

ESPACES EUCLIDIENS

PLAN

I : Produit scalaire

- 1) Définition, norme associée
- 2) Inégalité de Cauchy-Schwarz
- 3) Bases orthonormées
- 4) Matrices orthogonales
- 5) Sous-espaces orthogonaux
- 6) Produit mixte et produit vectoriel
- 7) Hyperplans affines

II : Endomorphismes d'espaces euclidiens

- 1) Projecteurs et symétries orthogonales
- 2) Isométries du plan

Exercices

- 1) Énoncés
- 2) Solutions

Le but de ce chapitre est de généraliser à des espaces vectoriels de dimension quelconque les notions d'orthogonalité, de produit scalaire, de norme euclidienne, utilisées couramment dans le plan vectoriel ou l'espace de dimension 3. Le fondement de toutes ces notions est celui de produit scalaire.

I : *Produit scalaire*

1- Définition, norme associée

DEFINITION

Un espace vectoriel E sur \mathbf{R} est dit **préhilbertien** s'il est muni d'un **produit scalaire**, à savoir une **forme bilinéaire symétrique** \langle , \rangle **définie positive**, ce qui signifie :

(i) Pour tout y de E , l'application de E dans \mathbf{R} qui à x associe $\langle x, y \rangle$ est linéaire. Pour tout x , l'application de E dans \mathbf{R} qui à y associe $\langle x, y \rangle$ est linéaire.

(ii) $\forall x \in E, \forall y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iv) $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$

Si E est de dimension finie, E est dit **euclidien**. On note aussi le produit scalaire $x.y$ s'il n'y a pas ambiguïté avec un autre produit.

EXEMPLES :

□ Si $E = \mathbf{R}^n$, on dispose du produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

□ si $E = C^0([a, b])$, espace des fonctions continues sur $[a, b]$, E peut être muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Le seul point délicat à montrer est le (iii). Si on a $\langle f, f \rangle = 0$, alors $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. On a alors

l'intégrale d'une fonction **continue** positive ou nulle qui est nulle, donc (voir L1/INTEGRAL.PDF pour la démonstration) cette fonction est identiquement nulle. Ainsi, $\forall t, f(t)^2 = 0$, donc $f = 0$

□ Sur \mathbf{R}^3 , la forme $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 - z_1 z_2$ est une forme bilinéaire symétrique mais $\langle X, X \rangle$ n'est pas toujours positif. Il ne s'agit pas d'un produit scalaire.

□ Sur l'espace des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dispose du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$, où Tr désigne la trace (voir le chapitre L1/LINEF.PDF) et A^T est la matrice transposée de A . En effet, si A a pour terme général a_{ij} et B a pour terme général b_{ij} , $\text{Tr}(A^T B)$ n'est autre que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, qui est le produit scalaire canonique de \mathbf{R}^{n^2} , où les coefficients sont disposés en tableau carré plutôt qu'en colonne.

Le caractère bilinéaire fait que le produit scalaire se comporte effectivement comme un produit. Ainsi, en utilisant la linéarité par rapport au premier vecteur, puis la linéarité par rapport au second vecteur, on a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y, \alpha u + \beta v \rangle &= \lambda \langle x, \alpha u + \beta v \rangle + \mu \langle y, \alpha u + \beta v \rangle \\ &= \lambda(\alpha \langle x, u \rangle + \beta \langle x, v \rangle) + \mu(\alpha \langle y, u \rangle + \beta \langle y, v \rangle) \\ &= \lambda \alpha \langle x, u \rangle + \lambda \beta \langle x, v \rangle + \mu \alpha \langle y, u \rangle + \mu \beta \langle y, v \rangle \end{aligned}$$

exactement comme si on avait effectué le produit :

$$(\lambda x + \mu y) \times (\alpha u + \beta v) = \lambda \alpha x u + \lambda \beta x v + \mu \alpha y u + \mu \beta y v$$

Le caractère symétrique est comparable à une commutativité du produit $xy = yx$.

Il en résulte que le carré scalaire se développe comme un carré :

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$$

Le fait que l'on ait $\forall x, \langle x, x \rangle \geq 0$ permet de définir une **norme** dite euclidienne associée au produit scalaire :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Cette norme vérifie les propriétés suivantes :

$$a) \forall x \in E, \|x\| \geq 0 \text{ et } \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$b) \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$c) \forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

La propriété a) découle du fait que $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. La propriété b) se déduit de $\langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle$ en raison de la bilinéarité. La propriété c) n'est absolument pas évidente et est démontrée dans le paragraphe suivant.

Cette norme permet de définir une distance entre deux vecteurs x et y (considérés ici plutôt comme des points lorsque E est vu comme espace affine), à savoir $\|x - y\|$.

On peut retrouver le produit scalaire à partir de la norme. En effet :

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

En effet, on a :

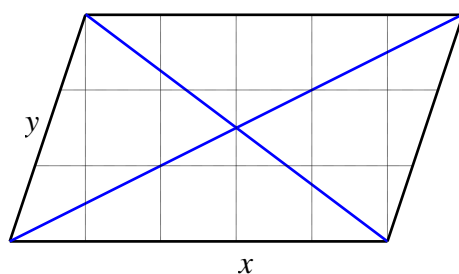
$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

De même :

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Ces relations sont dites **identités de polarisation**.

On peut interpréter l'égalité $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ en disant que le produit scalaire de deux vecteurs x et y est égal au quart de la différence des carrés des longueurs des deux diagonales du parallélogramme construit selon x et y .



Dans la figure ci-dessus, $\langle x, y \rangle = 5$ alors que $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (3\sqrt{5})^2 - 5^2 = 20$.

On a aussi l'identité dite du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

qui énonce que la somme des carrés des longueurs des diagonales ($x + y$ et $x - y$) d'un parallélogramme (de côtés x et y) est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés. Dans la figure précédente, le parallélogramme est construit selon deux vecteurs, x de norme 5, et y de norme $\sqrt{10}$. La grande diagonale est portée par le vecteur $x + y$ et a pour longueur $3\sqrt{5}$ alors que la petite diagonale est portée par $x - y$ et a pour longueur 5. On a bien :

$$(3\sqrt{5})^2 + 5^2 = 2 \times 25 + 2 \times 10 = 70.$$

2- Inégalité de Cauchy-Schwarz

PROPOSITION

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire \langle , \rangle . Alors :

$$(i) \forall x \in E, \forall y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$(ii) \forall x \in E, \forall y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

Commençons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Démonstration 1 :

□ Considérons l'application suivante :

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$t \rightarrow \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle$$

Si $\langle y, y \rangle$ est nul, alors $y = 0$ et $\langle x, y \rangle$ aussi et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée. On peut d'ailleurs se dispenser de l'hypothèse $\langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0$ en remarquant que, si $\langle y, y \rangle = 0$, alors :

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle$$

et cette quantité, qui est une fonction affine de t , ne peut être positive pour tout t que si $\langle x, y \rangle = 0$. Cette remarque permet de voir que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique à toute forme bilinéaire symétrique positive (i.e. $\forall y, \langle y, y \rangle \geq 0$), sans être définie positive.

Si $\langle y, y \rangle$ est non nul, il s'agit d'un trinôme de second degré positif ou nul pour tout t donc qui ne peut posséder deux racines réelles distinctes (sinon son signe change au moment où la variable t passe par l'une des racines). Son discriminant est donc négatif ou nul. Donc :

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

d'où l'on déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On remarque que l'égalité $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ exprime le fait que le discriminant est nul, et donc qu'il existe une racine double t qui annule $\langle x + ty, x + ty \rangle$. Autrement dit, dans ce cas, x et y sont liés.

Démonstration 2 :

□ Comme ci-dessus, si $\langle y, y \rangle$ est nul, alors $\langle x, y \rangle$ est nul.

Sinon, on considère la quantité : $d = \left\| \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y - x \right\|$. Cette quantité représente la distance de x à la droite engendrée par y comme nous le verrons un peu plus loin. On a :

$$d^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \langle x, x \rangle - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} \geq 0 \text{ en développant } d^2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On remarque que l'égalité $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ exprime (en remontant les équivalences) le fait que $d = 0$, et donc que $x = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y$. Autrement dit, dans ce cas, x et y sont liés.

Démonstration 3 (partielle) :

□ Signalons une démonstration très simple dans le cas du produit scalaire canonique de \mathbf{R}^n , et donnée par Cauchy¹ en 1821. Il suffit de constater que (**identité de Lagrange**) :

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 + \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

¹ A.-L. Cauchy, Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique Royale, Ière partie, Analyse numérique, Debure frères (1821), 455-456, <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8626657t/f481.item>

pour conclure que $|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)}$

Le cas général, dû à Schwarz, date de 1885.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de définir le **cosinus** de deux vecteurs comme étant égal à $\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ puisque ce nombre est compris entre -1 et 1 .

