ESPACES VECTORIELS

PLAN

I : Opérations sur les vecteurs
- 1) Définition et exemples
- 2) Sous-espaces vectoriels
- 3) Sous-espace vectoriel engendré par une partie
- 4) Dépendance et indépendance linéaire.
- 5) Bases
- 6) Relation de liaison

II : Espace de dimension finie
- 1) Théorème fondamental
- 2) Théorème de la dimension des bases
- 3) Théorème de la base incomplète
- 4) Dimension d'un sous-espace vectoriel
- 5) Rang d'un système de vecteurs

III : Somme de sous-espaces vectoriels
- 1) Somme de deux sous-espaces vectoriels
- 2) Somme directe de deux sous-espaces vectoriels
- 3) Supplémentaires
- 4) Cas de la dimension finie
- 5) Somme de plusieurs sous-espaces

IV : Espaces affines
- 1) Définition
- 2) Sous-espaces affines

Annexe : Barycentres

I : Opérations sur les vecteurs

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et est appelé corps des réels ou corps des complexes. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires. Nous les noterons généralement par des lettres grecques.

1- Définition et exemples

La notion d'espace vectoriel a pour but de généraliser les ensembles suivants :

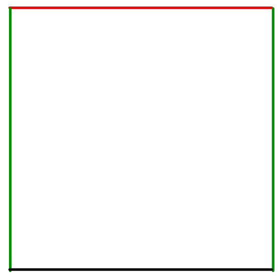
$\mathbb{C}$ considéré comme plan vectoriel des complexes sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ espace de dimension 2 et 3 sur le corps des réels, et plus généralement $\mathbb{K}^n$, espace de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, constitué de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in \mathbb{K}$.

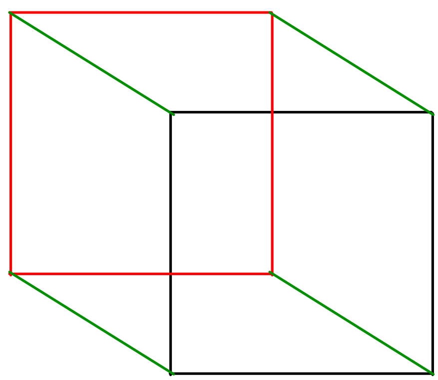
En ce qui concerne les dimensions supérieures à 3, on pourra réfléchir à la notion d'hypercube de dimension 4, d'autant plus facilement qu'on réalisera que les cubes de dimension 3 sont représentés sans difficulté sur un tableau de dimension 2 :

Partant d'un point translaté d'une longueur donnée, on obtient un segment.

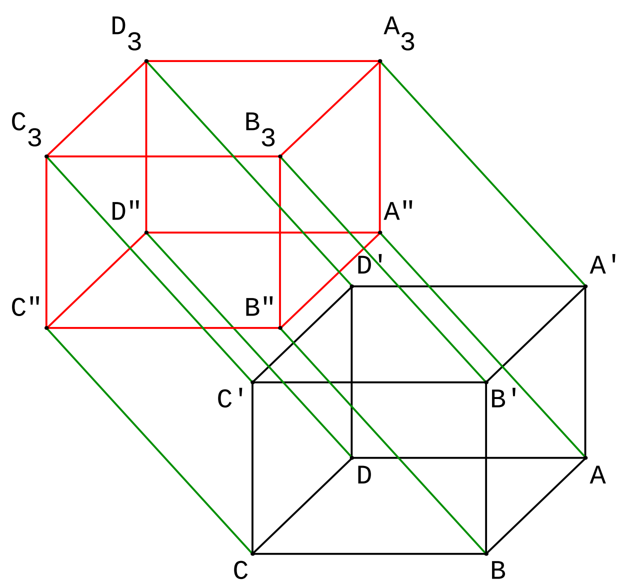
Ce segment, translaté dans une direction orthogonale de la même longueur, donne un carré.



Ce carré, translaté dans une troisième direction, orthogonale aux deux précédentes, donne un cube.



Ce cube, translaté dans une quatrième direction, orthogonale aux trois précédentes, donne un hypercube.



Les objections relatives au fait que cette quatrième dimension n'existe pas ne sont pas recevables. En effet, aucune objection n'est faite en général lors de la construction du cube sur la surface plane constituée d'une feuille de papier ni sur le fait que tous les angles de la figure ainsi tracée sont droits. L'argument consistant à dire que, certes, le cube est représenté sur une surface plane, mais qu'il existe une troisième dimension extérieure à cette surface, est un argument recevable, mais autorise également la généralisation suivante : l'hypercube est également représenté sur une surface plane. Il peut être également représenté en perspective dans notre espace de dimension 3 (La Grande Arche de la Défense par exemple). Mais ces représentations ne sont que des projections en dimension 2 ou 3 d'un objet quadridimensionnel.

Les structures multidimensionnelles abondent dans le monde mathématique mais également dans le monde réel. Il a existé il y a quelques années un ordinateur parallèle constitué de 65536 processeurs. Ces processeurs étaient reliés entre eux par un cablage correspondant aux arêtes d'un hypercube de dimension 16 (ci-dessus, l'hypercube en dimension 4 donne le plan de cablage d'un ordinateur parallèle à 16 processeurs). Un hypercube de dimension n est l'ensemble des points de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_i = 0$ ou 1. Il y a donc 2^n points. Le nombre a_n d'arêtes vérifie la relation de récurrence :

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$$

à savoir a_{n-1} arêtes du cube initial de dimension $n - 1$, plus les a_{n-1} arêtes du même cube translaté, plus les 2^{n-1} arêtes reliant les sommets correspondant des deux cubes. Par récurrence, on a $a_n = 2^{n-1}\, n$. Pour notre ordinateur parallèle, il y avait donc 524 288 liaisons entre processeurs.
Le nombre f_n de faces de dimension 2 vérifie la relation :

$$f_n = 2f_{n-1} + a_{n-1} = 2f_{n-1} + (n-1)2^{n-2}$$

à savoir f_{n-1} faces du cube initial de dimension $n - 1$, plus f_{n-1} faces du même cube translaté, plus les faces latérales correspondant aux nouvelles arêtes et qui relient une arête quelconque du premier cube à l'arête correspondante du deuxième cube. Par récurrence, $f_n = n(n-1)2^{n-3}$.
Le nombre d'hyperfaces de dimension $n - 1$ est égal à $2n$. En effet, il y a n directions d'arêtes et chaque direction est perpendiculaire à 2 hyperfaces opposées.

D'autres exemples courants d'espaces vectoriels sont :

les suites : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ espace vectoriel des suites réelles, sur le corps des réels, ou plus généralement $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ espace des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$, sur le corps $\mathbb{C}$.

les fonctions : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sur le corps des réels.

les champs scalaires ou vectoriels. Un champ scalaire est défini par la donnée d'une nombre en chaque point (x,y,z) de l'espace, par exemple le champ de température ou le champ de pression. Ce n'est autre qu'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Un champ vectoriel est défini par la donnée d'un vecteur en chaque point de l'espace, par exemple les champs électriques ou magnétiques, le champ des vitesses du vent... Ce n'est autre qu'une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des ces fonctions forme un espace vectoriel appelé espace des champs scalaires ou espaces des champs vectoriels. Dans le cas d'un champ magnétique et électrique, il est commode de les unifier en un champ électro-magnétique, fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^6$.

