SÉRIES

PLAN

I : Séries
- 1) Définition
- 2) Exemples de séries

II : Séries à termes positifs
- 1) Critères de convergence
- 2) Comparaison avec une intégrale

III : Séries quelconques
- 1) Absolue convergence
- 2) Exemple

Annexe I : Historique
Annexe II : Accélération de convergence
Annexe III : Un calcul d'Euler
Annexe IV : Quelques sommes de séries

I : Séries

1– Définition

DEFINITION :

❑ *On appelle série* ($\sum x_n$) *de terme général* x_n, *réel ou complexe, la suite de terme général* $S_n = x_0 + ... + x_n$, *appelée somme partielle. La série converge si la suite des sommes partielles converge. La limite S s'appelle somme de la série. On note* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *la limite lorsqu'elle existe.*

2– Exemples de séries

EXEMPLE 1 : un premier exemple de série est fourni par le développement décimal d'un réel. On a en effet :

$$x = \mathrm{M} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où M est la partie entière de x, et les a_i des chiffres tels que $\forall n, \exists m > n, a_m \neq 9$. Cette condition a pour but d'éviter les écritures décimales avec une infinité de 9. Au lieu de 0,9999999999..., on a 1 tout simplement. Sous cette condition, la décomposition de x est unique.

EXEMPLE 2 : Pour $|x| < 1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Il s'agit d'une série géométrique. En effet :

$1 + x + ... + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ qui tend bien vers $\dfrac{1}{1-x}$ car x^{n+1} tend vers 0

EXEMPLE 3 : on appelle série harmonique la série $\sum \frac{1}{n}$. Elle diverge. Les démonstrations en sont innombrables :

Démonstration 1

Elle est essentiellement due, aux notations près, à Nicolas Oresme (*Questiones super geometriam euclidis*, 1360). La somme partielle, de 1 à N = 2^k est minorée par :

$$\sum_{p=1}^{k} \sum_{n=2^{p-1}+1}^{2^p} \frac{1}{n} \geq \sum_{p=1}^{k} \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{k}{2} \text{ qui tend vers } +\infty \text{ avec } k$$

Démonstration 2

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \text{nombre de termes} \times \text{plus petit terme} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si la série convergeait vers S, on aurait, en passant à la limite :

$$0 = S - S \geq \frac{1}{2}$$

Démonstration 3

Une variante de la précédente. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $D_n = S_{2n} - S_n$. On a évidemment $D_n > 0$.

De plus : $D_n - D_{n-1} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} > 0$. Donc la suite (D_n) est strictement croissante et strictement positive, donc elle ne peut tendre vers 0, ce qui serait si la suite (S_n) convergeait. Donc (S_n) diverge.

Démonstration 4

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{2n} \text{ avec } \frac{2}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{2k} \leq \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}$$

Donc $\quad S_n \leq -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2} + S_{2n}$

Si la suite (S_n) convergeait vers une limite S, on aurait :

$$S \leq -\frac{1}{2} + S$$

ce qui est absurde.

Démonstration 5

On a $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x > -1$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{1+k}{k}) = \ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n + 1)$, donc la série diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration 6

Elle est due à Mengoli en 1650. Pour tout entier n, on a $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{3}{n}$ donc :

$$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}) + ... + (\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}) \geq 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{6} + ... + \frac{3}{3n}$$

$$\geq 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

soit $S_{3n+1} \geq 1 + S_n$. Si la suite (S_n) des sommes partielles convergeait vers S, on aurait $S \geq 1 + S$.

Démonstration 7

Elle est due à Jacques Bernoulli. Pour tout entier n, on a :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n^2-n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n} + \frac{n^2-n}{n^2} = 1$$

donc, en regroupant les termes de la série géométrique par paquets entre l'indice n et n^2, on peut dépasser toute quantité donnée. Ainsi :

$$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{25}) \geq 1 + 1 + 1 = 3$$

Les regroupements peuvent être effectués aussi loin que l'on veut.

EXEMPLE 4 : pour tout x, l'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction exponentielle en 0 donne :

$$\left| e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}) \right| \leq M \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

où M est un majorant de e^x entre 0 et x. On peut choisir par exemple $M = \exp |x|$. Le membre de droite de l'inégalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc, pour tout x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En particulier, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$. La convergence est très rapide et permet de donner des valeurs approchées de l'exponentielle avec quelques termes de la somme partielle.

EXEMPLE 5 : on peut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Le calcul de ces deux séries constitua un défi au début du XVIIIème et leur somme fut pour la première fois établie par Euler. L'expression remarquable du résultat n'a d'égal que l'étonnement que l'on peut avoir sur la possibilité de l'établir. Cela laisse faiblement entrevoir la joie qu'a dû éprouver Euler.