Passons maintenant à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\ \Leftrightarrow \|x + y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle &\leq 2\|x\| \|y\| \text{ en développant et en simplifiant} \end{aligned}$$

ce qui est vrai puisque $\langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ d'après l'inégalité de Schwarz

EXEMPLE :

□ Ces inégalités s'appliquent à tout espace préhilbertien, y compris aux espaces de fonctions. Soient f et g continues sur $[a, b]$. On a alors :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$$

et

$$\sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$$

Il suffit de remarquer que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire, et appliquer les inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire correspondantes.

3- Bases orthonormées

DEFINITIONS

- (i) Un vecteur x est dit **unitaire** ou **normé** si $\|x\| = 1$.
- (ii) Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.
- (iii) Une base (e_1, \dots, e_n) est dite **orthogonale** si les vecteurs de base sont deux à deux orthogonaux.
- (iv) Une base (e_1, \dots, e_n) est dite **orthonormale** ou **orthonormée** si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont normés.

On peut remarquer que, si un système de vecteurs non nuls est constitué de vecteurs deux à deux orthogonaux, alors, ce système est libre car :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow \forall j, \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_j \rangle = 0 \Rightarrow \forall j, \alpha_j \|e_j\|^2 = 0 \Rightarrow \forall j, \alpha_j = 0$$

Pour que ce soit une base, il suffit que le nombre de ces vecteurs soit égal à la dimension de l'espace.

L'intérêt d'une base orthonormée est que le produit scalaire s'y exprime très simplement. Si

$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

alors que dans une base quelconque, on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \langle e_i, e_i \rangle$$

ou encore, si l'on note M la matrice symétrique de terme général $\langle e_i, e_j \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = X^T M Y$$

où X et Y sont les vecteurs colonnes, composantes de x et y, et X^T la ligne transposée de la colonne X. Dans le cas du produit scalaire usuel, $\langle x, y \rangle = X^T Y$.

THEOREME DE PYTHAGORE

Soit v_1, \dots, v_p une famille de vecteurs orthogonaux. Alors :

$$\|v_1 + \dots + v_p\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_p\|^2$$

Il suffit de développer le carré de gauche. Tous les doubles produits scalaires de deux vecteurs distincts sont nuls puisque les vecteurs sont orthogonaux.

Il est facile de construire une base orthonormée à partir d'une base orthogonale. Il suffit pour cela de diviser chaque vecteur par sa norme pour se ramener à des vecteurs unitaires. Nous allons décrire un procédé permettant de construire une base orthogonale d'un espace vectoriel de dimension finie à partir de n'importe quelle base. Ce procédé est appelé **procédé d'orthogonalisation de (Gram)-Schmidt** :

□ Prendre $\varepsilon_1 = e_1$

□ Par récurrence, on suppose que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ est une base orthogonale engendrant le même espace que (e_1, \dots, e_{k-1}) . Pour construire ε_k , écrire :

$$\varepsilon_k = e_k + \alpha_{k-1} \varepsilon_{k-1} + \dots + \alpha_1 \varepsilon_1$$

On trouve la valeur de α_j en écrivant que $\langle \varepsilon_k, \varepsilon_j \rangle = 0$. On obtient :

$$0 = \langle e_k, \varepsilon_j \rangle + \alpha_j \langle \varepsilon_j, \varepsilon_j \rangle \text{ d'où } \alpha_j.$$

(Pour simplifier les calculs, on peut au besoin prendre un multiple non nul de ε_k). Comme $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ engendre le même espace que (e_1, \dots, e_{k-1}) , ε_k est combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_k) , la composante suivant e_k étant 1. Il en résulte qu'aucun des ε_k n'est nul. Les ε forment donc une famille orthogonale libre du sous-espace vectoriel engendré qui constituera une base de E lorsqu'on arrivera au dernier vecteur.

EXEMPLE 1 :

□ Dans \mathbf{R}^4 , on se donne le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $\begin{cases} x+y=-z-t \\ x-y=-z \end{cases}$ ou à $\begin{cases} x=-z-\frac{t}{2} \\ y=-\frac{t}{2} \end{cases}$. Les éléments de ce sous-espace sont

donc de la forme $-z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de dimension 2. Une

base est donnée par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On prend $\varepsilon_1 = e_1$. On cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \alpha e_1$, avec α tel que :

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle e_1, e_2 \rangle + \alpha \langle e_1, e_1 \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

D'où $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Il suffit ensuite de normer chaque vecteur pour obtenir une base orthonormée du plan.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 2 :

□ Dans \mathbf{R}^4 , on se donne le sous-espace vectoriel d'équation $2x + 3y - z - 2t = 0$. Trouver une base orthogonale de ce sous-espace vectoriel. Une base de cet espace est :

$$e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Etant de dimension 3 dans un espace de dimension 4, il s'agit d'un hyperplan). On prend :

$$\varepsilon_1 = e_1$$

$$\varepsilon_2 = e_2 + \alpha e_1 \text{ avec } \alpha \text{ tel que } 0 = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle = \langle e_2, \varepsilon_1 \rangle + \alpha \langle e_1, \varepsilon_1 \rangle$$

$$\Rightarrow 0 = -3 + 13\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{13}$$

Pour éviter les dénominateurs, nous prendrons plutôt $\varepsilon_2 = 13e_2 + 3e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tous les coefficients

étant pairs, on obtient un vecteur plus simple en en prenant la moitié, ce qui permet de prendre

finalement $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puis $\varepsilon_3 = e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2$ avec α et β tels que :

$$\begin{cases} 0 = \langle \varepsilon_3, \varepsilon_1 \rangle = \langle e_3, \varepsilon_1 \rangle + \alpha \langle e_1, \varepsilon_1 \rangle = -3 + 13\alpha \\ 0 = \langle \varepsilon_3, \varepsilon_2 \rangle = \langle e_3, \varepsilon_2 \rangle + \beta \langle e_2, \varepsilon_2 \rangle = 2 + 182\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{13} \\ \beta = -\frac{2}{182} = -\frac{1}{91} \end{cases}$$

Nous prendrons plutôt $\varepsilon_3 = 91e_3 + 21e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ -13 \\ 91 \end{pmatrix}$ dont tous les coefficients sont multiples de

13. D'où plutôt :

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir une base orthonormale, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme, soit respectivement $\sqrt{13}$, $\sqrt{182}$, $3\sqrt{7}$.

EXEMPLE 3 :

□ Dans \mathbf{R}^2 , on considère le produit scalaire $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = xx' + \frac{1}{2}(xy' + yx') + yy'$. La base canonique (e_1, e_2) n'est pas orthonormée. On obtient une base orthogonale en posant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 \\ \varepsilon_2 &= e_2 + \lambda e_1 \end{aligned}$$

avec λ vérifiant $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$.

Il suffit ensuite de normer les vecteurs.

On dispose d'un théorème de la base orthonormée incomplète.

THEOREME

Soit E un espace euclidien de dimension n et (e_1, \dots, e_p) une famille orthonormée. Alors il est possible de compléter (e_1, \dots, e_p) en une base orthonormée.

Démonstration :

□ On complète d'abord (e_1, \dots, e_p) en une base de E , puis on lui applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Celui-ci ne va pas modifier les p premiers vecteurs qui sont déjà orthogonaux.

4- Matrices orthogonales

Soit (e_1, \dots, e_n) et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases orthonormées d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n . On s'intéresse à la matrice de passage P de la première base la seconde. Notons P_j la j -ème colonne de P et P_{ij} le terme général de P . La colonne P_j est constituée des composantes de ε_j dans la base initiale (e_1, \dots, e_n) . Comme (e_1, \dots, e_n) est orthonormée, on a, pour tout i et tout j :

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \sum_{k=1}^n P_{ki} P_{kj}$$

Comme $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est également orthonormée, on a $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$. Ainsi, pour tout i et j , on a $\sum_{k=1}^n P_{ki} P_{kj} = \delta_{ij}$. Mais on reconnaît dans $\sum_{k=1}^n P_{ki} P_{kj}$ le terme (i, j) du produit de matrices $P^T P$. On a donc :

$$\forall i, \forall j, (P^T P)_{ij} = \delta_{ij}$$

ce qui signifie que $P^T P = I_n$. Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $P^T P = I_n$ s'appelle une **matrice orthogonale** et nous venons de montrer qu'une matrice de changement de base d'une base orthonormée à une autre est une matrice orthogonale.

Les matrices orthogonales possèdent la propriété remarquable que leur inverse est égale à leur transposée. En effet, $P^T P = I_n \Rightarrow P^{-1} = P^T$. Cela rend le calcul des formules de changement de base particulièrement aisé. Si X est la colonne des composantes d'un vecteur x dans la base (e_1, \dots, e_n) et qu'on cherche la colonne Y de ses composantes dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, on a :

$$Y = P^{-1} X = P^T X$$

et l'on n'a pas besoin de calculer l'inverse de P , ce qui peut se révéler fastidieux en général.