Voici la définition générale d'un espace vectoriel. Un espace vectoriel (E, +, **.**) est un ensemble non vide dont les éléments sont appelés vecteurs (généralement notés par des lettres latines). Il est lié à un corps de nombres $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et est muni des opérations suivantes :

- une somme + permettant d'ajouter deux vecteurs, et donnant à E une structure de groupe commutatif, à savoir :

$\forall (x, y) \in E \times E, x + y = y + x$ (commutativité)
$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)
$\exists 0_E, \forall x \in E, 0_E + x = x = x + 0_E$ (existence du vecteur nul, neutre pour l'addition)
$\forall x \in E, \exists y, x + y = y + x = 0_E$ (existence d'un symétrique y de x. On note $y = -x$)

On pourra vérifier en exercice à partir des axiomes ci-dessus que le neutre pour l'addition est unique, ainsi que le symétrique de tout élément.

- un produit . permettant de multiplier un vecteur par un scalaire et vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \forall y \in E$

(i) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
(ii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
(iii) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
(iv) $1.x = x$ où 1 est le scalaire neutre du produit de $\mathbb{K}$

Il est facile de vérifier que $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des suites ou l'ensemble des fonctions constituent un espace vectoriel. En fait, la définition ne sert que pour ces ensembles de base. D'autres critères sont enduite utilisés pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, obtenu comme sous-espace vectoriel des espaces précédents.

En ce qui concerne la règle (iv), il faut bien prendre conscience qu'elle ne va pas de soi. 1 est le neutre du produit de $\mathbb{K}$, il n'y a aucune raison pour qu'il adopte une attitude comparable en ce qui concerne le produit d'un vecteur par 1. C'est le seul résultat d'un produit par un scalaire qui est fixé par les axiomes.

Il résulte des axiomes que :

v) $\forall x \in E, 0.x = 0_E$

où 0 est le scalaire neutre de $(\mathbb{K},+)$ et (0_E) le neutre de $(E,+)$. De même :

vi) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.0_E = 0_E$

vii) $-1.x = -x$ où -1 est le symétrique de 1 dans $(\mathbb{K},+)$ et $-x$ le symétrique de x dans $(E,+)$.

viii) $\lambda.x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

Démonstration :

v) $1.x = x = (1 + 0).x = 1.x + 0.x = x + 0.x$ donc $x = x + 0.x$ donc $0.x = 0_E$
vi) $\lambda.0_E = \lambda.(0.x) = (\lambda 0).x = 0.x = 0_E$
vii) $0_E = 0.x = (1 + (-1)).x = x + (-1).x$ donc $(-1).x = -x$
viii) Si $\lambda.x = 0_E$ et si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = \frac{1}{\lambda}.0_E$ donc $(\frac{1}{\lambda}\lambda).x = 0_E$ donc $1.x = 0_E$ donc $x = 0_E$

Dans la suite du chapitre, le point indiquant le produit entre le scalaire et le vecteur est généralement omis.

Une fois définis des espaces vectoriels, il est possible d'en définir d'autres. Par exemple, si E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors $E \times F$ en est un aussi, avec les lois naturelles :

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

Si E est un espace vectoriel et X un ensemble quelconque, alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E est un espace vectoriel, avec les lois :

$f + g : x \to f(x) + g(x)$

$\lambda f \quad : x \to \lambda f(x)$

2- Sous-espaces vectoriels

Une façon plus rapide de montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel est de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Soit E un espace vectoriel et F une partie de E. F est un sous-espace vectoriel de E si F muni des restrictions des lois de E est un espace vectoriel. Il suffit pour cela que F soit non vide et vérifie :

$\forall x \in F, \forall y \in F, x + y \in F$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda x \in F$

Il est par exemple inutile de vérifier que $x \in F \Rightarrow -x \in F$. Cela découle de la deuxième propriété avec $\lambda = -1$. De même, on aura $0_E = x + (-x) \in F$.

Il y a bien sûr les droites vectorielles, incluses dans les plans vectoriels, inclus dans les espaces vectoriels de dimension supérieure. Mais il y a aussi l'espace vectoriel des fonctions polynomiales, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions continues, inclus dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

PROPOSITION

Soit E *un espace vectoriel. Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de* E.

<u>Démonstration</u> :

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Soit G l'intersection des F_i. G est non vide car tous les F_i contiennent 0_E donc G aussi. Puis :

$\forall x, \forall y \qquad x \in G \text{ et } y \in G \Rightarrow \forall i, x \in F_i \text{ et } y \in F_i \Rightarrow \forall i, x + y \in F_i \Rightarrow x + y \in G$

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad x \in G \Rightarrow \forall i, x \in F_i \Rightarrow \forall i, \lambda x \in F_i \Rightarrow \lambda x \in G$

EXEMPLE :

On note $C^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions n fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel noté $C^\infty(\mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. $C^0(\mathbb{R})$ est différent de $C^1(\mathbb{R})$ (prendre $|x|$). $C^1(\mathbb{R})$ est différent de $C^2(\mathbb{R})$ (prendre $x^2.\mathrm{sg}(x)$, où $\mathrm{sg}(x)$ désigne la fonction signe, valant 1 pour $x > 0$, 0 pour $x = 0$ et –1 pour $x < 0$).

3- Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Une troisième façon de définir un espace vectoriel est de le définir comme sous-espace vectoriel engendré par une partie. Soit M une partie d'un espace vectoriel E. Considérons F l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$, avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et les x_i éléments de M. Alors :

i) F est un sous-espace vectoriel de E, car la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de M est une combinaison linéaire d'éléments de M.

ii) Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant M, alors F est inclus dans G, puisque toute combinaison linéaire d'élements de M appartient à G. F est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant M.

On dit que F est engendré par M ou que M est un système générateur de F ou une partie génératrice de F. On note alors F = Vect(M).

EXEMPLES :

❑ $\mathbb{K}^n$ est engendré par les n-uplets $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$.

❑ Dans $C^0(\mathbb{R})$, et soit n un entier. Les fonctions 1, x, x^2, ..., x^n engendrent le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

❑ Dans $C^0(\mathbb{R})$, l'ensemble $\{x^n, n \in \mathbb{N}\}$ engendre le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré quelconque.

❑ Si M = ∅, le sous-espace vectoriel engendré est {0}, obtenu par une somme nulle car vide.

4- Dépendance et indépendance linéaire

a) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les deux parties suivantes :

$$M : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = V$$

et

$$N : \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = X, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = Y, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = Z$$

Ces deux parties engendrent le même sous-espace vectoriel, car :

$$X = V - U \quad Y = V + U \quad Z = -V + 2U$$

ce qui prouve que le sous-espace vectoriel engendré par N est inclus dans celui engendré par M. Et :

$$U = \frac{1}{2}(Y - X) \qquad V = 2X + Z$$

ce qui prouve que le sous-espace vectoriel engendré par M est inclus dans celui engendré par N.

Les vecteurs de ce sous-espace vectoriel F peuvent s'écrire $\lambda U + \mu V$ (i) ou $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ (ii).

Considérons un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. A quelle condition appartient–il à F ?

Avec la combinaison linéaire (i), un vecteur appartient à F si et seulement si :

$$\exists\,\lambda,\ \exists\,\mu\ ,\ \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = 3\mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow\ \exists\,\lambda,\ \exists\,\mu,\begin{cases} \mu\ =\ \dfrac{y}{3} \\ \lambda = z + \dfrac{y}{3} \\ x = z + y \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée à l'existence est $x = z + y$, équation du plan vectoriel F. On remarquera par ailleurs que pour tout vecteur de F, les coefficients λ et μ sont uniques.