Plus généralement on connaît la valeur de la série somme des inverses de n'importe quelle puissance paire, mais on ne connaît aucune formule pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (on sait seulement depuis 1978 qu'il s'agit d'un irrationnel).

L'exemple 3 montre qu'il ne suffit pas que le terme général x_n d'une série tende vers 0. C'est cependant nécessaire. En effet, si une série converge, alors $S_n - S_{n-1}$ tend vers $S - S = 0$. Or $S_n - S_{n-1} = x_n$. Ainsi, la série $\sum (-1)^n$ diverge et nous n'attribuerons aucune valeur à cette somme, contrairement à Euler.

Il est facile de vérifier que l'ensemble des séries convergentes forme un espace vectoriel, et que l'on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. si u_n est complexe égal à $x_n + iy_n$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergent et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. On a également $\overline{\sum_{n=0}^{\infty} u_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n}$.

Cela résulte en effet des théorèmes sur les limites des suites.

II : Séries à termes positifs

1– Critères de convergence

La première question qu'on se pose sur une série est de savoir si elle converge. Il existe un certain nombres de critères permettant dans la plupart des cas de répondre à cette question. Une fois que l'on sait que la série converge, une autre question est de trouver une expression explicite de sa somme, ou à défaut une valeur approchée. Ces questions sont parfois très délicate en ne sont guère abordée dans ce chapitre. La détermination d'une expression explicite n'est pas toujours possible. Quant à la détermination d'une valeur approchée, elle se heurte parfois à une vitesse de convergence lente. On se reportera à l'annexe II pour un exemple.

Ce paragraphe s'applique aux séries à terme général réel de signe constant. Quitte à changer tous les signes, on peut se ramener à des séries à terme général positif. Pour ces séries, on dispose des théorèmes de convergence suivants :

PROPOSITION :

i) *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes positifs ou nuls. Alors la série converge si et seulement si les sommes partielles sont majorées. Dans ce cas,* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \mathit{Sup}\ S_n$.

ii) *Soient* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n = O(v_n)$ *et si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*

iii) *Si* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *sont des séries de signe constant, et si* $u_n \sim v_n$ *au voisinage de* $+\infty$, *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont simultanément convergentes ou divergentes (on dit que les deux séries sont de même nature).*

<u>Démonstration</u> :

i) La suite des sommes partielles $S_n = u_0 + ... + u_n$ est une suite croissante. En effet, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ est supérieur ou égal à 0. Cette suite converge si et seulement si elle est majorée et alors, elle converge vers sa borne supérieure.

ii) On suppose qu'il existe N et M tel que, pour $n \geq$ N, on ait $u_n \leq \mathrm{M}v_n$. Supposons que la série ($\sum v_n$) converge. On a alors :

$$\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} u_k \leq \mathrm{M} \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k \ \leq \mathrm{M} \sum_{k=\mathrm{N}}^{\infty} v_k = \mathrm{M} \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} v_k\right)$$

car la série ($\sum v_n$) converge en croissant vers sa limite. Les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ sont donc majorées et on applique le i).

Le plus souvent, on cherche directement une majoration $u_n \leq v_n$. Pour qu'une série à termes positifs converge, il suffit de la majorer par une série convergente. En prenant la contraposée, pour qu'une série à termes positifs diverge, il suffit de la minorer par une série à termes positifs divergente.

iii) Au voisinage de l'infini, on a : $\frac{v_n}{2} \leq u_n \leq \frac{3v_n}{2}$, donc : $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ d'où l'équivalence.

EXEMPLE 1 : $\sum \frac{n^2 + 3n + 1}{n^3 + 5n - 6}$

Cette série est une série divergente, car son terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$ qui est positif, et terme général d'une série divergente.

EXEMPLE 2 : Considérons la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, dite série de Riemann. Nous disposons du résultat suivant :

Les séries ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$) *convergent si et seulement si* $\alpha > 1$.

Si $\alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, et comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Si $\alpha > 1$, alors on remarque que :

$$\frac{1}{1^\alpha} = 1$$

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \leq \frac{2}{2^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

$$\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} \leq \frac{4}{4^\alpha} = \frac{1}{4^{\alpha-1}}$$

...

$$\frac{1}{(2^p)^\alpha} + \frac{1}{(2^p + 1)^\alpha} + \frac{1}{(2^p + 2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^p + 2^p - 1)^\alpha} \leq \frac{2^p}{(2^p)^\alpha} = \frac{1}{(2^p)^{\alpha-1}}$$

En majorant la somme partielle $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ par une somme partielle analogue comprenant un nombre de termes supérieur à N de la forme $2^{p+1} - 1$ et en utilisant les inégalités précédentes, on a :

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-1}} = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$ série géométrique de terme général $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ qui converge vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$. Les sommes partielles étant majorées, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

EXEMPLE 3 : $\sum \frac{n^2+3n+1}{n^4+5n-6}$

Cette série est une série convergente, car son terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est positif, et terme général d'une série convergente d'après l'exemple précédent.

