0 \end{cases}$ d'où $\beta = -\alpha$. $F \cap G$ est donc constitué des vecteurs colinéaires à $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) En procédant de même, on trouvera que $F \cap H = \{0\}$, donc F et H sont en somme directe. F est de dimension 2. En résolvant le système définissant H, on obtient :

$$\begin{cases} x = 6t + 3z \\ y = t \end{cases}$$

donc les éléments de H sont de la forme $\begin{pmatrix} 6t + 3z \\ t \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants et forment une base de H, qui est de dimension 2. Donc $F \oplus H$ est de dimension 4, donc est égal à $\mathbb{R}^4$. Les deux espaces sont supplémentaires.

c) On Cherche $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ élément de F donc de la forme $\alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de façon que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ vérifient les équations de H. On a donc :

$$\begin{cases} x' = 7\alpha + 6\beta \\ y' = \alpha + 2\beta \\ z' = 2\alpha + \beta \\ t' = 0 \\ -x' + 4y' + 3z' + 2t' = -x + 4y + 3z + 2t \\ x' - 5y' - 3z' - t' = x - 5y - 3z - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 7\alpha + 6\beta \\ y' = \alpha + 2\beta \\ z' = 2\alpha + \beta \\ t' = 0 \\ 3\alpha + 5\beta = -x + 4y + 3z + 2t \\ -4\alpha - 7\beta = x - 5y - 3z - t \end{cases}$$

d'où $\alpha = -2x + 3y + 6z + 9t$ et $\beta = x - y - 3z - 5t$

et finalement $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x + 15y + 24z + 33t \\ y - t \\ -3x + 5y + 9z + 13t \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol.13) a) Soit $F = \{f \mid \forall x \notin \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}, f(x) = 0\}$. Alors $E \cap F = \{0\}$ et $E + F$ est l'espace complet. En effet, la décomposition de toute fonction f en la somme $g + h$, $g \in E$, $h \in F$ s'effectue comme suit :

$$g(x) = \left[\begin{array}{l} 0 \text{ si } \exists\, i, x = \alpha_i \\ f(x) \text{ sinon} \end{array} \right.$$

$$h(x) = \left[\begin{array}{l} f(\alpha_i) \text{ si } \exists\, i, x = \alpha_i \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

b) On ne peut prendre l'espace F précédent car les éléments de F ne sont pas des fonctions continues. Pour chaque i, considérons la fonction polynomiale P_i définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_i(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1})...(x - \alpha_n)$$

et soit F le sous-espace vectoriel engendré par $P_1, ..., P_n$. On a $E \cap F = \{0\}$ car, si $f \in E \cap F$, alors, $\exists\, (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a, puisque $f \in E$:

$$0 = f(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k(\alpha_i) = \lambda_i P_i(\alpha_i) \qquad \text{car } \forall\, k \neq i,\ P_k(\alpha_i) = 0$$

donc $\lambda_i = 0$ car $P_i(\alpha_i) \neq 0$

donc $f = 0$

La somme $E + F$ est égale à $C^0(\mathbb{R})$ car toute fonction continue f se décompose en la somme $g + h$, $g \in E$, $h \in F$ sous la forme suivante :

$$h = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\alpha_k)}{P_k(\alpha_k)} P_k$$

$$g = f - h$$

On a $h \in F$. Reste à montrer que $g \in E$, i.e. $\forall\, i$, $g(\alpha_i) = 0$. Or :

$$g(\alpha_i) = f(\alpha_i) - h(\alpha_i) = f(\alpha_i) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\alpha_k)}{P_k(\alpha_k)} P_k(\alpha_i)$$

$$= f(\alpha_i) - \frac{f(\alpha_i)}{P_i(\alpha_i)} P_i(\alpha_i) \qquad \text{car } P_k(\alpha_i) = 0 \text{ si } k \neq i$$

$$= 0$$

Les polynômes $\dfrac{P_k}{P_k(\alpha_k)}$ s'appellent les **polynômes interpolateurs de Lagrange** relatifs à la famille (α_i). Voir le chapitre L1/POLYNOME.PDF.

Sol.14) Poser $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$. Alors la relation $\mathrm{Id}_E = \sum_i p_i$ montre que $E = \sum_i F_i$. En effet, tout x de E s'écrira :

$$x = \mathrm{Id}(x) = \sum_i p_i(x) \text{ avec } p_i(x) \in \mathrm{F}_i$$

Les relation $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ et $p_i^2 = p_i$ prouvent que p_i s'annule sur $\mathrm{E}_j = \mathrm{Im}(p_j)$, est égale à Id_E sur $\mathrm{F}_i = \mathrm{Im}(p_i)$ (ce qui prouvera que p_i est bien le projecteur demandé une fois la somme directe prouvée), et montrent que la somme est directe. En effet :

$$x_1 + x_2 + ... + x_p = 0 \text{ avec } x_i \in \mathrm{F}_i = \mathrm{Im}(p_i)$$

$\Rightarrow 0 = p_j(x_1 + x_2 + ... + x_p) = p_j(x_j) = x_j$

Une variante de cet exercice est utilisée dans le chapitre L2/DIAGONAL.PDF pour prouver le *théorème de décomposition des noyaux*.

◆