Avec la combinaison linéaire (ii), un vecteur appartient à F si et seulement si :

$$\exists\,\alpha,\ \exists\,\beta,\ \exists\,\gamma,\begin{cases} x = \alpha + 3\beta \\ y = 3\alpha + 3\beta - 3\gamma \\ z = -2\alpha + 3\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \exists\,\alpha,\ \exists\,\beta,\ \ \exists\,\gamma,\begin{cases} \alpha = x - 3\beta \\ \gamma = -\dfrac{y}{3} + x - 2\beta \\ z = x - y \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante est la même. Cependant, les coefficients α, β, γ ne sont pas uniques. Il en existe une infinité. Cela est lié au fait que, dans le deuxième cas, F est défini par trois vecteurs alors que deux suffiraient. Cela introduit un coefficient supplémentaire arbitraire.

Dans le cas (i), les vecteurs U et V sont dits linéairement indépendants. On dit aussi que (U,V) forme un système libre. Dans le cas (ii), les vecteurs X, Y et Z sont dits linéairement dépendants. On dit aussi que (X,Y,Z) forme un système lié. Cette deuxième terminologie provient du fait qu'il existe une relation de liaison entre X, Y et Z :

$$3X - Y + 2Z = 0$$

b) PROPOSITION–DEFINITION

Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *un système de n vecteurs d'un espace vectoriel* E. *Il y a équivalence entre :*

i) *Toute combinaison linéaire de* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *s'écrit de manière unique sous la forme* $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i$

ii) $\forall\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0_E \Rightarrow\ \forall\, i,\ \lambda_i = 0.$

Un tel système est dit libre.

Un système qui n'est pas libre est dit lié. Il existe alors $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ *non tous nuls tels que* $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0_E$

On prendra garde à différencier *non tous nuls* et *tous non nuls*.

Non tous nuls signifie : $\exists\, i,\ \lambda_i \neq 0$

Tous non nuls signifie : $\forall\, i,\ \lambda_i \neq 0$

<u>Démonstration</u> :

i) $\Rightarrow$ ii) : résulte de l'unicité de la décomposition de $0_E = 0v_1 + ... + 0v_n$.

ii) $\Rightarrow$ i) : se montre en supposant qu'il existe deux décompositions possibles d'un vecteur w. On a alors :

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, v_i$$

donc $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)v_i = 0_E$

donc $\forall\, i$, $\lambda_i - \mu_i = 0$ d'après l'hypothèse ii)
donc $\forall\, i$, $\lambda_i = \mu_i$
ce qui prouve bien l'unicité de la décomposition.

c) PROPRIETES
Soient A *et* B *deux systèmes de vecteurs :*
i) $0_E \in A \Rightarrow A$ *lié.*
ii) A *lié et* $A \subset B \Rightarrow B$ *lié.*
iii) $v \neq 0_E \Rightarrow (v)$ *libre.*
iv) A *libre et* $B \subset A \Rightarrow B$ *libre.*
v) A *lié* $\Rightarrow$ *il existe un des vecteurs de* A *combinaison linéaire des autres.*

Démontration :
i) La combinaison $1.0_E = 0_E$ de vecteurs de A est nulle et possède un coefficient non nul.
ii) Prendre pour relation de liaison dans B la même que celle que l'on a dans A.
iii) Si $\lambda v = 0_E$ avec $v \neq 0_E$, alors $\lambda = 0$ donc le système constitué du seul vecteur (v) est libre.
iv) Contraposée du ii)

v) Si A est lié, il existe une combinaison linéaire de vecteurs de A vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0_E$ avec l'un des λ_i au moins non nul. On a alors $v_i = -\dfrac{1}{\lambda_i} \sum_{j \neq i} \lambda_j\, v_j$.

Un système constitué d'une infinité de vecteurs est dit libre si toute partie finie de ce système est elle-même libre.

5- Bases
Un système de vecteurs libre et générateur s'appelle une base. Tout vecteur de E s'écrit alors de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. Les scalaires de cette combinaison sont les composantes du vecteur. Le nombre de vecteurs d'une base, s'il est fini, s'appelle la dimension de E, notée dim(E). On montre dans le II) que toutes les bases de E ont même nombre de vecteurs.

EXEMPLES :
❑ Une base de $\mathbb{K}^n$ est (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,0,0,...,1), dite base canonique. $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

❑ Une base de l'espace des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n est donnée par les fonctions qui à x associent 1, x, x^2, ..., x^n. Une base de l'espace des fonctions polynômes de degré quelconque est donnée par les fonctions $x \to x^n$, n décrivant $\mathbb{N}$.

❑ Si E et F sont deux espaces vectoriels de bases respectives $(e_1, ..., e_p)$ et $(f_1, ..., f_n)$, alors $E \times F$ admet pour base $(e_1, 0_F), ..., (e_p, 0_F), (0_E, f_1), ..., (0_E, f_n)$. En effet, tout couple (x, y) de $E \times F$ avec $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j (0_E, f_j)$$

On a donc $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$, formule qu'on retrouve implicitement dans :

$$n + p = \dim(\mathbb{R}^{n+p}) = \dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) = \dim(\mathbb{R}^n) + \dim(\mathbb{R}^p)$$

6- Relation de liaison

La méthode ci-dessous permet de rechercher une relation de liaison. On suppose les W_i donnés par leurs coefficients dans une base.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix} \end{array}$$

On fait des combinaisons entre chaque W_i, $i \geq 2$, et W_1 de façon à disposer des zéros en première ligne (Si W_1 possédait un zéro en première ligne, le permuter avec un vecteur ayant un premier coefficient non nul. Si tous les vecteurs possèdent une première composante nulle, passer à la deuxième ligne)

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_1 & W_4-2W_1 & W_5-W_1 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-3\\-2\\-3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-5\end{pmatrix} \end{array}$$

On fait de même des combinaisons linéaires entre le deuxième vecteur $W_2 - W_1$ et chacun de ceux qui suivent de façon à disposer des zéros en deuxième ligne.

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+3W_2-5W_1 & W_5+2W_2-3W_1 \\ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\-8\\-6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\-3\\-7\end{pmatrix} \end{array}$$

On itère.

$$\begin{array}{ccccc}
W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+2W_3+W_2-5W_1 & 4W_5+3W_3+5W_2-12W_1 \\
\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-14\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-40\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
W_1 & W_2-W_1 & W_3-W_2 & W_4+2W_3+W_2-5W_1 & 28W_5-20W_4-19W_3+15W_2+16W_1 \\
\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\4\\-4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-14\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}
\end{array}$$

La relation de liaison est $28W_5 - 20W_4 - 19W_3 + 15W_2 + 16W_1 = 0$.

Nous verrons plus loin que, si à la fin du processus, on n'obtient pas le vecteur nul, c'est que les vecteurs forment un système libre.

II : Espace de dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il est engendré par une partie finie. Le but de ce paragraphe est de montrer que toutes les bases de cet espace vectoriel sont constituées du même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appellera dimension de l'espace.

1- Théorème fondamental

THEOREME

Soit E un espace vectoriel engendré par le système $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *et soit* $(w_1, w_2, ..., w_p)$ *un système quelconque. Si ce système est libre, alors p est inférieur ou égal à n.*

Autre formulation en prenant la contraposée *:*

si p est strictement supérieur à n, alors $(w_1, w_2, ..., w_p)$ *est un système lié.*

<u>Démonstration</u> :

On montre par récurrence sur n la deuxième formulation. Soit $p > n$.

❑ Cette propriété est vraie pour $n = 1$, car si (w_1, w_2) sont deux vecteurs d'un espace vectoriel engendré par (v_1), il existe α et β tels que :

$$w_1 = \alpha v_1 \quad \text{et} \quad w_2 = \beta v_1$$

Si les deux coefficients sont nuls, alors le système est lié. Sinon, on a :

$$\beta w_1 - \alpha w_2 = 0$$

et le système est également lié.