❑ Il faut prendre garde que les séries sont des ***<u>limites</u>*** et non des ***<u>sommes</u>*** finies, sous peine de connaître des déboires cuisants. Donnons de suite un exemple frappant. En 1655, Wallis donne la formule suivante :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}$$

Il s'agit d'un produit infini mais on se ramène à des séries en prenant le logarithme. Nous ne chercherons pas à montrer cette formule mais nous nous livrerons simplement à quelques calculs élémentaires... et paradoxaux. Considérons donc :

$$\ln(\frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}) = \ln(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{6}\times\frac{7}{8}\times...)$$
$$= \ln(\frac{1}{2}) + \ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{3}{4}) + \ln(\frac{5}{4}) + \ln(\frac{5}{6}) + \ln(\frac{7}{6}) + \ln(\frac{7}{8}) + ...$$

somme de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln\frac{2n-1}{2n} + \ln\frac{2n+1}{2n})$. Son terme général peut s'écrire :

$$\ln\frac{2n-1}{2n} + \ln\frac{2n+1}{2n} = \ln(1-\frac{1}{2n}) + \ln(1+\frac{1}{2n})$$
$$= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \qquad \text{(développement limité de ln)}$$
$$= -\frac{1}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim -\frac{1}{4n^2} \text{ terme de signe constant}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln\frac{2n-1}{2n} + \ln\frac{2n+1}{2n})$.

Remarquons maintenant que, 1 étant neutre pour le produit, on devrait aussi bien avoir :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..} \text{ que } \frac{2}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10...} \text{ ou } \frac{2}{\pi} = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9....}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}$$

Mais la formule $\frac{2}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7.9.9.11...}{2.2.4.4.6.6.8.8.10...}$ est constitué de produits $\frac{3^2}{2^2}, \frac{5^2}{4^2}, \frac{7^2}{6^2}$, ... tous plus grands que 1, donc le produit augmente et est supérieur à 1, et ne saurait converger vers $\frac{2}{\pi}$, qui est strictement inférieur à 1. D'ailleurs, en prenant les logarithmes, on trouve :

$\ln(\frac{3^2}{2^2}) + \ln(\frac{5^2}{4^2}) + \ln(\frac{7^2}{6^2}) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(2n+1)^2}{(2n)^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n+1}{2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{2n})$ série à termes positifs dont le terme général est équivalent à $\frac{1}{2n}$, terme général d'une série divergente. Ainsi, le fait même de supprimer le facteur 1 pourtant sans intérêt dans un produit (ou de supprimer de la somme ln(1) qui est nul) et de réordonner les termes rend la formule divergente.

Si au contraire, on rajoute 1 pour obtenir la formule $\frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9....}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10..}$, alors les facteurs sont $\frac{1}{2^2}$, $\frac{3^2}{4^2}$, $\frac{5^2}{6^2}$, ... tous inférieurs à 1, donc le produit sera inférieur au premier facteur $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ alors que $\frac{2}{\pi}$ est strictement supérieur à cette valeur. Aburdité également. En prenant les logarithmes, le terme général devient $\ln \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} = -2 \ln \frac{2n}{2n-1} = -2 \ln(1 + \frac{1}{2n-1}) \sim -\frac{2}{2n-1}$ là aussi terme général d'une série divergente.

2– Comparaison série-intégrale

Un exemple fréquent de série $\sum a_n$ provient du cas où $a_n = f(n)$ pour une certaine fonction. Si cette fonction est monotone, on peut encadrer a_n par des intégrales de f, souvent calculable, ce qui peut permettre de donner un encadrement des sommes partielles de la série et de prouver leur convergence ou leur divergence.

Voyons ce qu'il en est pour une fonction f positive décroissante. f étant décroissante, pour tout n, on a :

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n-1)$$

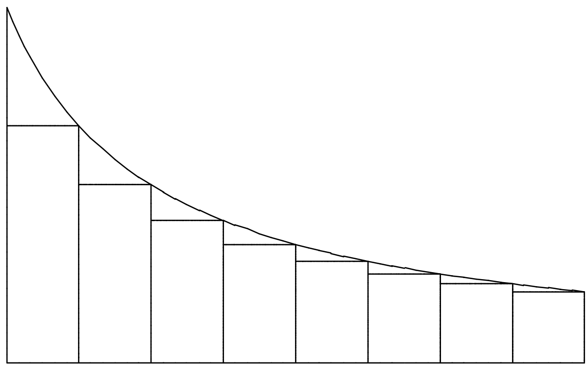
Ou mieux :