Pour une matrice orthogonale, on a de plus :

$$\det(P^T P) = 1 = \det(P^T) \det(P) = \det(P)^2$$

donc $\det(P) = \pm 1$.

Enfin, si le changement de bases orthonormées se fait d'une d'une base directe à une autre base directe, on a $\det(P) > 0$. Donc $\det(P) = 1$. (Voir L1/DETERMNT.PDF pour les notions d'orientation de l'espace). L'étude générale des matrices orthogonales est effectuée dans L2/PREHILB.PDF

5- Sous-espaces orthogonaux

DEFINITION

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel préhilbertien E sont dits **orthogonaux** si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$$

Si on est en dimension finie, il suffit de vérifier que les vecteurs d'une base de F sont orthogonaux aux vecteurs d'une base de G . Par ailleurs, F et G sont en somme directe. En effet, soit x élément de $F \cap G$. On a :

$$\forall y \in F, \forall z \in G, \langle y, z \rangle = 0$$

Or $x \in F$ et $x \in G$

donc $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$.

DEFINITION

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E préhilbertien n . On appelle **orthogonal** de F l'ensemble des vecteurs y de E tels que :

$$\forall x \in F, \langle x, y \rangle = 0$$

Si F est de dimension finie, pour appartenir à l'orthogonal de F , il suffit de vérifier l'orthogonalité avec une base de F .

L'orthogonal de E est $\{0\}$ car si x est orthogonal à E, alors : $\forall y, \langle y, x \rangle = 0$. En particulier, pour $y = x$, on obtient $\langle x, x \rangle = 0$ et donc $x = 0$.

Il est facile de montrer que l'orthogonal de F, noté F^\perp ou F^0 est un sous-espace vectoriel de E, orthogonal à F. Nous allons montrer que, **si F est de dimension finie**, ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.

PROPOSITION

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E, alors $E = F \oplus F^\perp$.

Démonstration :

□ Nous savons déjà que F et F^\perp sont en somme directe.

Nous allons maintenant montrer que $E = F + F^\perp$. Pour cela, considérons (e_1, \dots, e_m) une base

orthonormée de F. Soit x élément de E. Considérons l'application p définie par $p(x) = \sum_{i=1}^m \langle e_i, x \rangle e_i$.

On note que $p(x)$ appartient à F. Vérifions que $x - p(x)$ appartient à F^\perp . Il suffit de montrer que son produit scalaire avec chaque e_j de la base de F est nul :

$$\begin{aligned} \langle e_j, x - p(x) \rangle &= \langle e_j, x - \sum_{i=1}^m \langle e_i, x \rangle e_i \rangle \\ &= \langle e_j, x \rangle - \sum_{i=1}^m \langle e_i, x \rangle \langle e_j, e_i \rangle \\ &= \langle e_j, x \rangle - \langle e_j, x \rangle = 0 \end{aligned}$$

On a donc $x = p(x) + (x - p(x))$ élément de $F + F^\perp$. $p(x)$ est le **projeté orthogonal** de x sur F, et p s'appelle **projecteur orthogonal** sur F (ou projection orthogonale).

On peut aussi raisonner comme suit lorsque E est de dimension finie, toujours avec une base orthonormée (e_1, \dots, e_m) de F. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbf{R}^m \\ \Phi \quad x &\rightarrow \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \dots \\ \langle x, e_m \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Φ est une application linéaire. Son noyau est F^\perp . Son image est \mathbf{R}^m . En effet, un antécédent de

$(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$. D'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{Ker}(\Phi)) + \dim(\text{Im}(\Phi)) \\ &= \dim(F^\perp) + m \\ &= \dim(F^\perp) + \dim(F) \\ &= \dim(F \oplus F^\perp) \end{aligned}$$

donc $E = F \oplus F^\perp$.

La quantité $\|x - p(x)\|$ s'appelle **distance** de x à F . Si on considère la quantité $\|x - z\|$ lorsque z décrit F , celle-ci atteint son minimum pour $z = p(x)$. En effet, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|x - p(x) + p(x) - z\|^2 \quad \text{avec } x - p(x) \text{ élément de } F^\perp \text{ et } p(x) - z \text{ élément de } F \\ &= \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - z\|^2 \quad \text{car } \langle x - p(x), p(x) - z \rangle = 0 \\ &\geq \|x - p(x)\|^2\end{aligned}$$

En outre, pour $z = 0$:

$$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$$

Il en résulte que :

$$\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^n |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{inégalité de Bessel})$$

p n'est autre que le projecteur orthogonal de E sur F . Si E est de dimension finie, on a :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$$

puisqu'on vient de montrer que $E = F \oplus F^\perp$.

PROPOSITION

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

$$(i) \quad F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$$

$$(ii) \quad F \subset (F^\perp)^\perp$$

$$(iii) \quad \text{Si } E \text{ est de dimension finie, alors } (F^\perp)^\perp = F$$

Démonstration :

$$\square (i) : x \in G^\perp \Rightarrow \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \in F^\perp$$

$$\square (ii) : x \in F \Rightarrow \forall y \in F^\perp, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \in (F^\perp)^\perp$$

$\square (iii) : \dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$ mais aussi $\dim(E) = \dim(F^\perp) + \dim((F^\perp)^\perp)$ donc $\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp)$. Comme F est inclus dans $(F^\perp)^\perp$ et que les deux sous-espaces vectoriels ont même dimension, ils sont égaux.

La propriété (iii) peut être fausse en dimension infinie. On peut montrer que, si $E = C^0([0,1])$ et F est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales, pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

on a $F^\perp = \{0\}$, et $(F^\perp)^\perp = E \neq F$. Dans ce cas, on a également $F \oplus F^\perp = F \neq E$. Le cas de la dimension infinie est donc contraire aux habitudes que l'on a en dimension finie.

Si A est une partie de E , on appelle **orthogonal** de A l'ensemble des vecteurs x tels que :

$$\forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0$$

Cet orthogonal est identique à l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par A .

EXEMPLE :

□ Dans \mathbf{R}^3 , le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$. Cette propriété se généralise en dimension quelconque de la façon suivante.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$. Si on pose $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on constate que $H = \{x \in \mathbf{R}^n, \langle u, x \rangle = 0\}$. Considérons la forme linéaire $\varphi : x \in \mathbf{R}^n \rightarrow \langle x, u \rangle \in \mathbf{R}$ (une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans le corps de base). $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R} non nul car $\varphi(u) = \|u\|^2 \neq 0$, donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbf{R}$. Comme $H = \text{Ker}(\varphi)$, le théorème du rang montre que $\dim(H) = n - 1$. H s'appelle **hyperplan orthogonal** à u .

Plus généralement, dans un espace vectoriel euclidien quelconque, soit φ une forme linéaire non nulle et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E . Soit $a_i = \varphi(e_i)$. Dans cette base, pour tout x de E de la forme $\sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \langle u, x \rangle \quad \text{en posant } u = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i$$

On a alors $\text{Ker}(\varphi) = \{u\}^\perp$, sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$. Réciproquement tout sous-espace vectoriel H de dimension $\dim(E) - 1$ est de cette forme. Prendre une base orthonormée (e_1, \dots, e_{n-1}) de H et la compléter en une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E . Alors $H = \{e_n\}^\perp$.

6- Produit mixte et produit vectoriel

Au cours du raisonnement tenu dans le paragraphe précédent, on a montré que toute forme linéaire φ d'un espace vectoriel euclidien (de **dimension finie** donc) est issu d'un produit scalaire :

$$\exists u, \forall x, \varphi(x) = \langle u, x \rangle.$$

u est unique car si on a deux vecteurs u et v tels que : $\forall x, \langle u, x \rangle = \langle v, x \rangle$, alors :

$$\forall x, \langle u - v, x \rangle = 0$$

donc $u - v \perp E$

donc $u - v = 0$ et $u = v$.

L'existence de u n'est pas assurée si on n'est plus en dimension finie. Soit en effet E l'espace $C^0([0,1])$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

La forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}$, qui à f associe $\varphi(f) = f(0)$ ne peut être définie à partir du produit scalaire. En effet, par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction g telle que : $\forall f, \varphi(f) = \langle f, g \rangle$. Prenons, pour tout entier n strictement positif, f_n défini par $f_n(x) = 1 - nx$ sur $[0, \frac{1}{n}]$ et 0 ailleurs. On devrait avoir :

$$\varphi(f_n) = f_n(0) = 1 = \langle f_n, g \rangle = \int_0^1 f_n(t)g(t) dt = \int_0^{1/n} (1 - nt)g(t) dt.$$

Or l'intégrale est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{n} \text{Max} \{|g(t)|, t \in [0, 1]\}$, quantité qui tend vers 0 quand n tend vers ∞ . Le passage à la limite conduit à l'absurdité $1 = 0$.