❑ On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ et on la montre au rang n. Soit $(w_1, ..., w_p)$ un système d'un espace vectoriel engendré par $(v_1, ..., v_n)$, avec $p > n$. Ecrivons les vecteurs w_i par leur colonne de composantes selon $(v_1, ..., v_n)$ (Ces composantes peuvent ne pas être uniques si $(v_1, ..., v_n)$ est lié).

$$\begin{array}{cccc}
w_1 & w_2 & \ldots & w_p \\
\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\ldots\\a_{n1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\ldots\\a_{n2}\end{pmatrix} & \ldots & \begin{pmatrix}a_{1p}\\a_{2p}\\\ldots\\a_{np}\end{pmatrix}
\end{array}$$

Si tous les a_{1i} sont nuls, alors les w_i appartiennent en fait au sous-espace vectoriel engendré par $(v_2, ..., v_n)$. D'après l'hypothèse de récurrence, les w_i forment bien un système lié.

Sinon, l'un des a_{1i} est non nul, par exemple a_{11}. On annule alors la première composante des autres vecteurs :

$$\begin{array}{ccccc} w_1 & & a_{11}w_2 - a_{12}w_1 & \dots & a_{11}w_p - a_{1p}w_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

Les $p - 1$ derniers vecteurs sont combinaisons des $n - 1$ vecteurs $(v_2, ..., v_n)$. Or $p - 1 > n - 1$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique : ils sont liés. Il existe donc des coefficients λ_i non tous nuls tels que :

$$\lambda_2(a_{11}w_2 - a_{12}w_1) + ... + \lambda_p(a_{11}w_p - a_{1p}w_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\lambda_2 a_{12} + ... + \lambda_p a_{1p})w_1 + \lambda_2 a_{11}w_2 + ... + \lambda_p a_{11}w_p = 0$$

On obtient une combinaison linéaire nulle des w_i. Pour voir que le système des (w_i) est lié, il suffit de s'assurer que l'un des coefficients est non nul. Or le coefficient de w_i, $2 \leq i \leq p$, vaut $\lambda_i a_{11}$, et l'on sait que l'un des λ_i est non nul et que a_{11} est non nul.

2- Théorème de la dimension des bases

THEOREME

Soit E *un espace vectoriel engendré par une partie finie. Alors* E *admet une base, et toutes les bases de* E *ont même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de* E.

Démonstration :

Existence d'une base : Si $(v_1, ..., v_n)$ engendre E et si ce système est libre, il forme une base. S'il est lié, l'un des vecteurs, par exemple v_n est combinaison linéaire des autres. Il n'est pas difficile de voir que $(v_1, ..., v_{n-1})$ reste un système générateur de E. On itère le procédé en supprimant un vecteur combinaison des autres jusqu'à obtenir un système générateur libre. Cette méthode est constructive.

Dimension des bases : Soient $(v_1, ..., v_n)$ et $(w_1, ..., w_p)$ deux bases. Alors, d'après le 1) :

- ❑ $(v_1, ..., v_n)$ est générateur et $(w_1, ..., w_p)$ est libre donc $p \leq n$.
- ❑ $(v_1, ..., v_n)$ est libre et $(w_1, ..., w_p)$ est générateur donc $n \leq p$.

Donc $p = n$

CONSEQUENCES :

i) $(w_1, ..., w_n)$ *libre* $\Rightarrow n \leq dim(\mathrm{E})$
ii) $(w_1, ..., w_n)$ *générateur* $\Rightarrow n \geq dim(\mathrm{E})$
iii) $(w_1, ..., w_n)$ *base* $\Rightarrow n = dim(\mathrm{E})$
iv) $n > dim(\mathrm{E}) \Rightarrow (w_1, ..., w_n)$ *lié*
v) $(w_1, ..., w_n)$ *libre et* $n = dim(\mathrm{E}) \Rightarrow (w_1, ..., w_n)$ *base*
vi) $(w_1, ..., w_n)$ *générateur et* $n = dim(\mathrm{E}) \Rightarrow (w_1, ..., w_n)$ *base*

Démonstration :

i) résulte du théorème fondamental.
ii) aussi.
iii) est la définition de dim(E)
iv) est la contraposée de i)

v) Pour tout v de E, $(w_1, ..., w_n, v)$ est lié (d'après iv). Donc il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i + \alpha v = 0$. Or α doit nécessairement être non nul, sinon tous les α_i seraient nuls. Donc v est combinaison linéaire des w_i, qui forment donc un système générateur.

vi) Si le système est lié, on pourrait supprimer un des vecteurs combinaison linéaire des autres tout en gardant un système générateur. Cela imposerait que dim(E) soit strictement inférieur à n.

Les points iv) et v) sont particulièrement utilisés.

3- Théorème de la base incomplète

Un autre moyen de former une base est le suivant :

THEOREME

Soit E *un espace vectoriel de base* $(v_1, ..., v_n)$*, et soit* $(w_1, ..., w_p)$ *un système libre. Alors il existe* $n - p$ *vecteurs parmi les* v_i *tel que le système constitué de ces* $n - p$ *vecteurs* v_i *et des* w_j *forme une base de* E.

Démonstration :

Par un raisonnement analogue au vi) du paragraphe précédent, on voit que, si $p < n$, il existe l'un des v_i tel que $(w_1, ..., w_p, v_i)$ soit libre. (Si tous les systèmes sont liés, on montrerait comme dans la conséquence vi du paragraphe précédent que les v_i sont combinaison linéaire des w_j, et donc que les w_j sont générateurs). En notant $w_{p+1} = v_i$, on itère le procédé jusqu'à obtenir n vecteurs libres w_i. Ils forment alors une base. Cette méthode est constructive.

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^4$, on prend la base canonique $(V_1, ..., V_4)$ et le système libre suivant :

$$\begin{array}{cc} W_1 & W_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

(W_1, W_2, V_1) est lié
(W_1, W_2, V_2) est lié
(W_1, W_2, V_3) est libre
(W_1, W_2, V_3, V_4) est libre. Ces quatre vecteurs forment une base.

4- Dimension d'un sous-espace vectoriel

PROPOSITION

Soit F *un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors* F *est de dimension finie et dim*(F) ≤ *dim*(E)*. Si dim*(F) = *dim*(E)*, alors* F = E.

Démonstration :

Parmi tous les systèmes libres de F, on en choisit un de cardinal maximal. Le nombre des vecteurs de ce système est nécessairement inférieur ou égal à dim(E) puisqu'il est libre dans E. Par ailleurs, étant libre et maximal dans F, il forme une base de F. En effet, tout rajout d'un vecteur v à ce système donne un système lié, et comme plus haut, on montre que v est combinaison linéaire des vecteurs du système.

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si dim(F) = dim(E), alors F = E, puisqu'une base de F étant un système libre, et possédant n = dim(E) vecteurs est aussi une base de E.

Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est une droite vectorielle. Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est un plan vectoriel. Un sous-espace vectoriel de dimension dim(E) – 1 est un hyperplan vectoriel. Si E = {0}, sa dimension est nulle.

5- Rang d'un système de vecteurs

On appelle rang d'un système de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système. C'est donc le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire du système. Un tel système libre maximal forme une base du sous-espace vectoriel qu'il engendre.

Le rang se calcule par la même méthode exposée dans le I-6). En effet, les opérations élémentaires effectuées sur les colonnes montrent qu'à chaque étape, le sous-espace vectoriel engendré n'est pas modifié. Une fois arrivé à un système de vecteurs dont les premiers sont échelonnés en colonne et les derniers nuls, le rang est égal au nombre de vecteurs non nuls, puisque les vecteurs non nuls échelonnés forment une famille libre, et donc une base du sous-espace vectoriel engendré. En particulier, si on n'obtient pas de vecteur nul à la fin du calcul, c'est que le système final est une base du sous-espace vectoriel engendré et il en est alors de même du système initial, qui est générateur avec un nombre de vecteurs égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré.