$$\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

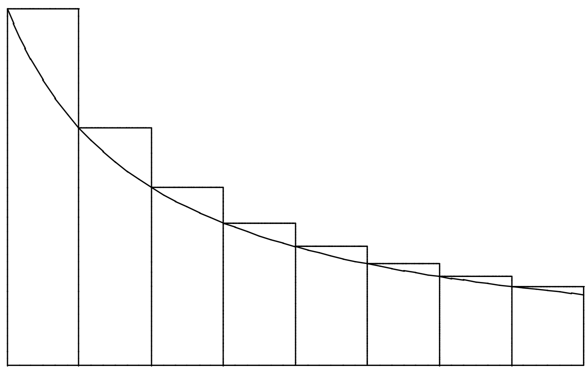
Donc, en sommant de 0 à n :

$$\int_{0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ci-dessous les graphiques permettent d'illustrer la démonstration :



$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$



$$\int_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

Si les intégrales convergent, alors la suite (S_n) sera croissante majorée, donc convergera. Si les intégrales divergent vers $+\infty$, la suite (S_n) est minorée par une quantité qui tend vers $+\infty$ donc diverge.

Dans le cas de la convergence, en passant à la limite dans les inégalités ci-dessus, on a enfin l'encadrement :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \leq f(0) + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

où l'on a noté $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^{x} f(t)\,dt$

EXEMPLE 1 : la série harmonique ($\sum \frac{1}{n}$) diverge (**démonstration 9**) car :

$$\forall\, n \geq 1,\ \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{n}$$

donc $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

et l'intégrale vaut $\ln(n+1)$ qui tend vers $+\infty$.

EXEMPLE 2 : on peut également procéder à des encadrements en cas de fonction croissante. Considérons par exemple $\ln(n!)$. On a :

$$\int_{n-1}^{n} \ln(t)\,dt \leq \ln(n) \leq \int_n^{n+1} \ln(t)\,dt$$

$\Rightarrow \quad n\ln(n) - 1 - (n-1)\ln(n-1) \leq \ln(n) \leq (n+1)\ln(n+1) - 1 - n\ln(n)$

On somme ensuite les inégalités, de 2 à n pour l'inégalité de gauche, et de 1 à n pour celle de droite :

$\Rightarrow \quad n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - n$

$\Rightarrow \quad n^n e^{-n} \times e \leq n! \leq (n+1)^{n+1} e^{-n}$

Comme $(n+1)^{n+1} = \exp((n+1)\ln(n+1)) = \exp((n+1)\ln(n) + (n+1)\ln(1+\frac{1}{n}))$

$$= \exp((n+1)\ln(n) + (n+1)(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})))$$

$$= \exp((n+1)\ln(n) + 1 + o(1))$$

$$\sim n^n\, en$$

on en déduit que $\dfrac{n!}{n^n e^{-n}}$ est compris entre e et $en \times$ qqc qui tend vers 1. Par des méthodes un peu plus compliquées, on peut montrer que $\dfrac{n!}{n^n e^{-n}} \sim \sqrt{2\pi n}$, ou encore que $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, ou enfin que $\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$ (Formule de Stirling).

III : Séries absolument convergentes

1– Absolue convergence

DEFINITION

Une série ($\sum u_n$) *est dite absolument convergente si* ($\sum |u_n|$) *converge.*

Cette notion n'a évidemment d'intérêt que pour les séries à coefficients complexes ou réels de signe non constants

PROPOSITION :
Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration :
Si u_n est à coefficients complexes, on écrit $u_n = x_n + iy_n$, et comme $|x_n|$ et $|y_n|$ sont inférieurs ou égaux à $|u_n|$, les séries obtenues en prenant les parties réelles et imaginaires sont elles–mêmes absolument convergentes. Il suffit donc de raisonner sur $\mathbb{R}$. On suppose donc u_n réel. On pose :

$$\begin{aligned} u_n^+ &= u_n \text{ si } u_n \geq 0 \\ &= 0 \text{ sinon} \\ u_n^- &= -u_n \text{ si } u_n \leq 0 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

On a alors :

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^-$$
$$u_n = u_n^+ - u_n^-$$

Les séries ($\sum u_n^+$) et ($\sum u_n^-$) sont des séries à termes positifs ou nuls, dont le terme général est majorée par $|u_n|$. Elles sont donc convergentes Il en est de même de la série ($\sum u_n$), différence de ces deux séries. On a par ailleurs, en majorant la valeur absolue des sommes partielles et en passant à la limite :

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

Il existe des séries qui sont convergentes sans être absolument convergentes. Pour ces séries, on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^- = +\infty$, mais la série des différences converge. C'est le cas de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ qui converge vers $\ln(2)$ mais cette question sort du cadre du cours de première année. L'absolue convergence est donc une ***condition suffisante*** de convergence.