Soit maintenant E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Pour tous vecteurs u, v, w de E , la quantité $\det(u, v, w)$, calculée dans une **base orthonormée directe** quelconque, s'appelle **produit mixte** de u, v, w , noté $[u, v, w]$. Elle ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. En effet, si on effectue un changement de base avec une matrice de passage P , alors le déterminant calculé dans la première base est égal au produit par $\det(P)$ du déterminant calculé dans la deuxième base. Mais si on passe d'une base orthonormée directe à une autre, P est une matrice orthogonale telle que $\det(P) = 1$, comme on l'a vu plus haut, et dans ce cas, les déterminants calculés dans les deux bases sont égaux.

Fixons u et w et considérons la forme linéaire $\varphi : w \rightarrow [u, v, w]$, où $[u, v, w]$ est le produit mixte précédemment défini. φ étant une forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique vecteur, noté $u \wedge v$, tel que :

$$\forall w, \varphi(w) = [u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$$

$u \wedge v$ s'appelle **produit vectoriel** de u et v . Les propriétés de ce produit vectoriel sont données dans L1/DETERMN.PDF.

7- Hyperplans affines

Si H est un hyperplan vectoriel, on appelle **vecteur normal** à H tout vecteur orthogonal à H et unitaire. Comme l'orthogonal de H est une droite D , il n'existe que deux vecteurs normaux, opposés l'un de l'autre. Le choix de tel ou tel vecteur normal n revient à orienter la droite D . L'équation de H est :

$$x \in H \Leftrightarrow \langle x, n \rangle = 0$$

Soit λ un réel quelconque. L'ensemble $H_\lambda = \{x, \langle x, n \rangle = \lambda\}$ s'appelle **hyperplan affine**. Il est non vide car il contient l'élément λn , et si a est un élément quelconque de $H_0 = H$, on a :

$$\begin{aligned} H_\lambda &= \{x, \langle x, n \rangle = \lambda\} = \{x, \langle x, n \rangle = \langle a, n \rangle\} = \{x, \langle x - a, n \rangle = 0\} \\ &= \{x, x - a \in H\} \end{aligned}$$

On dit que H_λ est l'hyperplan affine passant par a de direction vectorielle H . Il est souvent judicieux de considérer les éléments de H comme des vecteurs, mais ceux de H_λ comme des points. Si A et M sont deux points, on note $M - A$ le vecteur \overrightarrow{AM} .

Mais on peut aussi considérer les éléments de H comme des points tout comme les éléments de E , et a comme un vecteur. H_λ est alors obtenu par translation de vecteur a de H .

$$H_\lambda = \{a + y, y \in H\}$$

EXEMPLES :

□ Dans \mathbf{R}^3 , le plan affine d'équation $2x - y + z = 3$ passe par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et possède comme

vecteur normal le vecteur $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit x un élément de E , considérer comme un point. La distance de x à H_λ est :

$$d(x, H_\lambda) = \inf_{z \in H_\lambda} \|x - z\|$$

Mais comme z s'écrit $a + y$, a donné dans H_λ , y quelconque dans H , on voit que :

$$d(x, H_\lambda) = \inf_{y \in H} \|x - a - y\| = d(x - a, H)$$

On a vu plus haut que, pour déterminer cette distance, il suffit de projeter orthogonalement $x - a$ sur H et de prendre la norme de la différence entre $x - a$ et son projeté. Ce projeté vaut :

$$x - a - \langle x - a, n \rangle n$$

donc la différence avec $x - a$ vaut $\langle x - a, n \rangle n$, projeté de $x - a$ sur $D = H^\perp$. Donc :

$$d(x, H_\lambda) = |\langle x - a, n \rangle| = |\langle \overrightarrow{AM}, n \rangle| \text{ si on préfère noter } a \text{ et } x \text{ comme des points } A \text{ et } M$$

On notera que $\langle x - a, n \rangle = 0$ est précisément l'équation de H_λ , les coefficients de l'équation dans une base orthonormée étant les composantes de n .

□ Dans \mathbf{R}^3 , quelle est la distance de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ au plan d'équation $2x - y + z = 3$? Cette équation peut

s'écrire avec un vecteur normal unitaire sous la forme $\frac{2x - y + z - 3}{\sqrt{6}} = 0$. La distance de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à ce

plan est précisément $\left| \frac{2x - y + z - 3}{\sqrt{6}} \right|$.

II : Endomorphismes d'espaces euclidiens

1- Projecteurs et symétries orthogonales

Du fait que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie E est un supplémentaire de F , on peut définir un projecteur orthogonal sur F (parallèlement à F^\perp) et une symétrie orthogonale par rapport à F (parallèlement à F^\perp). On décompose tout x de E sous la forme :

$$x = x_F + x_{F^\perp} \text{ avec } x_F \in F \text{ et } x_{F^\perp} \in F^\perp$$

Le **projecteur orthogonal** p_F sur F est alors l'application linéaire $x \rightarrow x_F$

Nous avons vu précédemment que, si (e_1, \dots, e_m) est une base orthonormée de F , alors :

$$x_F = p_F(x) = \sum_{i=1}^m \langle e_i, x \rangle e_i$$

$$x_{F^\perp} = x - x_F$$

La **symétrie orthogonale** s_F par rapport à F est l'application linéaire $x \rightarrow x_F - x_{F^\perp}$

Le projecteur orthogonal p_{F^\perp} sur F^\perp est l'application linéaire $x \rightarrow x_{F^\perp}$

La symétrie orthogonale s_{F^\perp} par rapport à F^\perp est l'application linéaire $x \rightarrow -x_F + x_{F^\perp}$

Dans le cas d'un hyperplan H, orthogonal à une droite D, les projecteurs et symétries orthogonaux relatifs à F ou F^\perp s'expriment très simplement. Soit u un vecteur unitaire orthogonal à H (vecteur directeur de la droite D). On a :

$$x = \underbrace{(x - \langle x, u \rangle u)}_{= v} + \underbrace{\langle x, u \rangle u}_{\in D}$$

avec v élément de H. Il suffit en effet de prouver que v est orthogonal à u :

$$\langle v, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle x, u \rangle \langle u, u \rangle = 0 \quad \text{car } \langle u, u \rangle = 1$$

On a donc $v = x_H$ et $x_{H^\perp} = x - x_H = \langle x, u \rangle u = x_D$ donc :

Projecteur orthogonal sur D : $p_D(x) = \langle x, u \rangle u$. Si u n'est pas unitaire, on appliquera cette formule en considérant le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$ ce qui donnera $p(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$.

L'expression de p_D se retrouve aussi à partir de l'expression générale $p(x) = \sum_{i=1}^m \langle e_i, x \rangle e_i$ où la base orthonormée (e_1, \dots, e_m) de D se réduit ici au seul vecteur u .

Projecteur orthogonal sur H : $p_H(x) = x - \langle x, u \rangle u$. Cette expression de p_H est bien plus simple que celle obtenue par $p_H(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, x \rangle e_i$ pour laquelle il faudrait déterminer une base orthonormée (e_1, \dots, e_{n-1}) de H.

Symétrie orthogonale par rapport à D : $s_D(x) = 2\langle x, u \rangle u - x = p_D(x) - p_H(x)$

Symétrie orthogonale par rapport à H : $s_H(x) = x - 2\langle x, u \rangle u = p_H(x) - p_D(x) = -s_D(x)$

On utilise la décomposition de x précédemment mise en évidence.

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan s'appelle une **réflexion**.

Les cas précédents permettent de traiter tous les cas de symétries et de projecteurs orthogonaux dans un espace de dimension 3.

EXEMPLE :

□ Dans \mathbf{R}^3 , déterminer le projecteur sur le plan H d'équation $2x - y + z = 0$.

Ce plan est orthogonal à $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendrant une droite D. Le projecteur sur D est défini par :

$$p_D\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \frac{2x - y + z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le projecteur sur H est défini par :

$$p_H\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2x - y + z}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2x + 2y - 2z \\ 2x + 5y + z \\ -2x + y + 5z \end{pmatrix}$$

Dans le cas général d'un projecteur orthogonal sur F ou d'une symétrie orthogonale par rapport à F^\perp ,

si (e_i) est une base orthonormée de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F (et donc les $n - p$ restants une base de F^\perp), la matrice du projecteur p et de la symétrie s sont respectivement les matrices par blocs suivantes :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$

2- Isométries du plan

Soit E un espace vectoriel euclidien. On s'intéresse aux endomorphismes u qui préserve la norme, c'est-à-dire tels que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

De tels endomorphismes sont qualifiés d'**orthogonaux** ou d'**isométries vectorielles**. L'étude complète de ces endomorphismes est conduite dans L2/PREHILB.PDF. Nous nous bornons ici à étudier le cas du plan euclidien.