EXEMPLE :

Si on reprend l'exemple traité dans le I-6) :

$$\begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

on arrive au système échelonné suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc le rang du système de vecteurs est 4.

On remarquera que la démarche est identique à la recherche du rang d'une matrice telle qu'elle est exposée dans le chapitre sur le calcul matriciel MATRICE.PDF, sauf que le calcul se fait ici selon les colonnes, alors que pour les systèmes, il s'effectue selon les lignes. On montre dans le chapitre L(E-F).PDF sur les applications linéaires que le rang est le même, qu'il soit calculé selon les colonnes ou selon les lignes.

III : Somme de sous-espaces vectoriels

1- Somme de deux sous-espaces vectoriels

DEFINITION

Soit E *un espace vectoriel, de dimension finie ou non,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *On appelle somme de* F *et* G *l'ensemble défini par :*

$$F + G = \{ z \mid \exists x \in F, \exists y \in G, z = x + y\}.$$

F + G est le sous-espace vectoriel engendré par la partie $F \cup G$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

2- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On s'intéresse à la question de savoir si z peut se décomposer de plusieurs façons sous la forme $x + y$, $x \in F$, $y \in G$. Si la décomposition est unique, la somme est directe.

EXEMPLE 1 :

E de dimension 3, de base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
F plan engendré par $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} - \boldsymbol{i})$
G plan engendré par $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$

La somme n'est pas directe car :

$$-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \underbrace{-\boldsymbol{i}}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}_{\in G} = \underbrace{-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{k}}_{\in G}$$

EXEMPLE 2 :

E de dimension 3, de base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.
F plan engendré par $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$
G droite engendrée par $(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i})$

La somme est directe car :

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}(y + 2x - z)\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}(y + z)(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}(y - z)(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i})$$

et il n'y a pas d'autre possibilité. En effet, la résolution du système :

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = a\boldsymbol{i} + b(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + c(\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} - \boldsymbol{i})$$

conduit à la seule solution donnée ci-dessus.

PROPOSITION

Il y a équivalence entre :

i) $F \cap G = \{0_E\}$
ii) $x + y = 0_E$ *et* $x \in F, y \in G \Rightarrow x = y = 0_E$
iii) *Tout z de* F + G *s'écrit de manière unique* $x + y$, $x \in F$, $y \in G$.

<u>Démonstration</u> :

i) ⇒ ii)
Si $x + y = 0_E$, alors $x = -y$ est élément de F et de G, donc est nul.

ii) ⇒ iii)
Si $z = x + y = x' + y'$ avec $x \in F$, $x' \in F$, $y \in G$, $y' \in G$, alors :
$x - x' + y - y' = 0_E$ avec $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$, donc $x - x' = y - y' = 0_E$ donc $x = x'$ et $y = y'$

iii) ⇒ i)
Si $z \in F \cap G$, z peut s'écrire $z = \underset{\in F}{z} + \underset{\in G}{0_E} = \underset{\in F}{0_E} + \underset{\in G}{z}$
La décomposition étant unique, $z = 0_E$.

Si une somme est directe, on note $F \oplus G$ au lieu de F + G. La propriété i) est la plus couramment utilisée pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

3- Supplémentaires

On appelle supplémentaire de F un sous-espace vectoriel G tel que $E = F \oplus G$. Cela signifie :

i) Tout z de E est somme d'un élément de F et d'un élément de G.

ii) Cette décomposition est unique.

ou encore que :

i) $E = F + G$

ii) $F \cap G = \{0\}$

EXEMPLE :

Soit $E = C^0(\mathbb{R})$, notons F l'ensemble des fonctions paires et G l'ensemble des fonctions impaires. Ces deux ensembles sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Toute fonction se décompose en partie paire et partie impaire.

En effet :

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit de sous-espace vectoriel.

$F \cap G = \{0\}$ car si une fonction f est à la fois paire et impaire, on a, pour tout x :

$$f(-x) = f(x) = -f(x)$$

donc, pour tout x, $f(x) = 0$

$F + G = E$ car toute fonction f se décompose sous la forme :

$$\forall x,\ f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

avec $x \to \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ paire et $x \to \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ impaire.

Ainsi, on a par exemple $e^x = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$, décomposition de exp en sa partie paire et sa partie impaire.

Si $E = F \oplus G$, on peut définir le projecteur p de E sur F parallèlement à G et la symétrie s par rapport à F parallèlement à G :

$$\begin{array}{ccl} E & \to & E \\ z = \underset{\in F}{x} + \underset{\in G}{y} & \to & p(z) = x \\ & & s(z) = x - y \end{array}$$

EXEMPLE :

Reprenons l'exemple de $E = C^0(\mathbb{R})$, du sous-espace F des fonctions paires et du sous-espace G des fonctions impaires. On considère l'application $S : E \to E$ qui, à toute fonction f, associe la fonction $S(f)$ définie par $S(f)(x) = f(-x)$. S est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des fonctions paires parallèlement au sous-espace vectoriel des fonctions impaires.

4- Cas de la dimension finie

PROPOSITION

Si E *est de dimension finie et si* F *est un sous-espace vectoriel de* E, *alors il existe un supplémentaire* G *de* F. *Tous les supplémentaires ont pour dimension* $dim(E) - dim(F)$.

<u>Démonstration</u> :

Si $(v_1,\dots,v_n)$ est une base de E et $(w_1,\dots,w_p)$ une base de F, le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la base de F par $n - p$ vecteurs pour former une base de E. Ces $n - p$ vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel G qui sera supplémentaire de F.

PROPOSITION (Formule de Grassmann)
Soit F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors* F + G *est de dimension finie et :*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

<u>Démonstration</u> :
On notera l'analogie avec la formule $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$
On choisit une base $(u_1, ..., u_p)$ de $F \cap G$, que l'on complète en une base $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ de F et $(u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r)$ de G. $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_r)$ est une base de F + G. En effet :
Ce système est générateur car tout vecteur de F + G est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, donc somme d'une combinaison linéaire de $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ et d'une combinaison linéaire de $(u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r)$ donc est une combinaison linéaire de $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q, w_1, ..., w_r)$.
Ce système est libre car si on a des coefficients α_i, β_j et γ_k tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j v_j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k = 0$$

alors $$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j v_j = -\sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k$$

or le membre de gauche est élément de F, celui de droite est élément de G, donc il s'agit d'un élément de $F \cap G$. Il existe donc des scalaires δ_m tels que ce vecteur soit égal à $\sum_{m=1}^{p} \delta_m u_m$. On a donc :

$$-\sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k = \sum_{m=1}^{p} \delta_m u_m$$

donc $$\sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k + \sum_{m=1}^{p} \delta_m u_m = 0$$

Mais $(u_1, ..., u_p, w_1, ..., w_r)$ est une base de G donc est libre, donc tous les γ_k (et les δ_m) sont nuls. Donc $$-\sum_{k=1}^{r} \gamma_k w_k = 0$$

donc $$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j v_j = 0$$

Mais $(u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q)$ est une base de F donc est libre, donc tous les α_i et les β_j sont nuls.
On a bien montré que tous les coefficients de la combinaison linéaire initiale étaient nuls. On a donc :

$\dim(F \cap G) = p$
$\dim(F) = p + q$
$\dim(G) = p + r$
$\dim(F + G) = p + q + r$

d'où la formule $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

En particulier :

i) $\dim (F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

ii) Si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ alors F et G sont en somme directe. En effet, $\dim(F \cap G)$ est nul dans ce cas, donc $F \cap G = \{0\}$.

iii) Si F et G sont en somme directe, une base de F ⊕ G s'obtient en réunissant une base de F et une base de G

iv) Inversement, si on scinde une base de E en deux systèmes disjoints, ces deux systèmes engendrent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

La fin du chapitre est réservée aux MPSI

5- Somme de plusieurs sous-espaces

DEFINITION

Soit E *un espace vectoriel, de dimension finie ou non,* $F_1, F_2, \ldots, F_p$ *p sous–espaces vectoriels de* E. *On appelle somme des* F_i *l'ensemble défini par :*

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_p = \{ z \mid \exists x_i \in F_i, z = x_1 + x_2 + \ldots + x_p \}.$$

$F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est le sous–espace vectoriel engendré par la réunion des F_i. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les F_i.