Afin de voir si une série ou une intégrale quelconque est convergente, on regarde si elle est absolument convergente, se ramenant ainsi à des séries à termes positifs ou à des fonctions positives. On peut alors appliquer les méthodes d'équivalents, de majorations, de minorations, de comparaison avec les séries de Riemann.

Les séries absolument convergentes forment un espace vectoriel. En effet, si ($\sum u_n$) et ($\sum v_n$) sont absolument convergentes, il en est de même de la somme, puisque :

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$$

et la série somme, en valeur absolue, converge, son terme général étant majorée par le terme général d'une série convergente. La vérification pour le produit par un scalaire est facile.

2– Exemple

$(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2})$ est absolument convergente. On peut même en calculer la somme si on admet la valeur donnée plus haut de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On en déduit (au besoin en considérant les sommes partielles avant de prendre leurs limites) que :

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

Annexe I : Historique

Au XVIIIème, la notion de somme infinie de termes se développe largement. Elle est en effet issue du développement des fonctions en série, sans que le nombre de termes du développement soit clairement précisé. De nos jours, on parle de développement limité avec écriture explicite d'un reste, mais à l'époque cela ne génait personne d'écrire que :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

ou bien

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Inversement, une somme infinie étant donnée, il s'agissait d'en déterminer la somme sans que les notions de convergence soient clairement énoncées. Ainsi, Euler tenait le raisonnement suivant pour calculer S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 +... . Il regroupe les termes sous la forme :

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S$$

donc $S = \frac{1}{2}$. Cette méthode était largement acceptée à l'époque, bien que la même, appliquée aux puissances de 2, suscitât des réticences. Soit S = 1 + 2 + 4 + 8 + ... = 1 + 2 × (1 + 2 + 4 + 8 +...) = 1 + 2S donc S = –1 !?! On obtient le même résultat à l'aide du développement

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

en posant $x = 2$. Cependant, de nos jours, un tel développement est considéré comme divergent et la somme 1 + 2 + 4 + 8 + ... comme non définie. Il existe cependant d'autres définitions possibles dans des contextes différents. Ainsi, dans un corps de nombres dit corps 2-adique, on écrit les nombres avec un développement infini de chiffres vers la gauche au lieu d'utiliser un développement infini de chiffres vers la droite comme pour le corps des réels. Si on travaille en binaire, on vérifiera bien que, si S = ...11111111, alors S + 1 = 0, la retenue se propageant indéfiniment vers la gauche, et donc que S = –1. Enfin, la formule $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2}$ serait vraie si on prenait comme définition de la somme d'une série non pas la limite des sommes partielles comme nous le faisons, mais la limite de leur moyenne (dite limite au sens de Cesaro, les sommes partielles prenant alternativement les valeurs

1 et 0, leur moyenne tend vers $\frac{1}{2}$). Euler a également cherché à donner un sens à la somme de la série $1 - 1! + 2! - 3! + 4! + \ldots$ Sans se soucier du fait que la série $y = x - 1!.x^2 + 2!.x^3 - 3!.x^4 + \ldots$ n'est jamais convergente pour $x \neq 0$, il la dérive terme à terme et obtient formellement l'équation différentielle $x^2y' + y = x$. Or cette équation a effectivement une seule solution telle que $y(0) = 0$, donnée par l'expression :

$$y(x) = e^{1/x} \int_0^x \frac{e^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{xe^{-u}}{1 + xu}\,\mathrm{d}u \quad (\text{avec } u = \frac{1}{t} - \frac{1}{x})$$

Euler considère donc que $y(1)$ est la somme qu'il cherche, soit approximativement 0,596347, valeur qu'il obtient également par d'autres méthodes. Il existe enfin des situations aussi bien en mathématiques qu'en physique dans lesquelles on obtient des séries divergentes au sens usuel et pour lesquels il faut bien attribuer une somme. Citons par exemple le cas suivant. On peut montrer que (formule de Stirling) :

$$\ln(n!) = (n + \frac{1}{2})\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{b_2}{1.2.n} + \frac{b_4}{3.4.n^3} + \ldots + \frac{b_{2p}}{(2p-1).2p.n^{2p-1}} + o(\frac{1}{n^{2p}})$$

à tout ordre p, où les b_{2p} sont les nombres dits de Bernoulli. A p fixé, la précision est d'autant meilleure que n est grand, mais à n fixé, il est illusoire de prendre davantage de termes car la série diverge lorsque p tend vers l'infini. Ce problème est particulièrement ennuyeux car on souhaiterait bien que la formule de Stirling donne une valeur de $\ln(n!)$ à une précision arbitraire !!