Soit u un endomorphisme orthogonal. Alors, il conserve le produit scalaire. En effet :

$$\forall x, \forall y, \langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

donc, en appliquant cette relation à $u(x)$ et $u(y)$:

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \frac{\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2}{2}$$

$$\Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = \frac{\|u(x + y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2}{2} \quad \text{car } u \text{ est linéaire}$$

$$\Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \quad \text{car } u \text{ préserve la norme}$$

$$= \langle x, y \rangle$$

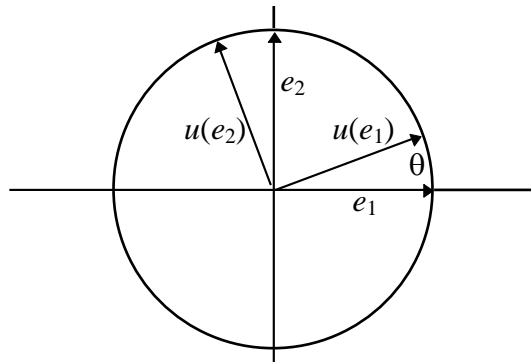
Si (e_1, e_2) est une base orthonormée directe du plan euclidien, on a donc $u(e_1)$ et $u(e_2)$ qui sont unitaires (car u conserve la norme) et orthogonaux (car u conserve le produit scalaire). Donc $(u(e_1), u(e_2))$ est une autre base orthonormée du plan.

Appelons θ l'angle entre e_1 et $u(e_1)$. On a :

$$u(e_1) = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2$$

Il ne reste alors que deux possibilités pour $u(e_2)$.

i) ou bien $u(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$. La base $(u(e_1), u(e_2))$ est orthonormée directe. La matrice de u dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. u s'appelle la rotation d'angle θ . Notons-la R_θ .



Pour tout θ et φ , la composée $R_\theta \circ R_\varphi$ n'est autre que la rotation $R_{\theta+\varphi}$, puisqu'effectuer une rotation plane d'angle φ suivie d'une rotation plane d'angle θ est équivalent à effectuer une rotation plane d'angle $\theta + \varphi$. La matrice de $R_\theta \circ R_\varphi$ est :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) - \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

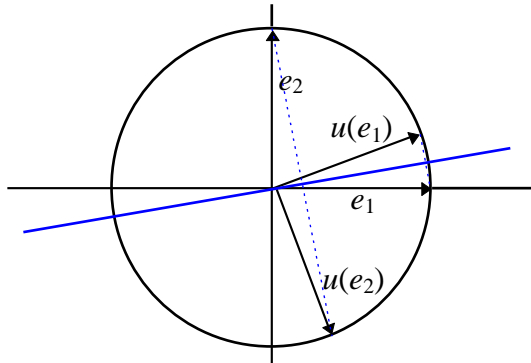
La comparant à celle de $R_{\theta+\varphi}$, on obtient une démonstration algébrique des formules trigonométriques :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)$$

ii) ou bien $u(e_2) = \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2$. La base $(u(e_1), u(e_2))$ est orthonormée indirecte. La matrice de u dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Le lecteur pourra vérifier qu'il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec e_1 en montrant que le vecteur directeur de

la droite $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$ est invariant, et que le vecteur normal à la droite $\begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$ est changé en son opposé.



Les deux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ sont aussi des matrices de changement de base d'une base orthonormée à une autre. Ce sont des matrices orthogonales.

La matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ transforme une base orthonormée directe en base orthonormée directe. Elle conserve l'orientation de la base. Son déterminant vaut 1.

La matrice de réflexion $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ transforme une base orthonormée directe en base orthonormée indirecte. Elle inverse l'orientation de la base. Son déterminant vaut -1 .

Exercices

1- Enoncés

Exo.1) Soit E un espace muni d'une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symétrique telle que :

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\forall x \in E, (\forall y \in E, \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow x = 0$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

Exo.2) On considère n particules de masse m_1, \dots, m_n se déplaçant initialement le long d'un axe avec des vitesses v_1, \dots, v_n de signe quelconque. On suppose qu'à la suite d'interactions internes aux particules, elles finissent par se déplacer à la même vitesse v . Les interactions étant seulement internes, il y a conservation de la quantité de mouvement :

$$(m_1 + \dots + m_n)v = m_1v_1 + \dots + m_nv_n$$

a) Prouver qu'il y a diminution de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} (m_1 + \dots + m_n) v^2 \leq \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dots + \frac{1}{2} m_n v_n^2$$

b) A quelle condition y a-t-il conservation de l'énergie cinétique ?

Exo.3) Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E , u et v deux éléments de F , w un élément de E , d la distance de w à F .

a) Montrer que :

$$\|u - v\| \leq \sqrt{\|w - u\|^2 - d^2} + \sqrt{\|w - v\|^2 - d^2}$$

b) A quelle condition sur w a-t-on égalité ?

Exo.4) Soit E un espace euclidien, (v_1, \dots, v_p) un système générateur de E et x un vecteur de E .

Montrer que, si $\sum_{i=1}^p \langle v_i, x \rangle v_i = 0$, alors $x = 0$.

Exo.5) Dans un espace vectoriel euclidien, la connaissance des produits scalaires $\langle e_i, u \rangle$ d'un vecteur u avec les vecteurs d'une base orthonormée suffit à reconstituer le vecteur à l'aide de la

formule $u = \sum_{i=1}^n \langle e_i, u \rangle e_i$. Donner une formule, en dimension 3, permettant de reconstituer le vecteur

u à partir des produits vectoriels $u \wedge e_i$, $1 \leq i \leq 3$, de u avec les vecteurs d'une base orthonormée directe.

Exo.6) Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, montrer que :

$$(u, v, w) \text{ libre} \Leftrightarrow (u \wedge v, u \wedge w) \text{ libre}$$

Exo.7) Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, on se donne deux vecteurs a et b . Montrer qu'il existe un et un seul vecteur x vérifiant $x + a \wedge x = b$, et en donner une expression à partir de a et b .

Exo.8) Soit \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour A élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, calculer

$$\inf \left\{ \sum_{i,j} (A_{ij} - M_{ij})^2, M \in \mathcal{S}_n \right\}.$$

Exo.9) Soient u_1, u_2, \dots, u_{n+1} $n + 1$ vecteurs de \mathbf{R}^n vérifiant : $\forall i \neq j, (u_i | u_j) < 0$, où $(|)$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbf{R}^n .

- Montrer que n vecteurs parmi eux forment toujours une base de \mathbf{R}^n .
- Montrer qu'on ne peut trouver plus de $n + 1$ vecteurs réunissant ces conditions.
- Montrer qu'on peut en trouver $n + 1$.

Exo.10) Dans \mathbf{R}^2 , quelle est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $4x + 3y = 0$?

Exo.11) Quelle est la matrice du projecteur orthogonal sur le plan $x + y + z = 0$ dans \mathbf{R}^3 ?

Exo.12) a) Dans \mathbf{R}^4 , quelle est la matrice du projecteur orthogonal sur l'hyperplan d'équation :

$$5x - 2y - 2z + 4t = 0$$

b) Quelle est la matrice de la réflexion par rapport à ce plan ?

Exo.13) Dans \mathbf{R}^4 , on considère le sous-espace vectoriel F d'équations
$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

- Vérifier que $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$ appartient à F et le compléter en une base orthonormée de F.
- Déterminer la matrice du projecteur orthogonal p sur F. Quelle est la matrice de la symétrie orthogonale s par rapport à F ?

Exo.14) Dans \mathbf{R}^4 , quelle est la matrice du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel d'équations
$$\begin{cases} x + y = z + t \\ x + 3y + z = t \end{cases} ?$$

Exo.15) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E de dimension finie. On note F^\perp l'orthogonal de F.

a) Soit G un sous-espace vectoriel de E de même dimension que F et telle que $G \cap F^\perp = \{0\}$. Montrer que, pour tout x de F, il existe un unique y de G et un unique z de F^\perp tel que $x = y - z$. Vérifier que l'application $x \rightarrow z$ est une application linéaire de F dans F^\perp .

b) Réciproquement, soit f une application linéaire de F dans F^\perp . Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G tel que f soit l'application définie au a).

Exo.16) Soit E un plan vectoriel. On se donne trois demi-droites issues de 0 et telles qu'il n'existe aucun demi-plan contenant ces trois demi-droites. Montrer qu'on peut définir sur E un produit scalaire tel que l'angle entre deux quelconques de ces demi-droites soit $\pm \frac{2\pi}{3}$. Donner explicitement un tel produit scalaire lorsque $E = \mathbf{R}^2$ et que les trois demi-droites sont $\{(x, 0), x \geq 0\}$, $\{(0, y), y \geq 0\}$ et $\{(x, x), x \leq 0\}$.