On dit que la somme est directe si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = 0_E$ *et* $\forall i, x_i \in F_i \Rightarrow \forall i, x_i = 0_E$

ii) *Tout z de* $F_1 + \ldots + F_p$ *s'écrit de manière unique* $x_1 + \ldots + x_p$, $x_i \in F_i$.

iii) $\forall i, (F_1 + F_2 + \ldots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0_E\}$

Démonstration :

i) ⇒ ii)

Si $z = x_1 + \ldots + x_p = y_1 + \ldots + y_p$ avec $x_1 \in F_1, y_1 \in F_1, \ldots, x_p \in F_p, y_p \in F_p$

alors $(x_1 - y_1) + \ldots + (x_p - y_p) = 0$ avec $x_i - y_i \in F_i$ donc $x_i - y_i = 0$.

ii) ⇒ iii)

Si $z \in (F_1 + F_2 + \ldots + F_{i-1}) \cap F_i$, alors il existe $x_1 \in F_1, \ldots, x_{i-1} \in F_{i-1}, y_i \in F_i$ tels que :

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} = y_i \\ &= x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + 0 = 0 + 0 + \ldots + 0 + y_i \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition impose que $x_1 = \ldots = x_{i-1} = y_i = 0$, donc $z = 0$

iii) ⇒ i)

$x_1 + x_2 + \ldots + x_p = 0 \Rightarrow x_p = -x_1 - \ldots - x_{p-1}$ élément de $(F_1 + F_2 + \ldots + F_{p-1}) \cap F_p$. Donc $x_p = 0$. On procède de même par récurrence descendante pour les autres composantes.

On note cette somme $E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_p$. Dans le cas de la dimension finie, on a :

i) Une base de la somme directe s'obtient en réunissant les bases de tous les sous–espaces vectoriels E_i.

ii) $\dim (E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) = \dim E_1 + \ldots + \dim E_p$.

iii) Inversement, si on scinde une base de E en p systèmes disjoints, ces systèmes engendrent des sous–espaces vectoriels en somme directe.

iv) En particulier, si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base, on a la somme directe : $\mathbb{K}v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}v_n$ où l'on note $\mathbb{K}v$ le sous–espace vectoriel engendré par v.

v) Si les F_i sont des sous-espaces tels que $\dim(\sum F_i) = \sum \dim(F_i)$, alors les F_i sont en somme directe. En effet, le système de vecteurs obtenus en réunissant des bases de chaque F_i est un système générateur de $\sum F_i$ et il possède $\sum \dim(F_i)$ vecteurs. Si ce nombre est égal à $\dim(\sum F_i)$, cela signifie que le nombre de vecteurs du système générateur est égal à la dimension du sous-espace vectoriel qu'il engendre, donc que ce système en est une base. La décomposition d'un vecteur de $\sum F_i$ en somme de vecteurs de F_i sera donc unique.

IV : Espaces Affines

1– Définition

Considérons l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$. Un complexe $z = a + ib$ peut être considéré comme un vecteur (on parle du vecteur d'affixe z) ou comme un point (on parle du point d'affixe z). Mais il s'agit du même complexe z. Celui-ci peut donc, au gré de l'utilisateur, être un point ou un vecteur. Il en est de même de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur ou les coordonnées d'un point. C'est seulement l'utilisateur qui va décider du regard qu'il porte sur ce triplet. On peut évidemment généraliser ce point de vue à $\mathbb{R}^n$, mais également à n'importe quel espace vectoriel. Les éléments d'un espace vectoriel peuvent être considérés évidemment comme des vecteurs, mais dans ce paragraphe, nous allons également les considérer comme des points. Se pose alors la question suivante : si a et b, éléments de E sont des points, quel est le vecteur qui les relie ? Si on regarde ce qui ce passe dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur reliant A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à B $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ n'est autre que $\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - \mathrm{z} \end{pmatrix}$, autrement dit, B – A. On procèdera de même dans le cas général. Dans E, le vecteur reliant a à b est le vecteur $b - a$. Pour conserver les notations usuelles en géométrie, nous noterons les éléments de E avec une majuscule lorsqu'on les considère comme des points (A et B). Le vecteur $\boldsymbol{AB}$ n'est autre que B – A.

On a alors les propriétés, bien connue en géométrie :

❑ Le relation de Chasles : $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC}$ puisque B – A + C – B = C – A.

❑ Pour tout point A de E, l'application M $\rightarrow$ $\boldsymbol{AM}$ est bijective. Sa réciproque est l'application qui, à un vecteur $\boldsymbol{v}$ de E associe le point M tel que $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{v}$, autrement dit, M – A = $\boldsymbol{v}$, ce que nous noterons aussi M = A + $\boldsymbol{v}$ et qui est le translaté de A par la translation de vecteur $\boldsymbol{v}$.

Voici un exemple moins habituel d'espace affine. Lorsque l'on résout une équation différentielle linéaire à second membre nul, on trouve que l'ensemble Z des solutions est un espace vectoriel de dimension égale à l'ordre de l'équation différentielle. C'est une droite vectorielle pour une équation différentielle du premier ordre, un plan vectoriel pour une équation différentielle du second ordre. Lorsque le second membre est non nul, la solution générale s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit A l'ensemble des solutions avec second membre, et y_0 un élément particulier de A. A et Z sont tous deux inclus dans l'espace E des fonctions. Z est un sous-espace vectoriel de E. Mais A est considéré comme sous-espace affine. Il est en effet judicieux de considérer ses éléments comme des points. Deux éléments y_1 et y_2 de A sont de la forme $y_0 + z_1$ et $y_0 + z_2$, avec z_1 et z_2 éléments de Z. La différence $y_2 - y_1$ est alors un vecteur, élément de Z. De même que l'on obtient un point M d'une droite affine à partir d'un point M_0 de cette droite et d'un vecteur $\boldsymbol{U}$ colinéaire à un vecteur directeur, de façon que $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{M_0M}$, de même on obtient une solution y de A à partir d'une solution particulière y_0 et d'un vecteur de Z, z, de façon que $z = y - y_0$.

Si A est un point de E et (e_1, e_2, ..., e_n) une base, on appelle coordonnées d'un point M dans le repère (A, e_1, ..., e_n) les composantes du vecteur $\boldsymbol{AM}$ dans la base (e_1, ..., e_n). Si ces composantes sont notées x_i, on a :

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

2– Sous-espaces affines

DEFINITION :

Soit M_0 *un point de* E *et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *On appelle sous-espace affine passant par* M_0 *de direction* F *l'ensemble des points M tels que* $\boldsymbol{M_0M}$ *appartienne à* F. *On le note* $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F}$.

Si F est une droite vectorielle engendrée par $\boldsymbol{V}$, $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F}$ est appelée droite affine et est égal à $\{\mathrm{M} \mid \boldsymbol{M_0M} = \alpha\boldsymbol{V}\} = \{\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \alpha\boldsymbol{V}\}$.