Vers la fin du XIXème se posait donc le problème suivant. Etant donné une suite (a_n), comment donner un sens à la somme des a_n ? Voici un bref résumé de quelques méthodes :

- La méthode usuelle, celle que nous allons étudier, qui consiste à prendre la limite des sommes partielles. Elle date de Cauchy, dans la première moitié du XIXème :

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

- La méthode de Cesaro, qui consiste à prendre la limite des *moyennes* des sommes partielles :

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{S_k}{n+1} \text{ où } S_k = a_0 + \ldots + a_k$$

- La méthode d'Abel qui consiste à multiplier a_k par r^k avant de faire tendre r vers 1 :

$$S = \lim_{\substack{r\to1\\ r<1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, r^n = \lim_{\substack{r\to1\\ r<1}} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n\, r^n$$

- La méthode de Borel, consistant à utiliser le fait que $n! = \int_0^\infty e^{-t}\, t^n\, \mathrm{d}t$ pour définir :

$$S = \int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, t^n\, \mathrm{d}t$$

en espérant que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, t^n$ converge au sens usuel. Bornons-nous à signaler que la méthode usuelle est la plus simple, mais pas la plus efficace. En effet, les méthodes de Césaro et d'Abel sont plus puissantes : dans le cas où la méthode usuelle donne une valeur à S, il en est de même de ces deux méthodes (avec la même valeur de S). Mais ces deux méthodes attribuent des valeurs à des sommes de séries que nous qualifions usuellement de divergentes, par exemple, la valeur $\frac{1}{2}$ à la série $1 - 1 + 1 - 1 + ...$). Quant à la méthode de Borel, elle attribue à cette série la valeur $\int_0^\infty e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \,dt$ or on a vu que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$ n'est autre que e^{-t} de sorte que l'intégrale devient $\int_0^\infty e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}$ là aussi.

La plupart des résultats énoncés dans ce chapitre sont dus à Cauchy.

Annexe II : Accélération de convergence

Cette annexe a pour but d'illustrer une difficulté relative au calcul approché des sommes des séries convergentes. En effet, la convergence peut être tellement lente que le calcul d'une somme partielle, même avec un nombre élevé de termes, ne donnera qu'une faible idée de la valeur de la somme complète de la série.

Considérons la série harmonique dont on retire les entiers possédant dans leur développement décimal un chiffre donné c. Par exemple, pour $c = 2$, on obtient la série :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + ... + \frac{1}{19} + \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{34} + ...$$

Alors cette série converge. En effet, entre 10^p et $10^{p+1} - 1$, les entiers possèdent $p + 1$ chiffres (dont le premier est non nul), de sorte qu'il y a 8×9^p entiers répondant à la question (8 choix pour le premier chiffre et 9 pour les p chiffres qui suivent). La somme de la série entre ces deux bornes est encadrée par $8 \times \frac{9^p}{10^{p+1}}$ et $8 \times \frac{9^p}{10^p}$, qui sont les termes de séries convergentes.

Cependant la convergence est extrêmement lente. Supposons que l'on souhaite une valeur approchée de la somme à 10^{-6} près. Il serait naïf de croire qu'il suffit de calculer la somme jusqu'à $n = 10^6$ (ce qui représente donc la somme de près de 1 000 000 de termes) et de négliger le reste. En effet, négligeons le reste à partir de 10^p. Ce reste est encadré par la somme des $\frac{8 \times 9^k}{10^{k+1}}$ et $\frac{8 \times 9^k}{10^k}$, k variant de p à l'infini. Ces deux sommes encadrant le reste valent respectivement $8 \times (\frac{9}{10})^p$ et $80 \times (\frac{9}{10})^p$. Pour $p = 6$, le reste est donc compris entre 4 et 43 !!! Par ailleurs, si l'on choisit p de façon que cet encadrement soit inférieur à 10^{-6}, on obtient $p = 173$. Il faudrait donc calculer la somme jusqu'à $n = 10^{173}$, soit plus d'un milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de termes, ☹ ce qui représente une tâche insurmontable dépassant en temps, et de loin, l'âge de l'univers.

On utilise alors des méthodes d'accélération de convergence, telles celles d'Aitken–Richardson. Notons $S(n)$ la somme jusqu'au terme n, S la somme de la série complète, $R(n)$ le reste. On a donc $S = S(n) + R(n)$ avec $R(10^p) = O(0,9^p)$, ou encore $R(n) = O(\frac{1}{n^\Phi})$, avec $\Phi = 1 - \log(9)$, où log désigne le logarithme décimal. Supposons que $S(n)$ soit de la forme $S(n) = S - \frac{a}{n^\Phi} + o(\frac{1}{n^\Phi})$ avec a constante.