Exo.17) Dans \mathbf{R}^n , on considère un sous-espace vectoriel F de dimension $p < n$, muni d'une base orthonormée (e_1, \dots, e_p) . On suppose connue la matrice $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont constituées des composantes de ces vecteurs dans la base canonique de \mathbf{R}^n .

a) On se donne un élément de F par sa colonne Y dans \mathbf{R}^n . On cherche les composantes de Y dans la base (e_1, \dots, e_p) . Comment s'exprime ces composantes à partir de la matrice M et de la colonne Y ?

b) Même question si la base de F n'est pas orthonormée

c) *Exemple* : dans \mathbf{R}^3 , $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exo.18) a) Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n de dimension p , dont une base orthonormée est (V_1, V_2, \dots, V_p) . On pose $V = (V_1 \ V_2 \ \dots \ V_p)$ matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont les V_i . Montrer que la matrice du projecteur orthogonal sur F est VV^T . Que vaut $V^T V$ (où T désigne la transposition) ?

b) Soit v élément non nul de \mathbf{R}^n . Donner une interprétation géométrique de la matrice $\frac{vv^T}{v^T v}$

Exo.19) Soit E espace vectoriel euclidien de dimension n , et p un entier strictement positif. On considère p vecteurs (v_1, v_2, \dots, v_p) de E . Soit A la matrice élément de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ de terme général $\langle v_i, v_j \rangle$, dite **matrice de Gram** du système (v_1, v_2, \dots, v_p) .

a) Montrer que $\det(A) = 0 \Leftrightarrow (v_1, v_2, \dots, v_p)$ lié. On pourra chercher à exprimer la matrice A en fonction de la matrice $V \in \mathcal{M}_{np}(\mathbf{R})$ dont la j -ème colonne, $1 \leq j \leq p$, est constituée des composantes de v_j dans une base orthonormée.

b) Plus précisément, montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(v_1, \dots, v_p)$

c) Soit B la matrice de terme général $\langle v_i, v_j \rangle$, $1 \leq i \leq p-1$, $1 \leq j \leq p-1$. Soit C la colonne de terme général $\langle v_i, v_p \rangle$, $1 \leq i \leq p-1$, et soit D le coefficient $\langle v_p, v_p \rangle$. On suppose A et B inversibles. Montrer que $\det(A) = \det(B) \times (D - C^T B^{-1} C)$.

d) Avec les hypothèses et notations du c), on projette orthogonalement v_p sur le sous-espace vectoriel engendré par $(v_1, v_2, \dots, v_{p-1})$. Soit z ce projeté. Montrer que $\|z - v_p\|^2 = \frac{\det(A)}{\det(B)}$. En déduire

$$\text{que } \det(A) \leq \prod_{k=1}^p \|v_k\|^2.$$

Exo.20) a) Prendre une matrice A élément de $\mathcal{M}_{23}(\mathbf{R})$ de rang 1 à votre gré. Calculer $S = A^T A$. Constater qu'il existe une matrice ligne B telle que $S = B^T B$

b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{rp}(\mathbf{R})$ de rang r et soit $S = A^T A$. Montrer qu'il existe une matrice B élément de $\mathcal{M}_{rp}(\mathbf{R})$ de rang r telle que $S = B^T B$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer B .

Exo.21) Soit E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , e_i' le projeté orthogonal de e_i sur F . Montrer que le nombre $\sum_{i=1}^n \|e_i'\|^2$ est indépendant du choix de la base \mathcal{B} .

Exo.22) Dans \mathbf{R}^4 , soit H un hyperplan de base orthonormée (B_1, B_2, B_3) et de vecteur normal N . Soit V un vecteur colonne n'appartenant pas à H .

a) Montrer que la matrice dans la base canonique de \mathbf{R}^4 du projecteur p de \mathbf{R}^4 sur H parallèlement à la droite engendrée par V est $\sum_{i=1}^3 B_i B_i^T \times (I_4 - \frac{1}{N^T V} V N^T)$, où N^T est la ligne transposée de la colonne N .

b) Soit (E_1, E_2, E_3) la base canonique de \mathbf{R}^3 . Si on considère maintenant que p va de \mathbf{R}^4 muni de sa base canonique dans H muni de la base (B_1, B_2, B_3) , quelle est la matrice de p ?

2- Solutions

Sol.1) Soit x un vecteur tel que $\langle x, x \rangle = 0$. Il s'agit de montrer que $x = 0$. Or, pour tout réel t et tout vecteur y , on a :

$$\begin{aligned} & \langle tx + y, tx + y \rangle \geq 0 \\ \Rightarrow & 2t\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0 \\ \Rightarrow & \langle x, y \rangle = 0 \text{ (sinon le membre de gauche décrirait } \mathbf{R}) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout y , l'hypothèse de l'énoncé permet de conclure que $x = 0$.

Sol.2) Méthode 1 :

a) On doit prouver que :

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n m_i\right)$$

C'est une inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbf{R}^n avec $a_i = \sqrt{m_i} v_i$ et $b_i = \sqrt{m_i}$

b) Il y a égalité lorsque (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) sont colinéaires, ce qui signifie que les v_i sont toutes égales.

Méthode 2 : plus générale car sans hypothèse sur la dimension de l'espace. v, v_1, \dots, v_n sont ici des vecteurs d'un espace préhilbertien quelconque :

$$\begin{aligned} & (m_1 + \dots + m_n)v = m_1 v_1 + \dots + m_n v_n \\ \Rightarrow & \langle (m_1 + \dots + m_n)v \mid v \rangle = \langle m_1 v_1 + \dots + m_n v_n \mid v \rangle \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^n m_i \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i \langle v_i \mid v \rangle \quad \text{or } \langle x \mid y \rangle = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^n m_i \|v\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v_i\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v - v_i\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v_i\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|v - v_i\|^2$$

d'où la réponse aux deux questions.

Source : Tadashi Tokieda, *A viscosity proof of the Cauchy-Schwarz inequality*, Amer. Math. Monthly, vol.122, n°8, octobre 2015, p.781.

Sol.3) a) Soit z le projeté orthogonal de w sur F . $w - z$ est orthogonal à $z - u$, et le théorème de Pythagore énonce que $\|w - u\|^2 = \|w - z\|^2 + \|z - u\|^2 = d^2 + \|z - u\|^2$ donc :

$$\sqrt{\|w - u\|^2 - d^2} = \|z - u\|$$

De même :

$$\sqrt{\|w - v\|^2 - d^2} = \|z - v\|$$

Il s'agit donc de montrer que $\|u - v\| \leq \|z - u\| + \|z - v\|$, ce qui est une simple inégalité triangulaire appliquée aux vecteurs $z - v$ et $u - z$.

b) Il y a égalité si et seulement si, dans la démonstration précédente, on a :

$$\|u - v\| = \|z - u\| + \|z - v\|$$

$$\Leftrightarrow \|u - z + z - v\| = \|z - u\| + \|z - v\|$$

$$\Leftrightarrow \langle u - z, z - v \rangle = \|z - u\| \|z - v\| \quad \text{en élevant au carré et en simplifiant}$$

$$\Leftrightarrow \langle u - z, z - v \rangle = |\langle u - z, z - v \rangle| = \|z - u\| \|z - v\|$$

$$\Leftrightarrow \langle u - z, z - v \rangle = |\langle u - z, z - v \rangle| \text{ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité}$$

$$\Leftrightarrow \langle u - z, z - v \rangle \geq 0, u - z \text{ et } z - v \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow z \text{ appartient au segment } [u, v].$$

Sol.4) On effectue le produit scalaire de $\sum_{i=1}^p \langle v_i, x \rangle v_i$ par x . On obtient $\sum_{i=1}^p \langle v_i, x \rangle^2 = 0$, donc pour tout

i , $\langle v_i, x \rangle = 0$, donc x est orthogonal au sous-espace vectoriel engendré par x , qui n'est autre que E lui-même. Donc $x = 0$.

Sol.5) On a $\sum_{i=1}^3 e_i \wedge (u \wedge e_i) = 2u$. En effet, la formule du double produit vectoriel donne :

$$e_i \wedge (u \wedge e_i) = \langle e_i, e_i \rangle x - \langle e_i, x \rangle e_i = x - \langle e_i, x \rangle e_i$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^3 e_i \wedge (u \wedge e_i) = 3x - \sum_{i=1}^3 \langle e_i, x \rangle e_i = 3x - x = 2x$$

Sol.6) Soit (u, v, w) libre. Si $\lambda(u \wedge v) + \mu(u \wedge w) = 0$ alors $u \wedge (\lambda v + \mu w) = 0$ donc u et $\lambda v + \mu w$ sont colinéaires, ce qui n'est possible que si $\lambda = \mu = 0$. Réciproquement, si $(u \wedge v, u \wedge w)$ libre et si $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, alors, en multipliant vectoriellement par u , on obtient $\beta = \gamma = 0$ et donc $\alpha = 0$ (car $u \neq 0$).