Si F est un plan vectoriel engendré par ($\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$), $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F}$ est dit plan affine et est égal à $\{\mathrm{M} \mid \boldsymbol{M_0M} = \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}\} = \{\mathrm{M} = \mathrm{M}_0 + \alpha\boldsymbol{U} + \beta\boldsymbol{V}\}$.

Si $\mathrm{F} = \{0_\mathrm{E}\}$, alors $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F} = \{\mathrm{M}_0\}$.

Si F = E, alors $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F} = \mathrm{E}$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, inclus dans un sous-espace vectoriel G de E, alors tout sous-espace affine $\mathrm{M}_0 + \mathrm{F}$ sera dit parallèle à tout sous-espace affine $\mathrm{M}_1 + \mathrm{G}$.

PROPOSITION :

Soit B et C deux sous-espaces affines de direction respectives F *et* G. *Alors, ou bien* $B \cap C = \varnothing$, *ou bien* $B \cap C$ *est un sous-espace affine de direction* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

Démonstration :

En effet, si M_0 est un point de $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}$, alors $B \cap C = \{\mathrm{M} \mid \boldsymbol{M_0M} \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}\}$

Annexe I : Barycentres

Dans cette annexe, on définit le barycentre de points de l'espace E. Il est utile d'avoir lu le paragraphe IV relatif aux notations dans un espace affine (espace de points).

PROPOSITION-DEFINITION

Soit (A_i) *une famille de n points d'un espace et* (λ_i) *n réels. Alors :*

i) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, *l'expression* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iM}$ *ne dépend pas du point* M *choisi*

ii) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, *alors il existe un unique point* G *tel que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iG} = 0_\mathrm{E}$. G *s'appelle barycentre des points* A_i *affecté des coefficients* λ_i.

Démonstration :

i) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iM} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathrm{M} - \mathrm{A}_i) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$ ne dépend pas de M

ii) On notera $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iG} = 0_\mathrm{E} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\mathrm{G} - \mathrm{A}_i) = 0_\mathrm{E} \Leftrightarrow \Lambda\mathrm{G} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i = 0_\mathrm{E} \Leftrightarrow \mathrm{G} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$$

Si le lecteur a un doute sur la validité des notations qui précèdent, il prendra une origine arbitraire O et écrira.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{A_iG} = 0_\mathrm{E} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\boldsymbol{OG} - \boldsymbol{OA_i}) = 0_\mathrm{E} \Leftrightarrow \Lambda\boldsymbol{OG} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{OA_i} = 0_\mathrm{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{OG} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{OA_i}$$

L'expression trouvée pour G entraîne également que le barycentre est inchangé lorsque l'on multiplie tous les λ_i par une même constante non nulle. En particulier, on peut diviser tous les λ_i par leur somme, et se ramener ainsi à des λ_i dont la somme vaut 1. G prend alors la forme simple :

$$\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$$

Si tous les coefficients sont égaux, on parle d'isobarycentre.

EXEMPLES :

❑ <u>Le milieu d'un segment</u> [A, B] est le barycentre de A et B affectés des mêmes coefficients.

❑ <u>L'indice des prix</u> (les informations ci-dessous datent de quelques années. Elles ont pu être mises à jour depuis) : il s'agit d'un barycentre portant sur 295 articles. A_i est le prix de l'article n°*i*, et λ_i son coefficient de pondération. On a par exemple :

$\Lambda = 10000$
$\lambda_i = 106$ pour le pain
$= 12$ pour le boeuf haché
$= 5$ pour les imperméables
$= 59$ pour les téléviseurs
$= 299$ pour l'automobile
...

ASSOCIATIVITE DU BARYCENTRE

Soit G *barycentre des* $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$. *On partitionne* I *en k parties disjointes* $\mathrm{I}_1, ..., \mathrm{I}_k$, *de façon que, pour tout i, le barycentre* G_i *des* $(\mathrm{A}_j, \lambda_j)_{j\in \mathrm{I}_i}$ *soit défini (il suffit pour cela que la somme* m_i *des* λ_j *pour j élément de* I_i *soit non nulle). Alors* G *est le barycentre des* $(\mathrm{G}_i,m_i)_{i\in \{1..k\}}$

<u>Démonstration</u> :

On a en effet, en supposant que $\sum \lambda_j = \sum m_i = 1$:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \mathrm{G}_i = \sum_{i=1}^{k} \left[m_i \sum_{j\in \mathrm{I}_i} \frac{\lambda_j}{m_i} \mathrm{A}_j \right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j\in \mathrm{I}_i} \lambda_j \mathrm{A}_j = \sum_{j\in \mathrm{I}} \lambda_j \mathrm{A}_j = \mathrm{G}$$

Cette propriété facilite parfois le calcul du barycentre en fractionnant les difficultés.

PROPOSITION

Soient $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de points d'un espace affine. L'ensemble des barycentre de ces points affectés de coefficients quelconques forme un sous-espace affine appelé sous-espace affine engendré par les* (A_i). *Ce sous-espace affine est le sous-espace affine passant par l'un de ces points et de direction le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs* $(\boldsymbol{A_1A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_1A_n})$. *C'est le plus petit sous-espace affine contenant la famille de points* (A_i).

<u>Démonstration</u> :

Notons B le sous-espace affine passant par A_1 et de direction F le sous-espace vectoriel engendré par $(\boldsymbol{A_1A_2}, \ldots, \boldsymbol{A_1A_n})$. Tous les A_i sont éléments de B.

Si G est barycentre des (A_i, λ_i), avec $\sum \lambda_i = 1$, alors :

$$G = \sum \lambda_i A_i \Rightarrow \boldsymbol{A_1G} = \sum \lambda_i\, \boldsymbol{A_1A_i} \text{ est élément de F}$$

ce qui prouve que G est élément de B.

Inversement, si G est élément de B, alors il existe des λ_i, $2 \leq i \leq n$, tels que :

$$\boldsymbol{A_1G} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, \boldsymbol{A_1A_i}$$

Si l'on pose $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n$, alors l'égalité précédente est équivalente à écrire que G est barycentre des (A_i, λ_i), $1 \leq i \leq n$.

Enfin, soit C un sous-espace affine contenant les A_i. La première partie de la démonstration ci-dessus appliquée à C plutôt qu'à B montre que C contient les barycentres des A_i, donc contient B puisque celui-ci est l'ensemble des barycentres des A_i.

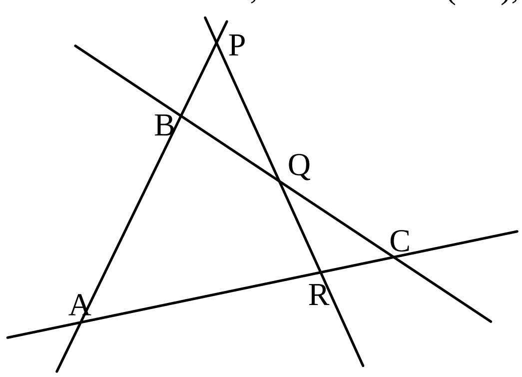
EXEMPLES :

❑ L'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB). On obtient ainsi un paramétrage pratique de cette droite : $t \in \mathbb{R} \to (1 - t)A + tB = A + t\boldsymbol{AB}$. Si on se limite à $t \in [0,1]$, on obtient un paramétrage du segment [A,B].

❑ L'ensemble des barycentres de trois points non alignés A, B et C est le plan (ABC).

❑ Le théorème de Ménélaus (fin du I$^{\text{er}}$ siècle). Il s'énonce :

Soit un triangle ABC, et trois points distincts de A, B et C : P sur (AB), Q sur (BC) et R sur (AC).



Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$$

Dans la notation ci-dessus, $\overline{PA}$ désigne la mesure algébrique du couple (P,A). Il s'agit de la composante du vecteur ***PA*** suivant un vecteur directeur de la droite (AB). Cette mesure dépend du vecteur directeur choisi, mais le quotient $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ n'en dépend pas.

Pour montrer que cette condition est nécessaire, on peut raisonner sur les coefficients de P, Q et R, comme barycentres de A, B et C. Si A, B et C ne sont pas alignés et si on impose à la somme des coefficients d'être égale à 1, il y a en effet unicité des coefficients. Cela est équivalent à faire un calcul vectoriel, mais préserve la symétrie des rôles joués par A, B, C ou P, Q, R. Le tableau ci-dessous indique dans chaque ligne les coefficients à attribuer à A, B et C pour trouver le point dans la colonne de gauche

	A	B	C
P	p	$1 - p$	0
Q	0	q	$1 - q$
$R = \lambda P + (1-\lambda)Q$	$1 - r = \lambda p$	$0 = \lambda(1 - p)+(1 - \lambda)q$	$r = (1 - \lambda)(1 - q)$

On en déduit que $\lambda = -\frac{q}{1 - p - q}$, d'où $r = \frac{(1 - p)(1 - q)}{1 - p - q}$ et $1 - r = -\frac{pq}{1 - p - q}$

Par ailleurs : $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{1 - p}{p}$, $\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = -\frac{1 - q}{q}$ et $\frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = -\frac{1 - r}{r}$

D'où le résultat.

La réciproque se montre de la façon suivante :
Soient P, Q, R trois points vérifiant la relation, et soit R' l'intersection de (PQ) et (AC). Alors P, Q et R' vérifient également la relation, ce qui prouve que R et R' sont les mêmes barycentres relativement à A et C. Ils sont donc égaux.

BARYCENTRE EN PHYSIQUE

La propriété $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA_i} = 0$ joue un rôle fondamental en mécanique, lorsque les coefficients λ_i représentent les masses m_i des points A_i. En effet, dans bien des cas, un ensemble de points matériels peuvent être remplacés par le barycentre. Cela apparaît dans les théorèmes de Koenig.

Théorème de Koenig pour le moment cinétique :
Le moment cinétique par rapport à un point O d'un système de n points matériels A_i de masse m_i, animés d'une vitesse $\boldsymbol{V}_i$ dans un repère donné vaut :

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{OA}_i \wedge m_i \boldsymbol{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{OG} + \boldsymbol{GA}_i) \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{OG} \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i$$

$$= \boldsymbol{OG} \wedge \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i$$

Or de l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{GA_i} = 0$, on tire, en dérivant par rapport au temps : $\sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{V_i} - \boldsymbol{V_G}) = 0$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{V}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} = \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} \text{ en notant } \mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{O} = \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i$$

$$= \boldsymbol{OG} \wedge \mathrm{M}\, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} + \boldsymbol{L}_\mathrm{G}$$

Le moment cinétique du système par rapport à O est la somme du moment cinétique de G par rapport à O et du moment cinétique du système par rapport à G. A noter que ce dernier peut être calculé à l'aide des vitesses initiales $\boldsymbol{V}_i$ aussi bien qu'à l'aide des vitesses relatives au point G $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_\mathrm{G}$, puisque :

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_\mathrm{G})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{GA}_i \wedge m_i\, \boldsymbol{V}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{GA}_i \wedge \boldsymbol{V}_\mathrm{G}$$

$$= \boldsymbol{L}_\mathbf{G}$$

puisque $\sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{GA}_i = 0$.

Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique

Avec les notations précédentes, l'énergie du système dans le repère considéré vaut :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, (\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{V}_\mathrm{G})^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V}_\mathrm{G}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{V}_\mathrm{G} \rangle \text{ où } \langle\, ,\, \rangle \text{ désigne le produit scalaire}$$

or $\sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \boldsymbol{GA}_i = 0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathrm{V}_\mathrm{G}^2$$

L'énergie cinétique du système est égal à la somme de l'énergie cinétique du barycentre et de l'énergie cinétique du système dans le repère lié à G.

Mais le barycentre ne se limite pas au centre de gravité :

Les distributions de charges unipolaires

On considère des charges électriques q_i disposées en des points A_i. Si $\sum q_i$ est non nulle, alors on parle de distribution unipolaire. A grande distance, la distribution de ces charges est équivalente à une charge unique égale à $\sum q_i$, disposée au barycentre G des A_i munis des coefficients q_i. Cherchons l'erreur commise sur le potentiel électrique V en un point M éloigné. Notons $\boldsymbol{r_i}$ le vecteur $\boldsymbol{GA_i}$ et $\boldsymbol{r}$ le vecteur $\boldsymbol{GM}$. On a :

$$A_iM^2 = (\boldsymbol{GM} - \boldsymbol{GA_i})^2 = GM^2 - 2<\boldsymbol{GM}, \boldsymbol{GA_i}> + GA_i^2$$
$$= r^2 + r_i^2 - 2<\boldsymbol{GM}, \boldsymbol{GA_i}>$$
$$= r^2 \left(1 + \frac{r_i^2 - 2<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_i}>}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{A_iM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r_i^2 - 2<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_i}>}{r^2}\right)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_i}>}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right) \qquad \text{en effectuant un développement limité à l'ordre 2}$$

$$\Rightarrow \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{A_iM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum q_i \left(1 + \frac{<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_i}>}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$$

or $\sum q_i \boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{O}$

$$\Rightarrow \quad V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \text{ si on note } Q = \sum q_i.$$

On voit que le potentiel est, au terme $O(\frac{1}{r^3})$, égal au potentiel d'une charge unique $Q = \sum q_i$

Les distributions de charges dipolaires ou multipolaires :

Reprenons l'exemple précédent, mais avec $\sum q_i = 0$. Notons P le barycentre des charges positives, et N le barycentre des charges négatives. Si ces barycentres sont distincts, la distribution est dite dipolaire, sinon elle est multipolaire. Considérons le cas d'une distribution dipolaire. Reprenons le développement limité de $\frac{1}{A_iM}$, en notant cette fois $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ où O est le milieu de [PN], et $\boldsymbol{r_i} = \boldsymbol{OA_i}$.

$$\frac{1}{A_iM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r_i^2 - 2<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_i}>}{r^2}\right)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_i}>}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$$

Le potentiel créé par les charges positives est, en se limitant dans la somme aux indices i pour lesquels $q_i > 0$:

$$V^+(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{A_iM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum q_i \left(1 + \frac{<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_i}>}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)$$

Or $\sum q_i\boldsymbol{r_i} = Q\boldsymbol{OP}$, en notant Q la somme des charges positives (et donc –Q est égal à la somme des charges négatives).

$$\Rightarrow \quad V^+(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{OP}>}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

De même, le potentiel créé par les charges négatives est :

$$V^-(M) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q<\boldsymbol{r}, \boldsymbol{ON}>}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Le potentiel total est :

$$V(M) = V^+(M) + V^-(M) = \frac{Q\langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{NP}\rangle}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + O(\frac{1}{r^3})$$

Au terme $O(\frac{1}{r^3})$ près, il s'agit du potentiel électrostatique créé par un dipôle de charges Q disposé en P et –Q disposé en N. Le moment dipolaire est Q***NP***. On remarquera que le vecteur Q***NP*** est précisément égal à $\sum q_i A_i$, c'est-à-dire au vecteur $\sum q_i \boldsymbol{MA}_i$ indépendant de M puisque $\sum q_i = 0$.

Si N et P sont confondus, le potentiel est en $O(\frac{1}{r^3})$ (cas de la distribution multipolaire).

◆