Posons :

$$A[p,0] = S(10^p) = S - a\, 0,9^p + o(0,9^p))$$

On a : $A[p+1,0] = S - a\, 0{,}9^{p+1} + o(0{,}9^p))$
de sorte que, si l'on pose :

$$A[p,1] = 10A[p+1,0] - 9A[p,0]$$

cela permet d'éliminer les termes en $0{,}9^p$ et d'avoir une suite convergeant plus rapidement vers S. Même si la supposition faite sur S n'est pas exacte, on a quand même :

$$\lim_{p\to+\infty} A[p,1] = \lim_{p\to+\infty} 10A[p+1,0] - 9A[p,0] = 10\,S - 9\,S = S$$

donc $A[p,1]$ a de toute façon pour limite S et il ne coûte rien d'appliquer la méthode. Le résultat est spectaculaire. Lorsque le chiffre éliminé est $c = 0$, les valeurs successives de $A[p,0]$ valent respectivement :

2.82896825 4.89448069 6.71873434 8.35750721 9.83212841

Celles de $A[p,1]$ sont :

23.48409264 23.13701719 23.10646304 23.10371922

alors que S = 23,10345...

On peut par ailleurs s'apercevoir que l'écart entre $A[p,1]$ et S diminue d'environ un dixième à chaque itération de p, de sorte que l'on est amené à penser que $A[p,1] = S + b\, 0{,}09^p + o(0{,}09^p)$. Si l'on pose alors :

$A[p,2] = \dfrac{100A[p+1,1] - 9A[p,1]}{91}$, le terme $0{,}09^p$ est éliminé et la convergence est encore plus rapide. (Même si l'hypothèse faite est fausse, on a de toute façon $\lim\limits_{p\to+\infty} A[p,2] = S$)

Les premières valeurs de $A[p,2]$ sont :

23.10269105 23.10344120 23.10344785

puis, si l'on itère le procédé :

$A[p,3]$: 23.10344801 23.10344791

$A[p,4]$: 23.10344791

qui donnent quatre, voire cinq, six ou même sept décimales exactes après la virgule, et ceci seulement avec 10^5 termes $\dfrac{1}{n}$ calculés.

Pour $c = 1$, la somme est 16,1769695...
Pour $c = 7$, la somme est 22.4934753...
Pour $c = 9$, la somme est 22,9206766...

Annexe III : Un calcul d'Euler

On trouvera ci-dessous des exemples de calcul, typiques du XVIIIème, où l'on utilise sans souci des séries divergentes. Le théorème 2 de *Variae observationes circa series infinitas* d'Euler (1737) rapporte un résultat dû à Goldbach :

$$\ln(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots$$

où les dénominateurs valent 1 de moins que les puissances supérieures ou égales à 2 de nombres pairs (2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 6^2, 2^6, ...). Voici la démonstration qu'en donne Euler :

Il pose :

$x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{14} + \ldots$(les dénominateurs sont tous les nombres pairs)

Euler **sait** que cette série **diverge**. Néanmoins, Euler traite les séries divergentes comme les autres séries en leur attribuant une somme, ici infinie, qu'il manipule formellement. Comme :

$1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots$ (série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$)

on a :

$$x - 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots$$ (les dénominateurs sont les dénominateurs autres que les puissances de 2, et donc aussi de 4, de 8...)

Puis :

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \dots$$ (série géométrique de raison $\frac{1}{6}$)

Donc :

$$x - 1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots$$ (les dénominateurs sont les dénominateurs autres que les puissances de 2, 4, 6, 8)

Puis :

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$ (série géométrique de raison $\frac{1}{9}$)

Donc :

$$x - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots$$ (les dénominateurs sont les dénominateurs autres que les puissances de 2, 4, 6, 8, 10)

On continue indéfiniment. On obtient alors :

$$x - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \dots = 0 \text{ ou encore } x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots \qquad (1)$$

Chaque dénominateur vaut 1 de moins qu'un nombre pair qui n'est pas puissance d'un autre nombre pair plus petit.

Par ailleurs :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \dots$$

et $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$\Rightarrow$ $x + \ln(2) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$(les dénominateurs sont tous les impairs) (2)

En retranchant (1) à (2), on obtient :

$$\ln(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$$

où les dénominateurs sont les impairs autre que ceux qui précèdent un nombre pair qui n'est pas puissance d'un autre nombre pair plus petit. Donc les dénominateurs sont les impairs qui précèdent un nombre pair puissance d'un nombre plus petit. CQFD.