Sol.7) L'application linéaire $\phi : x \rightarrow x + a \wedge x$ est injective. En effet, x appartient à son noyau si et seulement si $x = -a \wedge x$, donc x est orthogonal à lui-même donc $x = 0$. Elle est donc surjective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie.

Cherchons maintenant $x = \varphi^{-1}(b)$.

On a $a \wedge x = b - x$, donc d'une part $\langle b - x, a \rangle = 0$ et d'autre part, en vertu de la division vectorielle (voir L1/DETERMNT.PDF) dans la relation $a \wedge x = b - x$, on a :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, x = \frac{(b-x) \wedge a}{\|a\|^2} + \lambda a = \frac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \frac{b-x}{\|a\|^2} + \lambda a$$

donc (en renommant λ) :

$$x = \frac{1}{1 + \|a\|^2} (b + b \wedge a + \lambda a)$$

On utilise la relation $\langle b, a \rangle = \langle x, a \rangle$ pour conclure que $x = \frac{1}{1 + \|a\|^2} (b + b \wedge a + \langle a, b \rangle a)$

Sol.8) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire canonique : $\langle A, B \rangle = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$. L'exercice demande de

calculer la distance de la matrice A au sous-espace vectoriel \mathcal{S}_n . Vérifier que le sous-espace vectoriel \mathcal{A}_n des matrices antisymétriques est orthogonal à \mathcal{S}_n . Comme la décomposition de A selon $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ est $\frac{A^T + A}{2} + \frac{A - A^T}{2}$, le projeté orthogonal de A sur \mathcal{S}_n est $M = \frac{A^T + A}{2}$ et c'est cette matrice

qui donnera la distance cherchée. La borne Inf vaut alors $\frac{1}{4} \sum_{ij} (A_{ij} - A_{ji})^2$.

Sol.9) Les trois points se montrent par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ ou $n = 2$ est facile à voir. Remarquer que tous les u_i sont non nuls car $(u_i | u_j) \neq 0$ si $i \neq j$.

a) Montrons par exemple que u_{n+1} joint à $n - 1$ vecteurs parmi u_1, \dots, u_n forme une base de E . Soit v_i le projeté orthogonal de u_i sur l'hyperplan H orthogonal à u_{n+1} . On a :

$$u_i = v_i + \lambda_i u_{n+1} \text{ avec } \forall i, \lambda_i < 0 \text{ car } (u_i | u_{n+1}) < 0$$

donc $(u_i | u_j) = (v_i | v_j) + \lambda_i \lambda_j$

or $(u_i | u_j) < 0$ donc $(v_i | v_j) < 0$. On applique l'hypothèse de récurrence sur (v_1, \dots, v_n) , éléments de H : $n - 1$ vecteurs quelconques parmi v_1, \dots, v_n forment une base de H . Prenons par exemple v_1, \dots, v_{n-1} . Vérifions alors que $(u_1, \dots, u_{n-1}, u_{n+1})$ est libre (et donc forme une base de E) . Soit une combinaison linéaire :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \alpha_{n+1} u_{n+1} = 0$$

En projetant orthogonalement sur H , on obtient $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = 0$ donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ donc $\alpha_{n+1} = 0$.

b) Si on disposait de u_1, \dots, u_{n+2} , on projetterait u_1, \dots, u_{n+1} orthogonalement sur l'hyperplan orthogonal à u_{n+2} . On obtiendrait v_1, \dots, v_{n+1} vérifiant les hypothèses dans un sous-espace de dimension $n - 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse de récurrence.

c) Soit u_{n+1} normé, et v_1, \dots, v_n n vecteurs de H , hyperplan orthogonal à u_{n+1} vérifiant les hypothèses en appliquant l'hypothèse de récurrence. On prend $u_i = v_i + \lambda u_{n+1}$ avec λ suffisamment petit en valeur absolue pour que $(u_i | u_j) = (v_i | v_j) + \lambda^2 < 0$. Plus précisément, λ doit vérifier $|\lambda| < \sqrt{\min_{i \neq j} - (v_i | v_j)}$

Sol.10) Une base orthonormée adaptée est $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{4x+3y}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-3x+4y}{25} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Son symétrique est $-\frac{4x+3y}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-3x+4y}{25} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

donc la matrice est $\frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$.

Sol.11) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y+z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ 2y-x-z \\ 2z-x-y \end{pmatrix}$ donc la matrice cherchée est $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Sol.12) a) $V = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à l'hyperplan. Le projeté sur l'hyperplan est :

$$X - \frac{\langle X, V \rangle}{\|V\|^2} V \text{ soit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \frac{5x-2y-2z+4t}{49} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donc la matrice est $P = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 24 & 10 & 10 & -20 \\ 10 & 45 & -4 & 8 \\ 10 & -4 & 45 & 8 \\ -20 & 8 & 8 & 33 \end{pmatrix}$

b) La matrice de la réflexion est $2P - I_4 = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -1 & 20 & 20 & -40 \\ 20 & 41 & -8 & 16 \\ 20 & -8 & 41 & 16 \\ -40 & 16 & 16 & 17 \end{pmatrix}$

Sol.13) a) On doit trouver les vecteurs tels que :

$$\begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \\ z+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-2t \\ x+y=2t \\ z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6t \\ y=-4t \\ z=-t \end{cases}$$

On prendra par exemple comme deuxième vecteur de base de F $\frac{1}{3\sqrt{6}} (6, -4, -1, 1)$.

b) Le projeté de (x, y, z, t) est :

$$\frac{z+t}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{6x-4y-z+t}{54} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où la matrice $\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 18 & -12 & -3 & 3 \\ -12 & 8 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 14 & 13 \\ 3 & -2 & 13 & 14 \end{pmatrix}$.

b) La symétrie s s'obtient en écrivant que $s = 2p - \text{Id}_4$.

Sol.14) Une base de du plan de projection est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Une base orthonormée est $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc l'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ est $\frac{x+t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-x+y-z+t}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de matrice $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Sol.15) a) On a $E = G \oplus F^\perp$ (la somme est directe et la dimension correspond). Pour obtenir z , on projette x sur F^\perp parallèlement à G , et on compose par $-\text{Id}$.

b) Si (e_1, \dots, e_d) est une base de F , prendre G engendré par les $e_i + f(e_i)$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants. En effet, si on a $\sum_{i=1}^d \lambda_i (e_i + f(e_i)) = 0$, alors :

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i = - \sum_{i=1}^d \lambda_i f(e_i)$$

qui est à la fois un vecteur de F et de $\text{Im}(f) \subset F^\perp$. Donc il est nul, et les e_i étant linéairement indépendant, tous les λ_i sont nuls. On a ainsi montré que $\dim(G) = \dim(F)$. De plus $G \cap F^\perp = \{0\}$ par un raisonnement comparable. Enfin, pour tout i , si $x = e_i$, alors $y = e_i + f(e_i)$, $z = f(e_i)$ sont tels que $y \in G$, $z \in F^\perp$ et $x = y - z$.

Sol.16) Soient u, v, w des vecteurs tels que les trois demi-droites soient $\mathbf{R}^+u, \mathbf{R}^+v$ et \mathbf{R}^+w . Comme il n'existe aucun plan contenant les trois demi-droites, u et v sont libres, donc (u, v) forme une base de E , donc il existe λ et μ (non nuls pour la même raison) tels que $w = \lambda u + \mu v$. Toujours pour la même raison, $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ (si $\lambda > 0$ par exemple, u, v, w sont dans le même demi-plan $xu + yv, x \geq 0, y \in \mathbf{R}$). Donc quitte à changer u en $-\lambda u$ et v en $-\mu v$, on peut supposer $w = -u - v$. On pose alors :

$$\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = 1 \text{ et } \langle u, v \rangle = -\frac{1}{2}$$

On a bien alors $\langle w, w \rangle = 1$ et $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2}$

Dans l'exemple, on prend $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = xx' + yy' - \frac{xy' + yx'}{2}$

Sol.17) a) On cherche $X \in \mathbf{R}^p$ tel que $MX = Y$, donc $M^\top MX = M^\top Y$, or $M^\top M = I_p$ car les coefficients de ce produit sont les produits scalaires des colonnes de M . Donc $X = M^\top Y$.

b) Même calcul, mais $M^\top M$ n'est plus I_p . C'est cependant une matrice $p \times p$ inversible (en effet, $M^\top MX = 0 \Rightarrow X^\top M^\top MX = 0 \Rightarrow \langle MX, MX \rangle = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X = 0$ car les colonnes de M sont indépendantes). Donc $X = (M^\top M)^{-1} M^\top Y$

$$\text{c) } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, M^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, M^T M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \text{ d'inverse } \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$M^T Y = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et enfin } X = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ On a bien :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sol.18) a) Remarquer que $V^T = \begin{pmatrix} V_1^T \\ \vdots \\ V_p^T \end{pmatrix}$ et que, pour tout vecteur W , $\langle V_i, W \rangle = V_i^T W$. Donc :

Si U est orthogonal à F , alors $V^T U = 0$ et a fortiori $V V^T U = 0$

Par ailleurs, pour tout i , $V V^T V_i = V \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\leftarrow i$ -ème ligne) $= V_i$ donc la restriction de

l'endomorphisme de matrice $V V^T$ à F est l'identité.