Une telle démarche est totalement invalide aujourd'hui. Il est cependant bon de remarquer que le résultat est, lui, parfaitement exact. En effet, notons T l'ensemble des nombres pairs qui ne sont pas puissances d'un autre nombre. La somme initiale vaut :

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$$

$$= \sum_{k \geq 2} \sum_{a \in T} \frac{1}{a^k - 1} \text{ or } \frac{1}{a^k - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{nk}}$$

$$\Rightarrow \qquad S = \sum_{k \geq 2} \sum_{a \in T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{nk}}$$

$$= \sum_{k \geq 2} \sum_{p \text{ pair}} \frac{1}{p^k}$$ car les a^n décrit tous les nombres pairs p lorsque a décrit T et n décrit $\mathbb{N}^*$

$$= \sum_{p \text{ pair}} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k}$$ (on peut montrer que l'intervertion des sommations est valide)

$$= \sum_{p \text{ pair}} \frac{1}{p(p-1)} \quad \text{car } \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2 - p}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Autre exemple. Euler pose cette fois (théorème 7 de *Variae observationes circa series infinitas*) :

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

On divise par 2 :

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad x - \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$ (on a supprimé les dénominateurs multiples de 2)

On divise le résultat précédent par 3 :

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{3} x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}\frac{1}{3} x = \frac{1}{2}\frac{2}{3} x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots$$ (on a supprimé les dénominateurs multiples de 3)

On divise le résultat précédent par 5 :

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{5} x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{2}{3} x - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{5} x = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5} x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots$$ (on a supprimé les dénominateurs multiples de 5)

En opérant de même avec 7, on obtiendra :

$$\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} x = 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots$$

puis $\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{10}{11} x = 1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \ldots$

et en continuant indéfiniment :

$$\frac{1.2.4.6.10.12.16\ldots}{2.3.5.7.11.13.17\ldots} x = 1$$

ou encore :

$$\frac{2.3.5.7.11.13.17\ldots}{1.2.4.6.10.12.16\ldots} = x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

Au numérateur, apparaissent les nombres premiers, et au dénominateur, les nombres précédents les nombres premiers, ce qu'on pourrait noter :

$$\prod_{p \text{ premier}} \frac{p}{p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Il est à noter que si, à nos yeux, les deux expressions ci-dessus sont divergentes, on peut néanmoins montrer, selon les critères les plus rigoureux, que $\prod_{p \text{ premier}} \frac{p^s}{p^s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour tout $s > 1$, propriété qu'Euler énonce lui-même dans le théorème 8 avec s entier. La fonction $s \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ s'appelle aujourd'hui la fonction ζ de Riemann. Sa relation avec les nombres premiers sera promise à un bel avenir et donnera lieu à une célèbre conjecture, la conjecture de Riemann, qui résiste depuis 150 ans aux efforts des mathématiciens. Cette conjecture est l'un des sept problèmes du millénaire, et est dotée d'un prix d'un million de dollars.

On peut également tirer trois conséquences de la relation $\prod_{p \text{ premier}} \frac{p}{p-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. La première, c'est que, comme la série du membre de droite diverge, le membre de gauche diverge également, ce qui ne peut se produire que s'il y a une infinité de nombres premiers (sinon, le produit est fini et converge). La démarche d'Euler constitue donc une démonstration de l'infinité des nombres premiers. En second lieu, en prenant le logarithme, on obtient que la série $\sum \ln(\frac{p}{p-1}) = \sum - \ln(\frac{p-1}{p})$ diverge. Comme $-\ln(\frac{p-1}{p}) \sim \frac{1}{p}$, il en résulte que la série $\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$ diverge, résultat loin d'être évident, énoncé par Euler dans le théorème 19 de *Variae observationes circa series infinitas*. En troisième lieu, comme $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$ converge vers 2 (exercice laissé au lecteur), et que $\prod_{p \text{ premier}} \frac{p}{p-1}$ diverge, il y a selon les termes d'Euler, en infinité (sic), plus de nombres premiers que de carrés. De fait, on sait depuis 1896 que le nombre de nombres premiers inférieurs à N est équivalent à $\frac{N}{\ln(N)}$, bien supérieur au nombre de carrés, équivalent à $\sqrt{N}$.

Les manipulations d'Euler sur les séries divergentes ne sont cependant pas toujours heureuses, et conduiront Cauchy au début du XIXème à se consacrer uniquement aux séries convergentes (ce que nous faisons aussi). Cauchy écrit en 1821 :

> *Je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple [...] qu'une série divergente n'a pas de somme. [...] Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence ; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelques attention.*

Annexe IV : Quelques sommes de séries

On donne ci-dessous quelques sommes de séries. Les démonstrations ne sont pas données et dépassent en général le niveau de 1ère année de CPGE :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\mathrm{th}(\pi)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2} = \frac{\pi}{2z\mathrm{th}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\mathrm{sh}(\pi)} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2+n^2} = \frac{\pi}{2z\mathrm{sh}(\pi z)} + \frac{1}{2z^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n \text{ impair}}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^4}{960}$$

◆