$V^T V = I_p$ car $(V^T V)_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$

b) $\frac{v v^T}{v^T v}$ est la matrice du projecteur orthogonal p sur v . C'est un cas particulier du a) en prenant

$F = \text{Vect}(v)$, $p = 1$, $V = \frac{v}{\|v\|}$. On a en effet $V^T V = \frac{v v^T}{v^T v}$.

Sol.19) a) Remarquons que $A = V^T V$ où V est la matrice de colonnes (V_1, V_2, \dots, V_p) des composantes des vecteurs v_1, \dots, v_p dans une base orthonormée. Attention au fait que V n'est pas carrée en général.

Si les v_i sont liés, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ et donc $V \Lambda = 0$, où Λ est le

vecteur colonne de \mathbf{R}^p de composantes λ_i . Mais alors $A \Lambda = V^T V \Lambda = 0$ avec $\Lambda \neq 0$, donc A n'est pas inversible, et $\det(A) = 0$

Si les v_i sont libres, considérons une base orthonormée du sous-espace vectoriel engendré et prenons les V_i colonnes des composantes des v_i dans cette base. On a toujours $A = V^T V$ mais ici, V est carré, matrice de passage de la base orthonormée du sous-espace vectoriel à la base (v_1, \dots, v_p) , donc $\det(A) = (\det V)^2 \neq 0$.

b) Reprenons la notation $A = V^T V$ où V est la matrice de colonnes (V_1, V_2, \dots, V_p) des composantes des vecteurs v_i dans une base orthonormée. On a :

$$X \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow V^T V X = 0 \Rightarrow X^T V^T V X = 0 \Leftrightarrow \langle V X, V X \rangle = 0 \Leftrightarrow V X = 0 \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(V)$$

donc $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(V)$. Inversement, $X \in \text{Ker}(V) \Rightarrow V X = 0 \Rightarrow V^T V X = 0 \Rightarrow A X = 0$ donc $\text{Ker}(V) \subset \text{Ker}(A)$. Ainsi, $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(V)$.

Le théorème du rang appliqué à A et V donne respectivement :

$$p = \dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A)$$

$$p = \dim(\text{Ker}(V)) + \text{rg}(V)$$

donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(V)$

c) La matrice A s'écrit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$. Notons B_1, \dots, B_{p-1} les colonnes de B, et A_1, \dots, A_p . B étant inversible, (B_1, \dots, B_{p-1}) constituent un système libre (et donc une base de \mathbf{R}^{p-1}). Donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que $C = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j B_j$. Notons Λ la colonne des coefficients λ_i . On a donc $C = B\Lambda$.

Effectuons l'opération suivante sur la dernière colonne de A : $A_p \leftarrow A_p - \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j A_j$. Cette opération ne modifie pas le déterminant et annule la colonne C finale. Regardons comment elle se traduit sur le coefficient D. Celui-ci devient :

$$D - \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \langle v_j, v_p \rangle = D - \sum_{j=1}^{p-1} C_j \lambda_j = D - C^T \Lambda = D - C^T B^{-1} C$$

On obtient alors le déterminant triangulaire par blocs suivant, où $D - C^T B^{-1} C \in \mathbf{R}$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} B & 0 \\ C^T & D - C^T B^{-1} C \end{vmatrix} = \det(B) (D - C^T B^{-1} C)$$

Une autre démonstration consiste à écrire que $\begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & B^{-1} C \\ 0 & D - C^T B^{-1} C \end{pmatrix}$ et à prendre les déterminants.

d) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que $z = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1}$. Les λ_i sont tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \langle v_i, v_p - z \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \langle v_i, v_p \rangle = \langle v_i, z \rangle = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$\Leftrightarrow C = \sum_{j=1}^p \lambda_j B_j = B\Lambda$$

$$\Leftrightarrow \Lambda = B^{-1}C \text{ qui n'est autre que le } \Lambda \text{ de la question précédente. On a alors :}$$

$$\langle z, z \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq p-1} \lambda_i \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \Lambda^T B \Lambda$$

$$\langle z, v_p \rangle = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \langle v_j, v_p \rangle = C^T \Lambda$$

donc :

$$\begin{aligned} \|z - v_p\|^2 &= \langle z, z \rangle - 2\langle z, v_p \rangle + \langle v_p, v_p \rangle \\ &= \Lambda^T B \Lambda - 2C^T \Lambda + D \\ &= C^T B^{-1} B B^{-1} C - 2C^T B^{-1} C + D = D - C^T B^{-1} C = \frac{\det(A)}{\det(B)} \end{aligned}$$

Comme z est le projeté orthogonal de v_p sur le sous-espace vectoriel (v_1, \dots, v_{p-1}) , on a :

$$\|z - v_p\| \leq \|v_p\|$$

$$\text{donc } \det(A) \leq \det(B) \|v_p\|$$

La relation $\det(A) \leq \prod_{k=1}^p \|v_k\|^2$ se montre ensuite par récurrence sur p

Sol.20) a) Par exemple $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix}$, alors :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -20 \\ -10 & 20 & 40 \\ -20 & 40 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \\ -4\sqrt{5} \end{pmatrix} (\sqrt{5} \quad -2\sqrt{5} \quad -4\sqrt{5})$$

b) S est une matrice $p \times p$. Puisque $\text{rg}(A) = r$, les p colonnes de A engendrent un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n de dimension r . Soit C une matrice de $\mathcal{M}_{nr}(\mathbf{R})$ dont les r colonnes (C_1, \dots, C_r) forment une base orthonormée de ce sous-espace vectoriel. On a $\text{rg}(C) = r$ et $C^T C = I_r$ (car le terme (i, j) de $C^T C$ est le produit scalaire de C_i par C_j). Les colonnes de A sont combinaisons linéaires des C_i , donc il existe B élément de $\mathcal{M}_{rp}(\mathbf{R})$ tel que $A = CB$ (la j -ème colonne de A est égale à $\sum_{k=1}^r b_{kj} C_k$).

On a alors :

$$S = A^T A = B^T C^T C B = B^T I_r B = B^T B$$

De plus (applications successives du théorème du rang), C est la matrice d'une application linéaire injective, donc $AX = 0 \Leftrightarrow CBX = 0 \Leftrightarrow BX = 0$ donc A et B ont même noyau donc ont même rang.

c) A est de rang 2. Les colonnes de A sont combinaisons linéaires de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ (plan

d'équation $3x + 7y + 2z = 0$) ou de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ou enfin de $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{93}} \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$ qui forment une

base orthonormée. On donc $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{93}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{93}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{93}} \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont constituée de cette base

orthonormée, et $B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} - \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{93}}{3} & -\frac{\sqrt{93}}{3} \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont les composantes des colonnes de A

dans cette base orthonormée, de façon que $A = CB$. On a bien :

$$\begin{aligned} S = A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -4 & 13 & -9 \\ -2 & -9 & 11 \end{pmatrix} \\ &= B^T B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{93}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{93}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} - \frac{2\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{93}}{3} & -\frac{\sqrt{93}}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sol.21) Si $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une base orthonormée de F , alors :

$$\sum_{i=1}^n \|e_i'\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \langle e_i, \varphi_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \langle e_i, \varphi_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^p \|\varphi_j\|^2 = p$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|e_i'\|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle e_i', e_i \rangle && \text{car } \langle e_i', e_i - e_i' \rangle = 0 \\ &= \text{Tr}(q) && \text{où } q \text{ est le projecteur orthogonal sur } F, \text{ qui ne dépend} \\ &= \dim(F) = p && \text{pas de la base choisie, et } \text{Tr}(q) \text{ sa trace} \end{aligned}$$

Sol.22) a) On vérifiera que l'image de V est nulle et les B_i sont invariants.

b) La colonne E_i représente les composantes de B_i dans la base (B_1, B_2, B_3) . La matrice cherchée doit être telle que, appliquée sur V , elle donne 0, et appliquée sur B_i , elle donne E_i . Il suffit de

prendre $\sum_{i=1}^3 E_i B_i^T \times (I_4 - \frac{1}{N^T V} V N^T)$.

